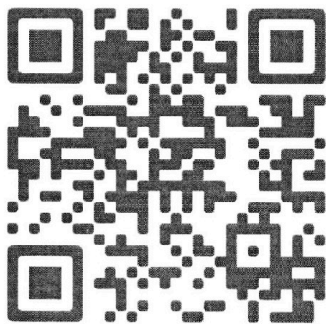




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



~~X~~ [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

~~X~~ [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

~~X~~ [5 баллов] ~~X~~ Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

~~X~~ Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

~~X~~ [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

~~X~~ [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- ① $A, B, C \in \mathbb{N}$:
- A - $1 \times$ значное вида $\overline{aaaa}$
 - B - $3 \times$ значное вида $\overline{a_1 a_2 a_3}$, где $a_1 = 1 \vee a_2 = 1 \vee a_3 = 1$
 - C - $2 \times$ значное вида $\overline{c_1 c_2}$, где $c_1 = 5 \vee c_2 = 5$
 - $A \cdot B \cdot C = m^2$, $m \in \mathbb{N}$

$$m^2 : 1111 \quad 101 \cdot 11 = 1111 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m^2 : 11^2 \\ m^2 : 101^2 \end{cases} \quad \text{т.к. } 11 \text{ и } 101 \text{ простые числа}$$

$$A : 1111 \quad m^2 : (1111)^2 \quad \Rightarrow \quad B \cdot C : 1111 \quad \text{Заметим, что } \begin{cases} B < 1000 < 1111 \\ C < 100 < 101 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B : 11 \\ C : 101 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 101 \\ C = 55 \end{cases} \quad \text{т.к. } 11 \text{ число из } [11, 99] \text{ с } 5 \text{ цифрами} \\ - 55, \text{ число из } [101, 999] \text{ с } 1 \text{ цифрой}$$

$$\Leftrightarrow A : 5 \& A : 1111 \& A < 10000 \Rightarrow A = 5555 \quad \text{иначе } (m^2 : 25 \& m^2 : 25)$$

$$\text{Ответ: } (5555; 101; 55)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

4 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \quad k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y-3} + \frac{1}{(x-3)(y-3)}, \quad x > 0 \text{ и } y > 0$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy \quad M_{*} = ?$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy} \\ \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y-3} + \frac{1}{(x-3)(y-3)} = \frac{(x-3)+(y-3)+1}{(x-3)(y-3)} = \frac{x+y-5}{(x-3)(y-3)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y-5}{(x-3)(y-3)} \\ \begin{cases} y > 0 \\ x > 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow xy = xy - 3y + 3x - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - y = 3^{*}$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 9xy = \overset{*}{(x-y)} \overset{**}{(x^2+xy+y^2)} - 9xy = \\ &= 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy = 3(x^2 + y^2 - 2xy) = 3(x-y)^2 = 3 \cdot 9 = \boxed{27} \end{aligned}$$

Ответ: $M = 27$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 3a) \quad x, y \in \mathbb{R} : (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x &= \\
 &= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \\
 \pi x = a \text{ \& } \pi y = b \Rightarrow (\sin a - \sin b) \sin a &= (\cos a + \cos b) \cos a (\neq) \\
 \Leftrightarrow \sin^2 a - \cos^2 a = \sin a \sin b + \cos a \cos b &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -\cos 2a = \cos(a-b) \Leftrightarrow \cos 2a + \cos(a-b) &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{3a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{3a-b}{2} = 0 \\ \cos \frac{a+b}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3a-b}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{a+b}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + \pi j, j \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = \pm 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ x + y = \pm 1 + 2j, j \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
 \text{Тогда все пары чисел вида } (3x, y) = (1+2k, 1+2k) ; \\
 (3x, y) = (-1-2k, -1-2k) ; (x, 3x+1-2k, k \in \mathbb{Z}) ; \\
 (x, -x+1+2j, j \in \mathbb{Z}) ; (x, -x-1+2j, j \in \mathbb{Z}) \quad \leftarrow \text{ответ}
 \end{aligned}$$

$$3b) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} = 2\pi$$

$$x \in [-4; 4] ; y \in [-9; 9]$$

$$\forall t \in [-1; 1] \arccos t \leq \pi$$

$\Rightarrow$ нам не подходит одна пара $y = -9$ & $x = -4$
 Все остальные (x, y) являются решением а), а также решением пункта б)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Переберём:

~~$x=1$~~
 ~~$x=2$~~
 ~~$x=3$~~

Заметим, что y ~~возможны~~
равных по четности
чисел x_1 и x_2 по-во
пара будет одинаково

рассматриваем две пары: z и nz чисел: z ~~и~~ g ~~и~~ четно
 g ~~и~~ nz нечетно

Заметим, что две пары вида 2)
будет аналогично, т.к. две числа вида x и $zj+1$
где x и $j \in \mathbb{Z}$ $\exists k \in \mathbb{Z}$: $zj+1+2k=x$
или $zj+2k=x$
в нашем случае четность не меняется $\Rightarrow$ 10 ~~и~~ g ~~и~~ четно
 g ~~и~~ nz нечетно

$\Rightarrow$ две $\begin{cases} \forall x \in [1; 4] : x \cdot 2 \text{ пар } 10 \\ \forall x \in [1; 4] : x \cdot 2 \text{ пар } 9 \end{cases}$

тогда их $5 \cdot 10 + 4 \cdot 9 = 88$

НО -1 пара т.к. ограничение

Ответ: 85



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

④ n человек $\rightarrow$ 4 билета $\rightarrow$ n человек $(4+k)$ билетов

$P(\text{Вася и Петя покупают по билету}) \rightarrow \times 3,5 \times$

$4+k=?$

$P(A)$

Посчитаем $P(\text{Вася и Петя покупают по билету})$ ~~В начале~~ ~~в конце~~

Всего групп из n человек $- C_n^4$

Групп из n человек, в которых Петя и Вася $- C_{n-2}^2$

(фиксируем двух $\rightarrow$ (1 случай) и добираем 2 человека из $(n-2)$ человек (C_{n-2}^2) , перемножив получаем C_{n-2}^2)

$\Rightarrow$ ~~в начале~~ ~~в конце~~ $P(A) = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} =$

$$= \frac{\frac{n-2!}{(n-2)!2!}}{\frac{n!}{(n-4)!4!}} = \frac{12}{n(n-1)}$$

Аналогично посчитаем $P(A)$ в конце месяца:

Всего групп по $4+k$ человек $- C_n^{4+k}$

с Васей и Петей $- C_{n-2}^{2+k}$

$\Rightarrow P(A)$ в конце месяца

$$= \frac{C_{n-2}^{2+k}}{C_n^{4+k}} = \frac{(n-2)(3+k)}{(n-1)n}$$

По условию:

$$\frac{(4+k)(3+k)}{(n-1)n} = 3,5 \cdot \frac{12}{(n-1)n} \Rightarrow 42 = (4+k)(3+k) \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ k=10 \\ k>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow k=3 \Rightarrow 4+k=7$

Ответ: ~~в начале~~ в конце месяца было выдано 7 билетов.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- ① $A, B, C \in \mathbb{N}$:
- A - четырех знач. число
 $\text{вида } \overline{xxxx}$
 - B - трехзнач, одна из цифр - 1
 - C - двухзнач, одна из - 5
- $ABC = m^2, m \in \mathbb{N}$

$$m^2: 1111$$

$$11 = 101 \cdot 11$$

$$\begin{cases} m^2: 11 \\ m^2: 101 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2: 121 \quad (11^2) \\ m^2: 101^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B \cdot C: 1111$$

$$\begin{cases} B < 100 \\ m < 1000 \end{cases} \Rightarrow B: 101 \quad C: 11$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{осев } B = 101 \\ \text{осев } C = 55 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{осев } A = 5555$$

② $R = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{y+x+1}{xy} \quad (x > 0, y > 0)$

$$\frac{x-3}{y+3} \rightarrow R = \frac{y+x+1}{yx} = \frac{(y-3)+(x+3)+1}{(y-3)(x+3)} = \frac{y+x+1}{(y-3)(x+3)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+1 = 0 \quad (x > 0, y > 0) \end{cases}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \neq 3, y \neq -3, y \neq 0, x \neq 0 \\ xy - 3y + 3x - 9 = xy \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow x - y = 3$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy$$

$$3(x^2 - 2xy + y^2) = 3(x-y)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① × слово

~~4~~
~~3~~
~~2~~ - ~~выражение~~

$$P(\Pi_+, B_+) = \frac{\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}}{2} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 5}{x(x-1)} = \frac{21}{x(x-1)}$$

$$C_{n-2}^4 = \frac{n!}{(n-4)!4!}$$

$$C_{n-2}^2 = \frac{n!}{(n-4)!2!}$$

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{n!}{(n-4)!2!} \cdot \frac{(n-4)!4!}{n!} = \frac{4!}{2!} = 12$$

C_n^4 - всего групп по 4

C_{n-2}^2 - групп по 2, в которых всего 4 букв

$$\frac{n!}{(n-4)!4!} \cdot \frac{(n-2)!}{(n-4)!2!}$$

$$P(\Pi_+, B_+) = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)! \cdot 4!}{n! \cdot 2!} = \frac{12}{(n-1)n}$$

$$= \frac{12}{(n-1)n}$$

$$C_{n-2}^{4+k} = \frac{n!}{(n-4-k)! (4+k)!}$$

$$C_{n-2}^{2+k} = \frac{(n-2)!}{(n-4-k)! (2+k)!}$$

$$\Rightarrow P(B(B+P)) = \frac{(4+k)!}{(2+k)!} \cdot \frac{(n-2)!}{(n-4-k)!}$$

$$12 \cdot 3,5 = \frac{(4+k)!}{(2+k)!} = (2+k+1)(2+k+2) \cdot \frac{4!}{2!}$$

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

$$(3+k)(k+4) \rightarrow k=3$$

Ответ: 7

