



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начало месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одинадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одинадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одинадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , перескакает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что число A всегда кратно 1111 (т.к. состоит из одинаковых цифр)

$1111 = 11 \cdot 101$, при этом 11 и 101 — простые числа

отсюда чтобы $A \cdot B \cdot C$ было полным квадратом, необходимо, чтобы среди простых делителей чисел B и C были 11 и 101 (ведь раз A четырехзначное, то второй раз оно делиться ни на 11 , ни на 101 не может)

C — двузначное число, значит $C/101$, откуда $B/101$

при этом в B есть цифра 6 , а значит из всех 3-значных чисел, кратных 101 , $B = 606$

Заметим теперь, что $606/11$, а значит $C/11$, при этом в C есть тройка, откуда $C = 33$

откуда мы получаем, что $A \cdot B \cdot C$ среди простых делителей имеет $2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11$, тогда число A

должно быть кратно $2, 101$ и 11 , т.е. A либо равно

2222 , либо 8888 (тогда помимо указанных

простых делителей добавляется 4 , являющаяся квадратом

Ответ: $\{2222; 606; 33\}$ и $\{8888; 606; 33\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$1) \quad xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4$$

$$x - y = 2$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + y^2 + xy) - 6xy =$$

$$= 2(x^2 + y^2 + xy) - 6xy = 2x^2 + 2y^2 - 4xy = 2(x-y)^2 = 8$$

~~Ответ: 8~~

$$2) \text{ если } x+y+5=0, \text{ то } \frac{x+y+5}{xy} \text{ также равно } \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

однако по условию $x > 0$ и $y > 0$, поэтому

$$x+y = -5 \text{ неостыжимо}$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☒ 3

☐ 4

☐ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x = 2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \frac{\pi y - \pi x}{2} \cos \pi x$$

$$1) \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x = \sin \frac{\pi y - \pi x}{2} \cos \pi x$$

$$\frac{1}{2} (\sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} + \sin \frac{-\pi x - \pi y}{2}) = \frac{1}{2} (\sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} + \sin \frac{\pi y - 5\pi x}{2})$$

$$\frac{1}{2} (\sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} + \sin \frac{\pi y + \pi x}{2}) = \frac{1}{2} (\sin \frac{\pi y + \pi x}{2} + \sin \frac{\pi y - 5\pi x}{2})$$

$$\sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \sin \frac{\pi y - 5\pi x}{2}$$

$$\sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} = -\sin \frac{3\pi x - \pi y}{2}$$

$$\sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} = 0$$

$$\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x - y = 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ на пункт a): $\begin{cases} x + y = 2n, n \in \mathbb{Z} \\ 3x - y = 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$b) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$x \in [-6; 6], x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$y \in [-2; 2], y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

сразу заметим, что ~~если~~ $\arcsin(k) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
то нас удовлетворят все (x, y) кроме тех, где
оба арксинуса равны $\frac{\pi}{2}$, т.е. кроме ~~тоже~~ $(6; 2)$

~~также найдем все (x, y) , удовлетворяющие~~
 $x + y = 2n, n \in \mathbb{Z}$

заметим, что если $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{Z}$, то
и $x + y = 2n, n \in \mathbb{Z}$, и $3x - y = 2k, k \in \mathbb{Z}$ сводится к
тому, что x и y должны иметь одну
четность

таким образом, кол-во пар найдем как

$$7 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 33$$

$\underbrace{\quad}_{\text{четных чисел от } -6906}$ $\underbrace{\quad}_{\text{четных чисел от } -2902}$ $\underbrace{\quad}_{\text{нечетных чисел от } -6906}$ $\leftarrow$ нечетных чисел от -2902

и не забываем о неподходящей паре $(6; 2)$

Ответ на пункт 2: 32 пары



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

примем x количество 11-классников и y количество билетов в конце месяца (y - искомая величина)

в начале месяца вероятность вместе попасть на концерт составляла $\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}$

в конце же $\frac{y}{x} \cdot \frac{y-1}{x-1}$

при этом $\frac{y}{x} \cdot \frac{y-1}{x-1} = \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} \cdot 6$ по условию

тогда $y^2 - y = 4 \cdot 3 \cdot 6$

$$y^2 - y - 72 = 0$$

$$D = 1 + 288 = 289$$

$$y = \frac{1 \pm 17}{2} = \begin{cases} 9 \\ -8 \end{cases}$$

* x должно ≥ 2 хотя бы потому что в задаче уже наванта 2 ученика (отсюда $x \neq 0$, $x-1 \neq 0$)

так как количество билетов неотрицательно, $y = 9$

Ответ: 9

$$AK = \frac{25 \cdot 30}{35} = \frac{150}{7} \quad \text{Total } CK = 35 - \frac{150}{7} = \frac{95}{7}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

1 из 3

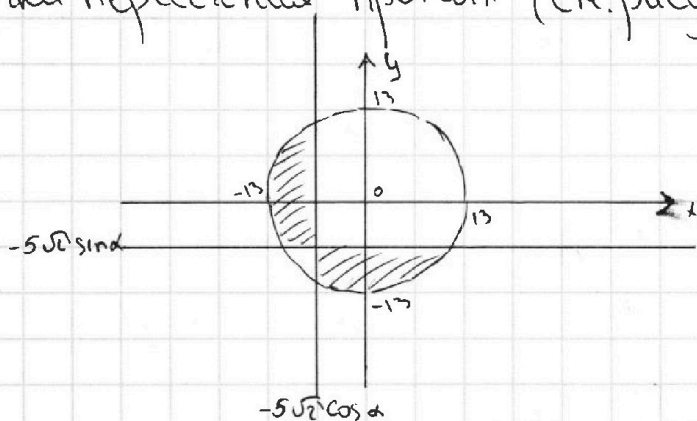
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 \leq 169$ - круг с центром $(0; 0)$ и радиусом 13

$(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0$ - две области, ограниченные

прямыми $x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$ и $y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$, при этом левая верхняя и нижняя правая части относительно точки пересечения прямых (см. рисунок)



! график является лишь 1-м из примеров только для того, чтобы показать, как выглядит фигура, ограниченная системой

соответственно фигура представляет собой два усеченных сегмента, ограниченных вертикальной и горизонтальной

прямыми $y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$ и $x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$, при этом

становится ясно, что обе прямые перемещаются по своим осям от $-5\sqrt{2}$ до $5\sqrt{2}$ (т.к. $\sin \alpha, \cos \alpha \in [-1; 1]$)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим важную вещь - эти две прямые всегда пересекаются внутри окружности, ведь

$$(-50\sqrt{2}\sin\alpha)^2 + (-50\sqrt{2}\cos\alpha)^2 = 100 < 169$$

это означает, что сумма дуг, отсеженных на окружности и принадлежащих фигуре, всегда постоянна и

равна $\frac{1}{2}(2\pi r) = \pi r$ (т.к. $y = -50\sqrt{2}\sin\alpha$ и $x = -50\sqrt{2}\cos\alpha$

перпендикулярны и пересекаются внутри окружности)

Таким образом, наибольший периметр фигур

достигается тогда, когда сумма длин отрезков

прямых $y = -50\sqrt{2}\sin\alpha$ и $x = -50\sqrt{2}\cos\alpha$, заключенных внутри круга, максимальна

Заметим, что прямая $y = -50\sqrt{2}\sin\alpha$ пересекает

окружность в точках с абсциссами $\pm\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha}$,

т.е. длина отрезка этой прямой, заключенной

внутри круга, равна $2\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha}$

аналогично $x = -50\sqrt{2}\cos\alpha$ пересекает окружность

в точках с ординатами $\pm\sqrt{169 - 50\cos^2\alpha}$ и

длина отрезка этой прямой $2\sqrt{169 - 50\cos^2\alpha}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

максимальное
тогда ~~минимальное~~ значение суммы длин этих
отрезков равно максимуму от $2(\sqrt{169-50\sin^2\alpha} + \sqrt{169-50\cos^2\alpha}) =$

$$2(\sqrt{169-50\sin^2\alpha} + \sqrt{169-50\cos^2\alpha}) =$$

$$= \sqrt{4(169-50\sin^2\alpha + 169-50\cos^2\alpha + 2\sqrt{(169-50\sin^2\alpha)(169-50\cos^2\alpha)})} =$$

$$= \sqrt{4(288 + 2\sqrt{169^2 - 169 \cdot 50 + 2500\sin^2\alpha\cos^2\alpha})} =$$

$$= \sqrt{4(288 + 2\sqrt{169^2 - 169 \cdot 50 + 625\sin^2 2\alpha})}$$

отсюда становится ясно, что при наибольшем $\sin^2 2\alpha$ и
достигается наибольшее значение периметра

$$\sin^2 2\alpha \in [0; 1] \Rightarrow \max(\sin^2 2\alpha) = 1 \quad \text{при } 2\alpha = \pi, n\pi$$

$$d = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \quad \text{при } 2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ т.е. } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

тогда $2(\sqrt{169-50\sin^2\alpha} + \sqrt{169-50\cos^2\alpha}) =$

$$= 2(\sqrt{169-25} + \sqrt{169-25}) = 48$$

~~и ответ:~~ также не забываем добавить к
периметру дуги окружности

Ответ: $48 + 13\pi$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

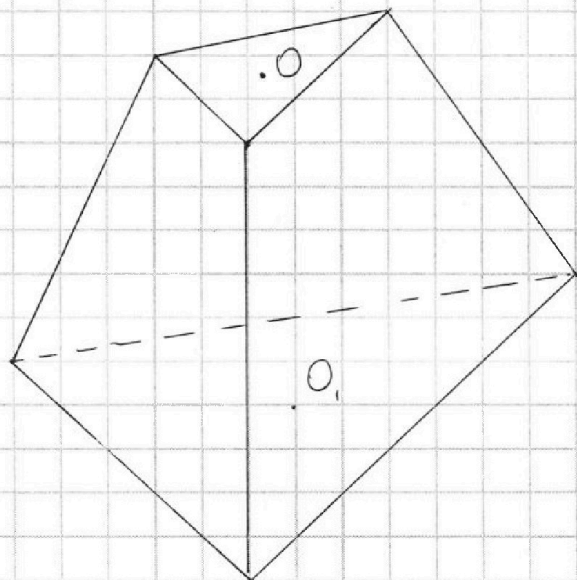


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



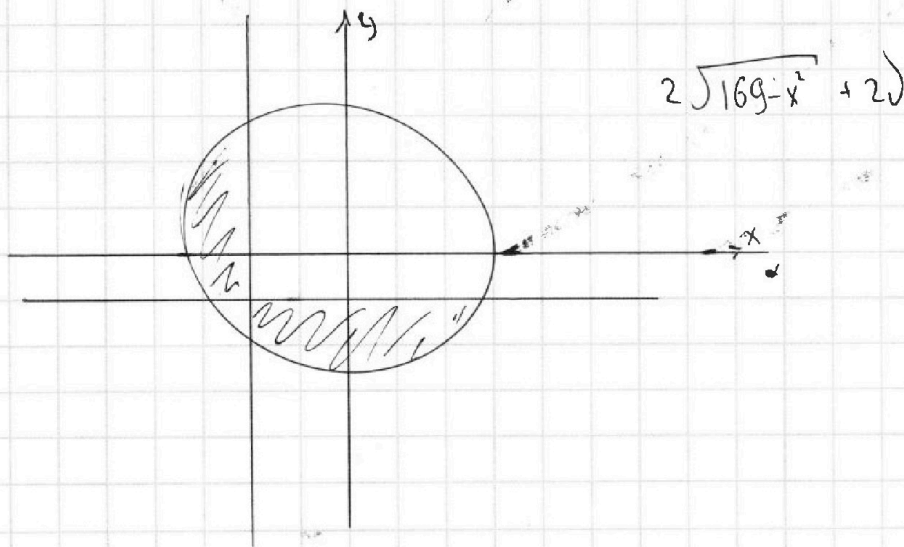
рау пирамида правильная, значит основание-
равносторонние треугольники

рау существует шар, касающийся всех ребер,
значит все грани являются описанными
доказано

трапециями

пусть сторона верхнего основания равна a , а
нижнего b

пусть





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{(x-1)} \cdot 6 = \frac{y-1}{x-1} \cdot \frac{y}{x}$$

$$4 \cdot 3 \cdot 6 = y^2 - y$$

$$y^2 - y - 72 = 0$$

$$\cos 2\pi x = \sin \pi y \sin \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = -125$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{6} = 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}$$

$$1 + \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \alpha = 2 \sin \alpha$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$2 \cdot \cos \frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - 0$$

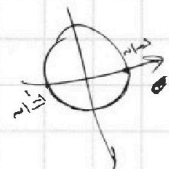
$$2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$2 \sin \frac{\pi}{3} \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin \frac{\pi}{2}(x+y) \cos \frac{\pi}{2}(x-y) \sin \pi x = \sin \frac{\pi}{2}(x+y) \sin \frac{\pi}{2}(y-x) \cos \pi x$$



$$y \in [-2; 2]$$

$$x \in [-6; 6]$$

$$x + y = -8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено болсе одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1111 : 11 = 101$$

$$101 \cdot \frac{100}{111}$$

$$\text{на } 11 \text{ на } 101 \text{ и на } \{1\} \dots \{9\}$$

$$B = 606$$

$$\text{на } 11 \text{ и на } 6$$

$$x \mid 1111, 606, \dots$$

$$! \# 2222, 606, 33$$

$$3333, 606,$$

$$101 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$$

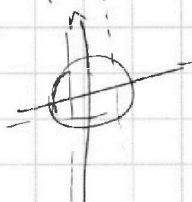
$$x^2 - 5x = 6x + 5$$

$$x = -y - 5$$

$$(-y-5)^3 - y^3 + 6(y+5)y$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$x^3 - y^3 - 6xy = ?$$



$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4$$

$$x - y = 2$$

$$(x-y)(x^2+y^2+xy) - 6xy$$

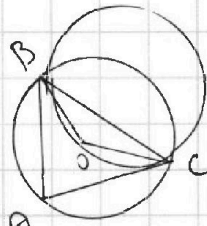
$$2x^2 + 2y^2 + 2xy - 6xy = 2(x-y)^2$$

$$-(y^3 + 15y^2 + 75y + 125) - y^3 +$$

$$x+y = -5 \quad x^2+y^2+2xy = 25$$

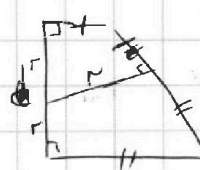
$$(x-y)(25-xy) - 6xy$$

$$25x - 25y - x^2y + xy^2 - 6xy$$



$$a \frac{a\sqrt{5}}{2} \\ b \frac{b\sqrt{5}}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{x}{2} < \pi$$



$$S = (a+b) \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{b+a}{2} \cdot \frac{(b^2+a^2)\sqrt{5}}{4}$$

$$\sin \frac{(11x+11y)}{2} \cos \frac{(11x-11y)}{2} = \sin \frac{(11x+11y)}{2} \sin \frac{(11y-11x)}{2} \cos \frac{11x}{2}$$