



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① A - четырёхзначное число, сост. из одинаковых цифр, поэтому

$A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$, где a - натуральное число от 1 до 9

$A \cdot B \cdot C$ - квадрат, то есть все простые множители входят в $A \cdot B \cdot C$ в чётной степени. Поэтому

$$A \cdot B \cdot C : 101^2 \Rightarrow \begin{cases} a : 101 \\ B : 101 \\ C : 101 \end{cases} \Rightarrow B : 101$$

П.к. B содержит цифру 2, $B = 202$. Тогда:

$$\begin{cases} A \cdot B = a \cdot 2 \cdot 11 \cdot 101^2 \\ A \cdot B \cdot C : 2^2 \\ A \cdot B \cdot C : 11^2 \\ A \cdot B \cdot C = a \cdot 2 \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C : 22 \\ a \in \{1, 4, 9\} \\ a = 2 \\ C : 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ C = 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2222 \\ B = 202 \\ C = 33 \end{cases}$$

* П.к. C содержит цифру 3

Ответ: $\{(2222; 202; 33)\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~1) $\frac{x+y+2}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$~~

$$\textcircled{2} \quad \frac{x+y+2}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\Rightarrow xy = (x-1)(y+1) = xy + x - y - 1 \Rightarrow x = y + 1$$

$$\Rightarrow M = x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = \\ = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = \boxed{1}$$

Ответ: $\{1\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{3} \text{ a) } (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha = \pi x \\ \beta = \pi y \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = 0 \\ \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \alpha = \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = 0 \\ \frac{1}{2} (\cos \frac{\beta-\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha+\beta}{2}) = \frac{1}{2} (\cos \frac{3\alpha+\beta}{2} + \cos \frac{\beta-\alpha}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = 0 \\ \cos \frac{3\alpha+\beta}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{3\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi l \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = \pi + 2\pi k \\ 3\alpha + \beta = \pi + 2\pi l \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = \pi r \\ \beta = \pi + \pi + 2\pi k \\ \alpha = \pi r \\ \beta = -3\pi r + \pi + 2\pi l \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

~~$$\{(r; r+1+2\pi k); (r; -3r+1+2\pi l) \mid k, l \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}\}$$~~

$$\begin{cases} x = r \\ y = r + 1 + 2k \\ x = r \\ y = -3r + 1 + 2l \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ответ: } \{(r; r+1+2k); (r; -3r+1+2l) \mid k, l \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Заметим, что

~~$\forall x, y \in [-1; 1] \arcsin x + \arccos y \leq \frac{3\pi}{2}$~~

$$\forall a, b \in [-1; 1] \arcsin a + \arccos b \leq \frac{3\pi}{2}$$

Поэтому данному нер-ву удовлетворяют все пары (x, y) , при которых $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4}$ определено, кроме тех, для которых $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{3\pi}{2}$.

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} \\ \arccos \frac{y}{4} = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$$

Таким образом, $(5; 0)$ — ед. пара, не удовлетворяющая данному нер-ву. Она удовлетворяет уравнению из пункта а. Поэтому ответ на вопрос — это кол-во всех пар (x, y) , удовлетворяющих ур-ню из п. а, для которых определено $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4}$ (т.е. $-5 \leq x \leq 5$ и $-4 \leq y \leq 4$), таким что $x, y \in \mathbb{Z}$ имеют один.

~~Решение задачи~~

Посчитаем кол-во пар:

x и y имеют разную чётность. Если x нечётно

($x \in \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$ — всего 6), то y чётно

($y \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$), если x чётно ($x \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$ — всего 5)

то y нечётно ($y \in \{-3; -1; 1; 3\}$ — всего 4). Заметим, что любые комбинации чётных чисел разной чётности подходят, поэтому ответ равен:

$$6 \cdot 5 + 5 \cdot 4 - 1 = \boxed{49}$$

Ответ: 49



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

④ k - число билетов, которое было выделено в начале месяца.
~~Минимум 4~~ n - общее кол-во школьников. Тогда:

$\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$ - вер-ть в начале месяца,

$\frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1}$ - вер-ть в конце месяца,

$$k > 4, k \in \mathbb{Z}$$

Из условия:

$$\begin{cases} \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} \cdot \frac{5}{2} = \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} \\ k \in \mathbb{Z} \\ k > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30 = k(k-1) \\ k \in \mathbb{Z} \\ k > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - k - 30 = 0 \\ k \in \mathbb{Z} \\ k > 4 \end{cases} \Leftrightarrow k = \boxed{6}$$

Ответ: 6



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

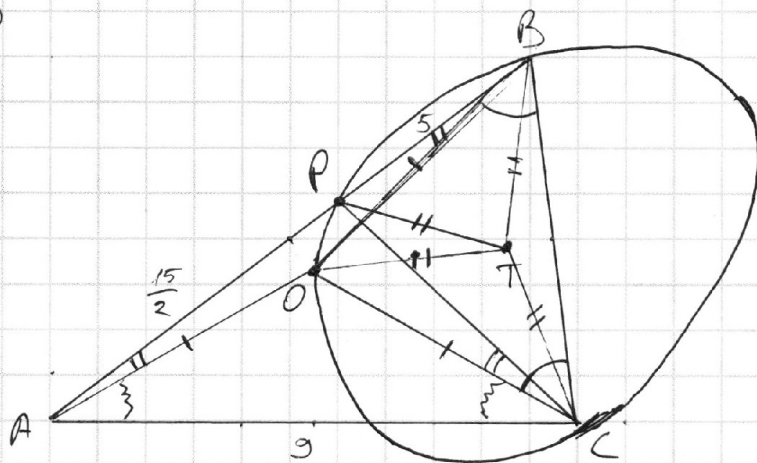
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5



T - центр ω_2

R - рад. ω_1

r - рад. ω_2

$$\angle OBC = \angle OCB = \alpha \quad (OB = OC)$$

$$\angle PBO = \angle PCO = \beta \quad (\text{опираются на } PO)$$

$$\angle OAC = \angle OCA = \gamma \quad (OA = OC)$$

$$\frac{BC}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{AC}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{AP + PB}{\sin(\alpha - \beta + \gamma)} = 2R - \text{теор. синусов}$$



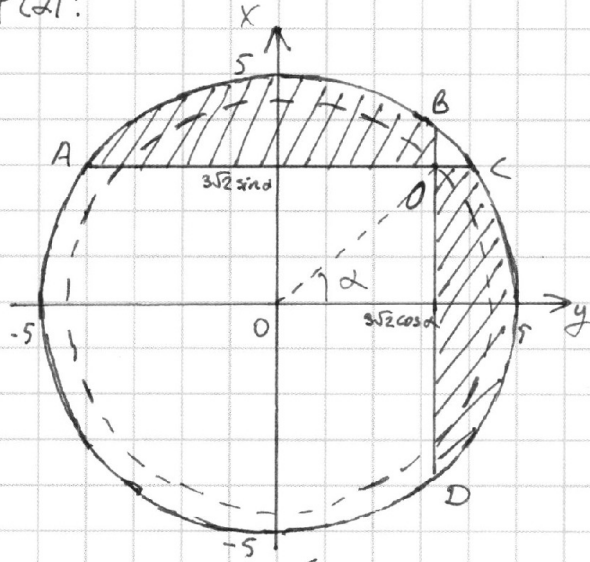
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Phi(\alpha)$:



Рассмотрим точки A, B, C, D, O фигуры $\Phi(\alpha)$ (см. рис.).

Заметим, что периметр разбивается на дуги $\cup AB, \cup CD$ и на отрезки AO, BO, CO, DO :

$$P = \cup AB + \cup CD + AO + BO + CO + DO$$

Заметим, что градусная мера дуг сохраняется (не зависит от α):

$$\angle(\cup AB) + \angle(\cup CD) = 2\angle AOB = 180^\circ$$

Поэтому длина дуг (суммарная) также не зависит от α .

То есть макс. периметр достигается при макс. сумме $AO + BO + CO + DO$. Рассмотрим точки A, B, C, D :

$$A(A_x, A_y), B(B_x, B_y), C(C_x, C_y), D(D_x, D_y)$$

$$A_x = C_x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$B_y = D_y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$A_y = -C_y = -\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}$$

$$B_x = -D_x = \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}$$

Рассмотрим сумму длин отрезков:

$$AO + BO + CO + DO = AC + BD = (C_y - A_y) + (B_x - D_x) =$$

$$= 2(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha})$$

Тогда периметр $\Phi(\alpha)$ P равен:

$$P = 2\pi \cdot 5 \cdot \frac{180^\circ}{360^\circ} + 2(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}) =$$

$$= 5\pi + 2(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}) = 5\pi + 2(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{7 + 18 \sin^2 \alpha})$$

Чтобы найти максимум, рассмотрим $\frac{dP}{dt}$,

$$\text{где } t = 18 \sin^2 \alpha:$$

$$P = 5\pi + 2(\sqrt{25 - t} + \sqrt{7 + t})$$

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{25 - t}} + \frac{1}{\sqrt{7 + t}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

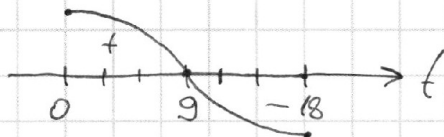
6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{dP}{dt}$:



9 - точка максимума

$$P(9) = 5\pi + 2(4+4) = \boxed{5\pi + 16} = M - \text{макс. периметр.}$$

Макс. периметр. достигается при:
 $t = 18 \sin^2 \alpha = 9 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{2\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Ответ: $M = 5\pi + 16$; достигается при $2\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⑥ Пусть $\Phi_1(x)$ — фигура, которая задается уравнением:
 $(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$

$\Phi_2(x)$ — фигура, которая задается уравнением:
 $x^2 + y^2 \leq 25$.

Тогда $\Phi(x) = \Phi_1(x) \cap \Phi_2(x)$

Рассмотрим $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$:

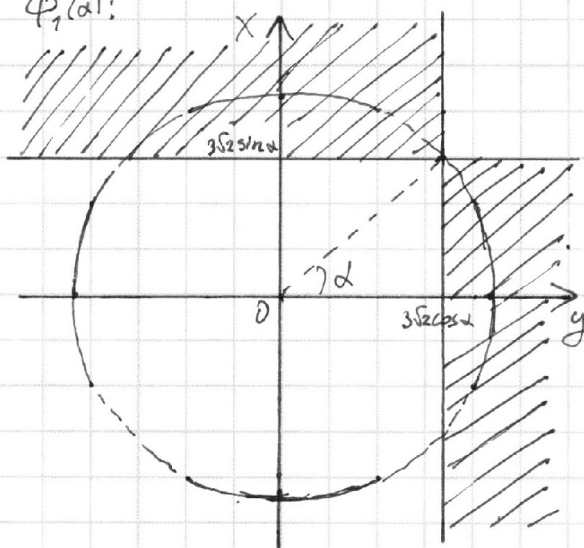
$\Phi_1(x)$:

$$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \Leftrightarrow$$

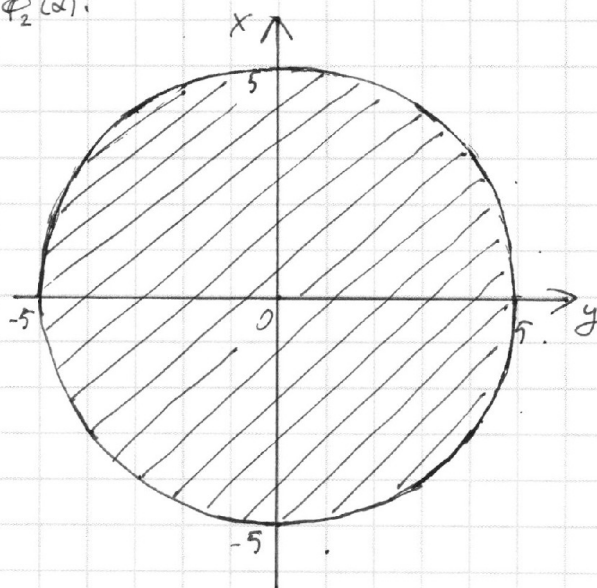
$$\begin{cases} x - 3\sqrt{2} \sin \alpha > 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha < 0 \\ x - 3\sqrt{2} \sin \alpha < 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha > 0 \\ x - 3\sqrt{2} \sin \alpha = 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Изобразим на пл-ти фигуры $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi(x)$:

$\Phi_1(x)$:



$\Phi_2(x)$:





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{3} \text{ a) } (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pi x \\ \beta = \pi y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \alpha = \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan \alpha \tan \frac{\alpha+\beta}{2} = 1 \\ \sin \alpha = 0 \\ \cos \frac{\alpha+\beta}{2} = 0 \\ \sin \frac{\alpha+\beta}{2} = 0 \\ \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha + \beta = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = r \\ x = \frac{1}{3}(1 + 2k - r), r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{1}{3}(1 + 2k - r); r \right) \mid r \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (-\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\beta-\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha+\beta}{2} \right)$$

$$\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \alpha = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3\alpha+\beta}{2} + \cos \frac{\beta-\alpha}{2} \right)$$



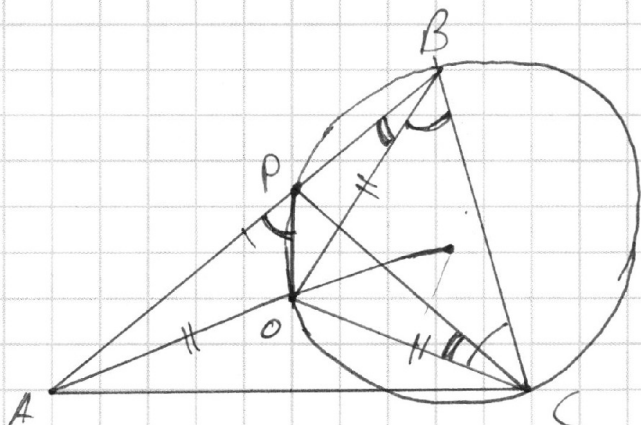
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} \cdot \frac{5}{2} = \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} \Leftrightarrow k^2 - k - 30 = 0 \Leftrightarrow k = 6$$



$$\begin{cases} \frac{PB}{\sin(\alpha - \beta)} = R = 2r \\ \frac{AC}{\sin(\alpha + \beta)} = 2R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta} = \frac{R}{\sin \alpha} \\ \frac{9}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} = 2R \end{cases} \Rightarrow \frac{9}{5} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} = 2 \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{9}{10} \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)$$

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AC}{\sin(\alpha + \beta)} = 2R \Rightarrow \sin \angle ACB = \frac{25}{18} \sin(\alpha + \beta)$$

$$\frac{BC}{\sin 2\alpha} = 2r \Leftrightarrow BC = 4r \cdot \sin \alpha \cos \alpha = 2R \cos \alpha$$

$$\frac{R}{\sin(\alpha - \beta)} = 2r$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} \alpha' + \operatorname{tg} \beta') \operatorname{tg} \alpha' &= (1 - \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \beta') (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha') \Leftrightarrow \\ 2 \operatorname{tg}^2 \alpha' + 2 \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \beta' &= 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha' - \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \beta' + \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg}^3 \alpha' \Leftrightarrow \\ \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \beta' - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha' - 3 \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \beta' + 1 &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$(\operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \beta' - 1) (\operatorname{tg} \alpha' - 1) (\operatorname{tg} \alpha' + 1) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 11 \cdot 101 \cdot d \Rightarrow B : 101 \Rightarrow B = 2 \cdot 101$$

$$A \cdot B = 2 \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot d \Rightarrow \begin{cases} C = 22 \\ a - \text{кв.} \\ a = 2 \\ C = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ C = 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2222 \\ B = 202 \\ C = 33 \end{cases}$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x =$$

$$= \sin(\pi(x + \frac{1}{2})) + \sin(\pi(y + \frac{1}{2})) \sin(\pi(x + \frac{1}{2}))$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$$

$$\frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{xy}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} =$$

$$\Rightarrow xy + x - y - 1 = xy \Rightarrow \cancel{xy} \quad x = y + 1$$

$$M = \cancel{y^3 + 3y^2 + 3y + 1} \quad x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y =$$

$$= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

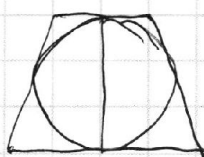
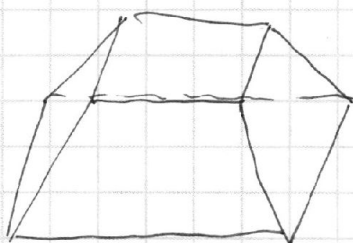
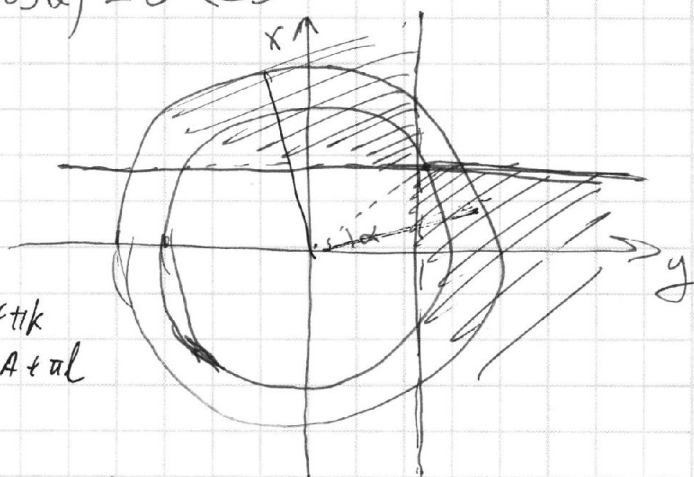
$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$$

$$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{2} \sin \alpha > 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha < 0 \\ x - 3\sqrt{2} \sin \alpha < 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha > 0 \\ x - 3\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \text{Аттик}$$

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \alpha + \alpha$$



$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

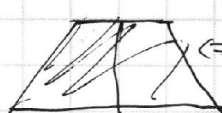
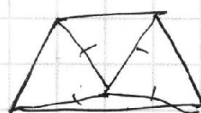
$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} =$$

$$\alpha + \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha + \beta = \pi + 2\pi k$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$



$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sin \alpha \sin \alpha = \cos \alpha \cos \alpha \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \Leftrightarrow \alpha + \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\tan(\alpha + \beta) \tan \alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \cdot \frac{\tan \alpha}{1} = 1 \quad \tan \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$