



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. A - число вида $\overline{kkkk} = k \cdot 1111 = k \cdot 101 \cdot 11$, где $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
 если произведение $A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot k \cdot B \cdot C$ - квадрат натурального числа, это нат. число $: 101$ (число 101 - простое), тогда его квадрат кратен 101^2 , значит, $(B \cdot C) : 101$
 число C - двузначное, $0 < C < 101 \Rightarrow C : 101$, тогда $B : 101$:
 $B \in \{101; 202; 303; 404; 505; 606; 707; 808; 909\}$.

По условию в записи B есть цифра 2 $\Rightarrow B = 202$

$$\text{тогда } A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot k \cdot 2 \cdot 101 \cdot \frac{C}{101} = 101^2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot k \cdot C$$

в квадрате нат. числа все простые множители имеют четную степень, значит, $(k \cdot C) : 11$, $(k \cdot C) : 2$

если $k=1$: $C : 22 \Rightarrow C \in \{22; 44; 66; 88\}$ - не подх, по условию в C есть цифра 3

если $k=2$: $C : 11 \Rightarrow C \in \{11; 33\}$ (есть тройка), но тогда

$0 < k < 11 \Rightarrow k \neq 11 \Rightarrow C : 11$, в C есть цифра 3 $\Rightarrow C = 33$

$$\text{тогда } A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot k \cdot 3 \cdot 11 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot k$$

$2 \cdot 3 \cdot k$ - квадрат, тогда $k : 2, k : 3 \Rightarrow k = 6$ (т.к. $k < 10$). - при других k $A \cdot B \cdot C$ - не полный квадрат

тогда единственная тройка $(A; B; C)$: $A = 6 \cdot 1111 = 6666, B = 202, C = 33$

Ответ: $(6666; 202; 33)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2}. K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$$

если x увеличить на 1, y - увеличить на 1:

$$K_1 = \frac{(x+1) + (y+1) + 2}{(x+1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{xy+x-y-1}$$

$$K = K_1: \quad \frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy+x-y-1}$$

$$x+y+2 > 0 \quad (x > 0, y > 0) \Rightarrow xy = xy+x-y-1$$

$$x-y-1=0$$

$$x=y+1$$

$$\text{тогда } K = x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3y(y+1) = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1 -$$

при любых удовлетворяющих условию x и y $K=1$

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а) $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x + \frac{1}{2} (\cos(\pi x - \pi y) - \cos(\pi x + \pi y)) = \frac{1}{2} (\cos(\pi x + \pi y) + \cos(\pi x - \pi y))$$

$$-\cos 2\pi x + \frac{1}{2} \cos(\pi x - \pi y) - \frac{1}{2} \cos(\pi x + \pi y) = \frac{1}{2} \cos(\pi x + \pi y) + \frac{1}{2} \cos(\pi x - \pi y)$$

$$-\cos 2\pi x = \cos(\pi x + \pi y)$$

$$\cos(\pi - 2\pi x) = \cos(\pi x + \pi y)$$

$$\pi - 2\pi x = \pi x + \pi y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad \pi - 2\pi x = -\pi x - \pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 - 2x = x + y + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$1 - 2x = -x - y + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = 1 - 3x - 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

любые пары действ. x и y , удовлетворяющие условиям выше, являются решениями

Ответ: ~~все~~ все пары действ. $(x; y)$ такие, что

$$y = 1 - 3x - 2n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad y = x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

б) $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$

$$-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1$$

$$x \in [-5; 5]$$

$$y \in [-4; 4]$$

$$\arcsin \frac{x}{5} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \arccos \frac{y}{4} \in [0; \pi]$$

$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ — неравенство будет выполняться всегда кроме случая $\begin{cases} \arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} \\ \arccos \frac{y}{4} = \pi \end{cases}$

этом случае: $\frac{x}{5} = 1, \frac{y}{4} = -1$
 $x = 5; y = -4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

необходимо найти пары целых чисел, удовлетворяющих уравнению
($y = 1 - 3x - 2n$, $n \in \mathbb{Z}$ или $y = x - 1 + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$).

при $y = -4$, $x = -5, k = 5$ запишем все возм. пары $(x; y)$ и проверим, подходит ли они одному из условий

1 и 2. 1 - подходит 1-му, 2 - подходит 2-му, 0 - не подходит ни одному

(5; 4) 1	(4; 4)
(5; 3) 0	(4; 3)
(5; 2) 1	(4; 2)
(5; 1) 0	(4; 1)
(5; 0) 0	(4; 0)
(5; -1) 0	(4; -1)
(5; -2) 1	(4; -2)
(5; -3) 0	(4; -3)
(5; -4) 1	(4; -4)

всего пар $(x; y)$ при $x \in [-5; 5]$ и $y \in [-4; 4]$

$$9 \cdot 11 = 99$$

из уравнений видно, что x и y должны иметь разную чётность, тогда

y и $(1 - 3x)$ или y и $(x - 1)$ имеют одинаковую чётность, а период $2n$ или $2k$ позволяет достичь равенства.

из набора знач. x $(-5; -4; -3; \dots; 5)$ 6 нечётных и 5 чётных, из набора знач. y $(-4; -3; -2; \dots; 4)$ 4 нечётных и 5 чётных.

тогда наборов $(x; y)$ с разной чётностью $6 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 50$, из них один $(5; -4)$ не удовлетворяет неравенству. Тогда есть $50 - 1 = 49$ пар целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

Ответ: 49



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть в классе n учеников ($n > 4$ - иначе вероятность попасть на концерт была бы равна 1 и не менялась в 2,5 раза), а всего билетов выдано k .

тогда начальная вероятность попасть на концерт была равна $\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} = \frac{12}{n(n-1)}$ ($\frac{4}{n}$ - вер-ть, что попадет Петя, $\frac{3}{n-1}$ - вер-ть, что когда один билет уже у Пети, попадет Вова).

когда билетов стало k , вер-ть стала равной $\frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} = \frac{k^2-k}{n(n-1)}$

по условию ~~вер-ть~~^{вер-ть} вероятность в 2,5 раза меньше:

$$2,5 \cdot \frac{12}{n(n-1)} = \frac{k^2-k}{n(n-1)}$$

$$k^2 - k = 30$$

$$k^2 - k - 30 = 0$$

$$(k-6)(k+5) = 0$$

$k=6$ или $k=-5$ - не подг. по смыслу, билетов не может быть меньше 0

тогда всего выдано 6 билетов

Ответ: 6



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

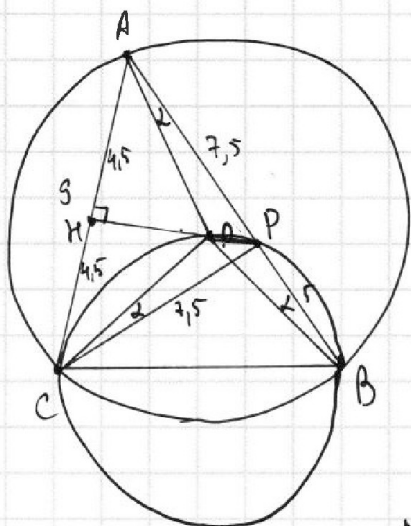


СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.



Дано: $AP = 7,5$, $PB = 5$, $AC = 9$

Найти S_{ABC}

Решение: $OA = OB = OC$ (O - центр опис. окр.) $\Rightarrow \triangle OAB$ - р/б $\Rightarrow \angle OAB = \angle OBA$

четыреху. ~~ОАВ~~ $\triangle OCP$ - впис. $\Rightarrow$

$\angle OCP = \angle OBP$ (впис. углы, опирающиеся на $\sim OP$), тогда $\angle OAB = \angle OBP$

$\angle OAB = \angle OBP = \angle OCP = \alpha$

по т. синусов где $\triangle OAP$:

$$\frac{OP}{\sin \alpha} = \frac{OA}{\sin \angle OPA}$$

где $\triangle OPC$:

$$\frac{OP}{\sin \alpha} = \frac{OC}{\sin \angle OPC}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{\sin \angle OPA} = \frac{OC}{\sin \angle OPC}$$

$OA = OC$, тогда $\sin \angle OPA = \sin \angle OPC$, тогда $\angle OPA = \angle OPC$ или $\angle OPA + \angle OPC = 180^\circ$

$\triangle APC$ существует $\Rightarrow \angle APC \neq \angle OPA + \angle OPC < 180^\circ \Rightarrow$

$\angle OPA + \angle OPC \neq 180^\circ \Rightarrow \angle OPA = \angle OPC$

$\triangle OPC = \triangle OPA$ (по 2 углам и стороне между ними $\angle OCP = \angle OAP = \alpha$,

$\angle OPC = \angle OPA$, по 2 сторонам и углу между ними -

$OC = OA$, OP - общ., $\angle COP = 180^\circ - \alpha - \angle CPO = 180^\circ - \alpha - \angle APO = \angle AOP \Rightarrow$

$AP = CP = 7,5$

тогда $\triangle APC$ - р/б, если H - середина AC, $PH \perp AC$,

$AH = 4,5$, из прямоуго. $\triangle APH$ $\cos \angle HAP = \frac{AH}{AP} = \frac{4,5}{7,5} = \frac{3}{5} = \cos \angle CAB$

$\triangle ABC$ - остроу. $\Rightarrow \sin \angle CAB > 0 \Rightarrow \sin \angle CAB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle CAB} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \angle CAB = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot (7,5 + 5) \cdot \frac{4}{5} = 9 \cdot 2 \cdot 2,5 = 45$$

Ответ: ~~45~~ 45



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

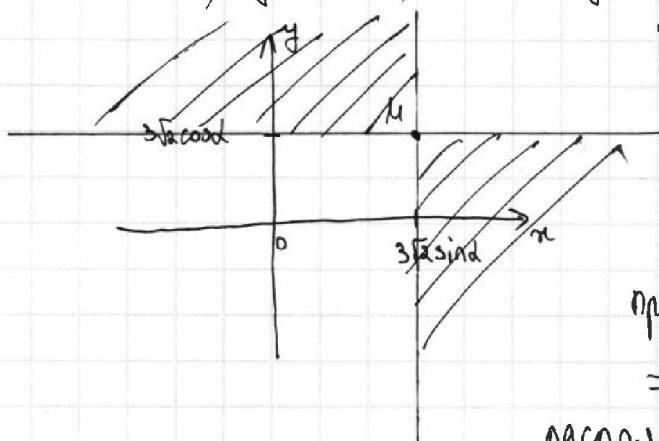
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6. уравн $x^2 + y^2 \leq 25$ — круг с центром $(0;0)$ и радиусом 5 на коорд. плоскости

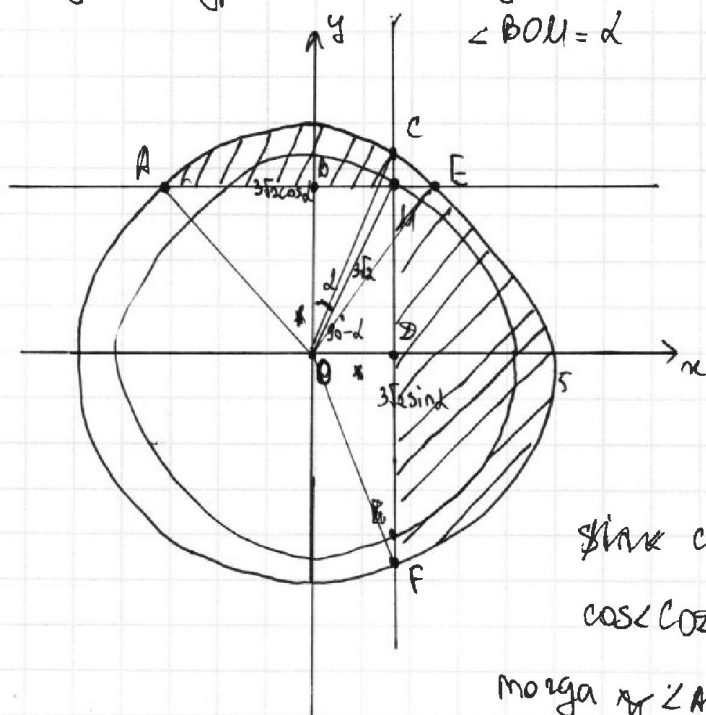
$(x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0$ — две прямые $(x = 3\sqrt{2}\sin\alpha; y = 3\sqrt{2}\cos\alpha)$ и две части плоскости, ограничен- ным ими.



Заметим, что расстояние OM от начала координат до точки пересечения этих прямых равно $\sqrt{(3\sqrt{2}\sin\alpha)^2 + (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} = 3\sqrt{2}$. — эта точка

расположена на окружности с центром в начале координат и ради- усом $3\sqrt{2}$

тогда фигура P_2 имеет вид:



$(3\sqrt{2} < 5, \text{ т.к. } (3\sqrt{2})^2 = 18 < 5^2 = 25)$

$BM = 3\sqrt{2}\sin\alpha, MD = 3\sqrt{2}\cos\alpha$

$DF = \sqrt{25 - 18\sin^2\alpha}, CM = DF - DM = \sqrt{25 - 18\sin^2\alpha} - 3\sqrt{2}\cos\alpha$

$AB = \sqrt{25 - 18\cos^2\alpha}, EM = AB - BM = \sqrt{25 - 18\cos^2\alpha} - 3\sqrt{2}\sin\alpha$

(фиг. прямоуго. $A-B - BM \parallel OX, MD \parallel OY$)

$\sin\alpha \cos\angle AOB = \frac{OB}{5} = \frac{3\sqrt{2}\cos\alpha}{5}$

$\cos\angle COB = \frac{OB}{5} = \frac{3\sqrt{2}\sin\alpha}{5}$

тогда $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOB - \angle BOC = \arccos \frac{3\sqrt{2}\cos\alpha}{5} + 90^\circ - \arccos \frac{3\sqrt{2}\sin\alpha}{5}$

аналогично $\angle EOF = \arcsin \frac{3\sqrt{2}\cos\alpha}{5} + 90^\circ - \arcsin \frac{3\sqrt{2}\sin\alpha}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



периметр фигуры $P(\alpha)$: $M = AM + MC + \cup AC + ME + MF + \cup EF =$

$$= AB + BM + CM + \frac{2\pi \cdot 5 \cdot \angle AOC}{360^\circ} + ME + MD + DF + \frac{2\pi \cdot 5 \cdot \angle EOF}{360^\circ} =$$

$$= \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + 3\sqrt{2} \sin \alpha + \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} - 3\sqrt{2} \cos \alpha + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} - 3\sqrt{2} \sin \alpha +$$

$$+ 3\sqrt{2} \cos \alpha + \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} - 3\sqrt{2} \cos \alpha + \frac{\pi}{36} \left(180^\circ + \arccos \frac{3\sqrt{2} \cos \alpha}{5} + \right.$$

$$\left. + \arcsin \frac{3\sqrt{2} \sin \alpha}{5} - \arccos \frac{3\sqrt{2} \sin \alpha}{5} - \arcsin \frac{3\sqrt{2} \sin \alpha}{5} \right) =$$

$$2(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}) + \frac{\pi}{36} \left(180^\circ + \left(\arccos \frac{3\sqrt{2} \cos \alpha}{5} + \arcsin \frac{3\sqrt{2} \cos \alpha}{5} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\arcsin \frac{3\sqrt{2} \sin \alpha}{5} + \arccos \frac{3\sqrt{2} \sin \alpha}{5} \right) \right)$$

$$\arcsin p + \arccos p = \frac{\pi}{2} \text{ поэтому}$$

$$M = 2(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}) + \frac{\pi}{36} (180^\circ + 90^\circ - 90^\circ) =$$

$$= 2(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}) + 5\pi$$

знач. M максимально, когда максимально выражение

$$\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{7 + 18 \sin^2 \alpha}$$

поскольку $\sin^2 \alpha = t$, тогда введем функцию ($t \in [0; 1]$)

$$f(t) = \sqrt{25 - 18t} + \sqrt{7 + 18t} \text{ и найдем ее максимум на отрезке } [0; 1]$$

$$f'(t) = \frac{-18}{2\sqrt{25 - 18t}} + \frac{18}{2\sqrt{7 + 18t}} = -\frac{9}{\sqrt{25 - 18t}} + \frac{9}{\sqrt{7 + 18t}}$$

$$f'(t) = 0: \frac{9}{\sqrt{7 + 18t}} = \frac{9}{\sqrt{25 - 18t}}$$

$$\sqrt{7 + 18t} = \sqrt{25 - 18t}$$

$$7 + 18t = 25 - 18t$$

$$36t = 18$$

$$t = \frac{1}{2}$$

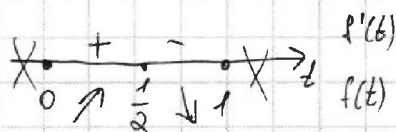


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



максимум функции $f(t)$ - при $t = \frac{1}{2}$, тогда
максимум M при $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
тогда $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$

$$M_{\max} = 2 \left(\sqrt{25 - 16 \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{25 - 16 \cdot \frac{1}{2}} \right) + 5\pi = 2(\sqrt{16} + \sqrt{16}) + 5\pi = 16 + 5\pi$$

$$\text{Ответ: } M_{\max} = 16 + 5\pi, \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



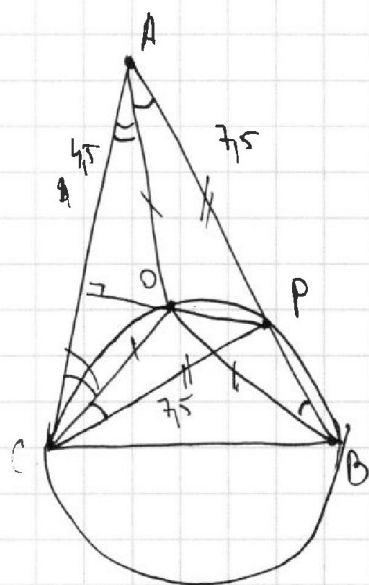
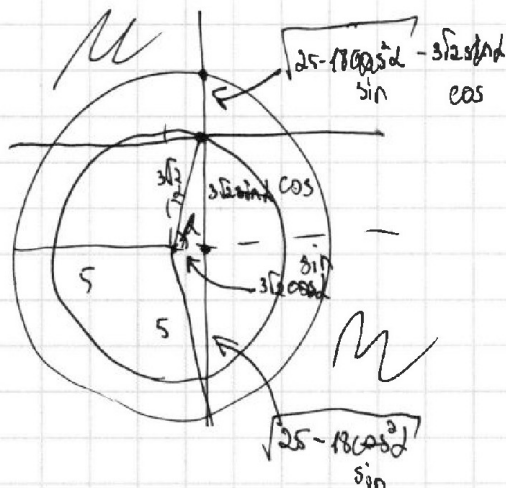
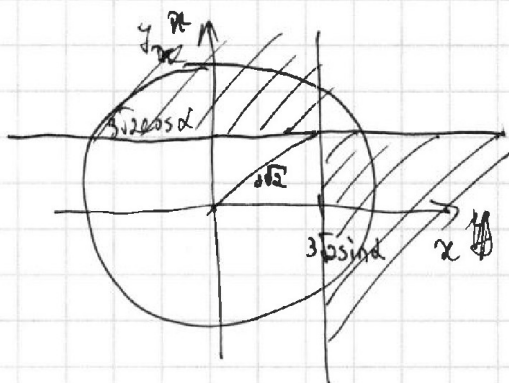
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

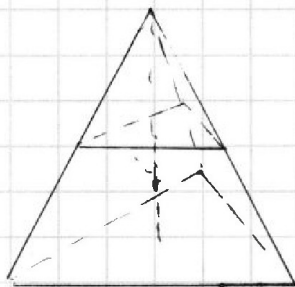
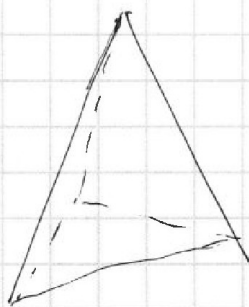
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0$$
$$x \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha, y \geq 3\sqrt{2}\cos\alpha$$
$$\text{и } x \geq 3\sqrt{2}\sin\alpha, y \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha$$



$$\cos\alpha = \frac{4.5}{7.5} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$



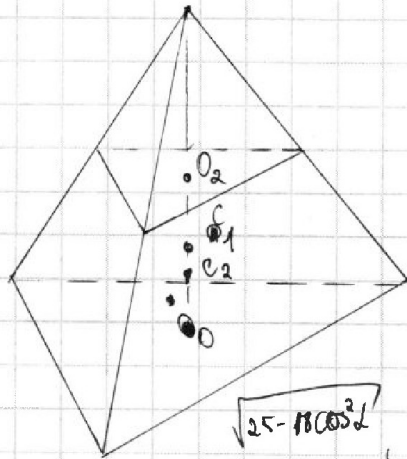


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

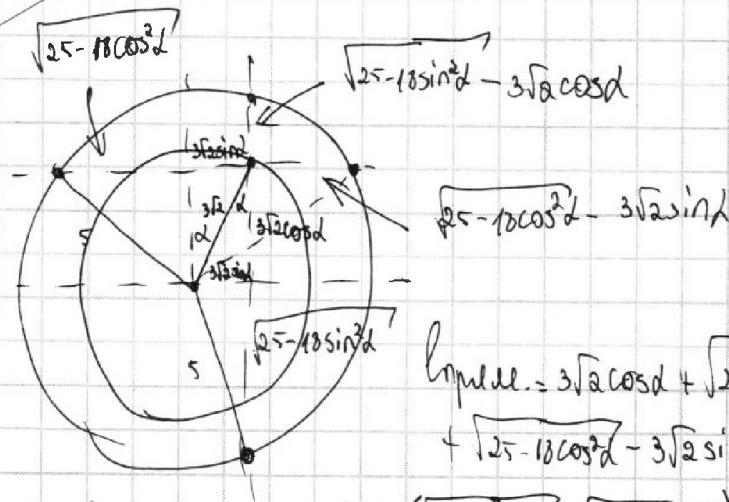
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



C_1 - центр W ($l_1 = CO = CO_2$)
 C_2 - центр SC ($l_2 = |C_2; AB|$)



$$\sqrt{25-18\sin^2 \alpha} + \sqrt{25-18\cos^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned} l_{\text{min}} &= 3\sqrt{2}\cos\alpha + \sqrt{25-18\sin^2\alpha} + \\ &+ \sqrt{25-18\cos^2\alpha} - 3\sqrt{2}\sin\alpha + 3\sqrt{2}\sin\alpha: \\ &= 2(\sqrt{25-18\cos^2\alpha} + \sqrt{25-18\sin^2\alpha}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \sqrt{7} & \sqrt{25} & 5 + \sqrt{7} & \sqrt{16} \end{array}$$

$$\sqrt{16} \quad \sqrt{16}$$

$$44 \quad (8)$$

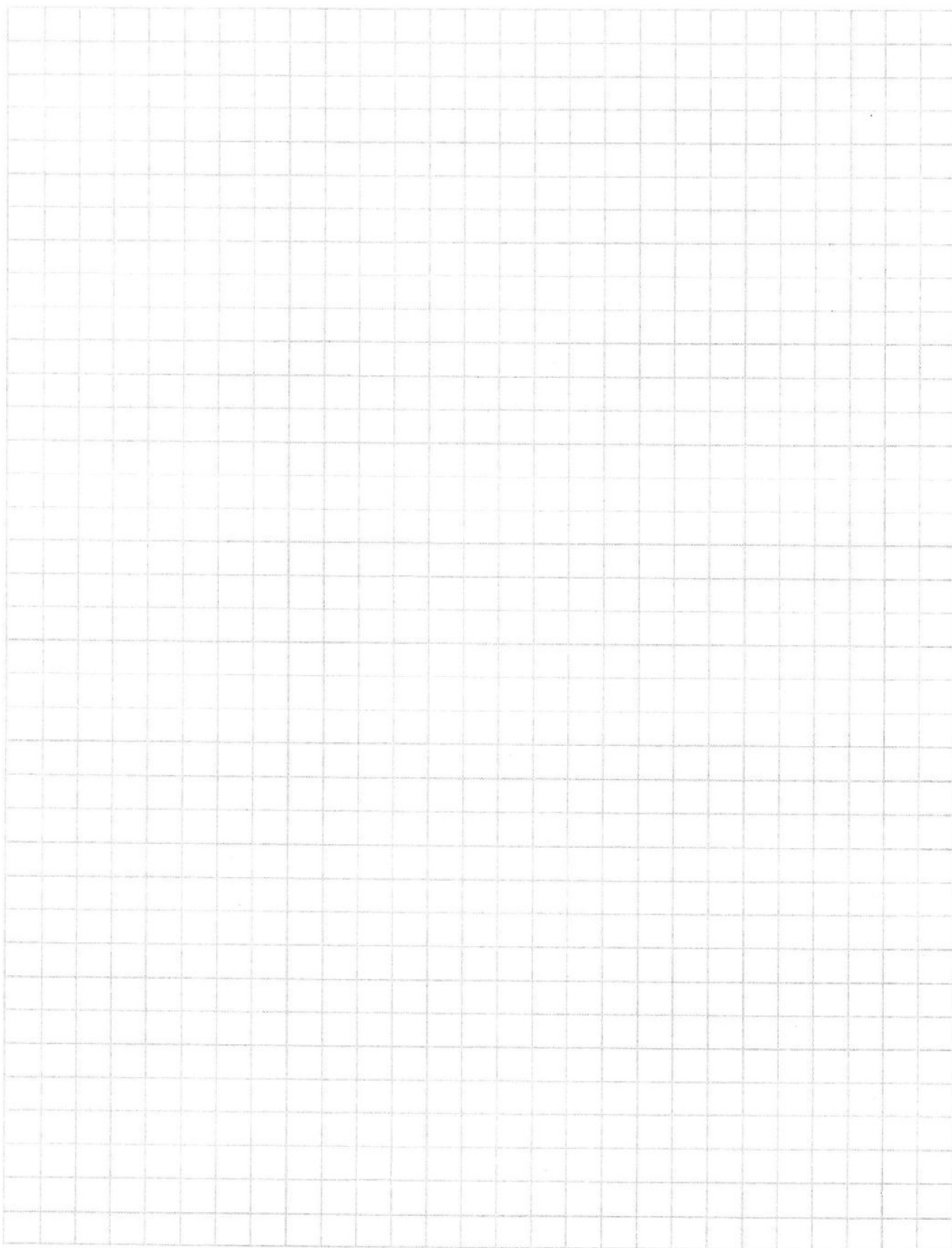


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено болес одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





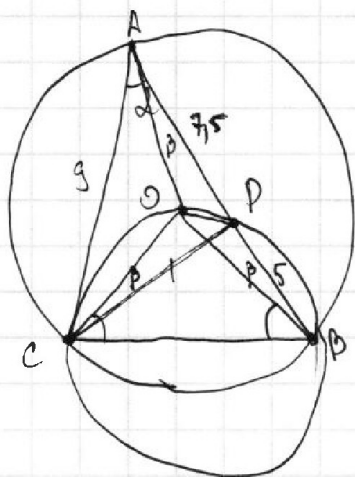
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.



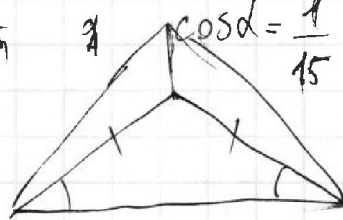
$$CP^2 = 9^2 + 7.5^2 - 2 \cdot 9 \cdot 7.5 \cdot \cos \alpha$$

$$BC^2 = 9^2 + 12.5^2 - 2 \cdot 9 \cdot 12.5 \cdot \cos \alpha$$

$$CP = 7.5 = AP$$

$$\angle PAO = \angle PBO = \angle OCP$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{15}$$



$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin \alpha$$

$$\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12.5 \cdot \frac{1}{15} = 45$$

$$3. \quad \sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = 2 \sin^2 \pi(x+y) \cos^2 \pi(x-y) \sin^2 \pi x = 2$$

$$\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y - \sin^2 \pi x = \cos^2 \pi x + \cos^2 \pi y \cos^2 \pi x$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin^2 \pi x + \frac{1}{2} \cos^2 \pi(x-y) - \frac{1}{2} \cos^2 \pi(x+y) = \cos^2 \pi x + \frac{1}{2} \cos^2 \pi(x+y) + \frac{1}{2} \cos^2 \pi(x-y)$$

$$\sin^2 \pi x = \cos^2 \pi x + \cos^2 \pi(x+y)$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = -\cos^2 \pi(x+y) = \cos^2 \pi(x+y)$$

$$\cos(\pi - 2\pi x) = \cos^2 \pi(x+y)$$

$$\pi - 2\pi x = \pi(x+y) \quad \text{или} \quad 2\pi x - \pi = \pi(x+y)$$

$$1 - 2x = x + y$$

$$3x = 1 - y$$

$$y = 1 - 3x$$

и период?

$$2x - 1 = x + y$$

$$y = x - 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. n однокл., ^{сначала} добавили k билетов

$$p_1 = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$$

$$p_2 = \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1}$$

$$\frac{25 \cdot 0}{k \cdot 4} = k^2 - k$$

$$k^2 - k - 30 = 0$$

$$k = 6$$

ответ 40

$$5 \text{ чл.: } p_1 = \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

1. $A = 101 \cdot 11 \cdot k, \quad k \in [1; 9]$

B 202

$$A \cdot B \cdot C = n^2 \Rightarrow B : 101 \Rightarrow B = 202$$

C

$$2 \cdot 11 \cdot k \cdot C = m^2$$

$$k=1 \Rightarrow C:22$$

$$k=2 \Rightarrow \dots$$

2. $k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$

$$k \in \mathbb{N} \quad \frac{x+y+2}{xy} \rightarrow \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$xy = (x-1)(y+1) = xy + x - y - 1$$

$$x - y - 1 = 0$$

$$x = y + 1$$

$$k = x^3 - y^3 - 3xy = x^3 - (x(y+1))^3 - 3y(x(y+1)) = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

5.

