



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~1

$$] A = \overline{aaaa} = 11 \cdot 101 \cdot a, \text{ где } a - \text{ненулевая цифра}$$

$$\{ ABC - \text{квадрат, т.е. } 11 \cdot 101 \cdot a \cdot BC = k^2, k \in \mathbb{N}$$

$$A: \text{сл-но } abc : 101 \Rightarrow B : 101 \Rightarrow B = b \cdot 101, b \in \mathbb{N}$$

а-цифра,
с-двузн.

Т.к. B - трёхзнач., то $b \leq 9$,
т.е. $B = b0b$.

Тогда $B = 101$, т.к. имеет цифру 1.

$$11 \cdot 101a \cdot 101 \cdot C = k^2, k \in \mathbb{N}$$

$$aC : 11 \Rightarrow C : 11 \Rightarrow C = 11 \cdot c \Rightarrow C = \overline{cc} \Rightarrow C = 55$$

а-цифра

с-двузн.

есть цифра 5

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot 11 = k^2, k \in \mathbb{N} \Rightarrow a : 5 \Rightarrow a = 5$$

а-цифра

Т.о.

$$A = 5555$$

$$B = 101$$

$$C = 55$$

— первое решение (подходит, т.к. $5555 \cdot 101 \cdot 55 = (5555)^2$)

$$\text{Ответ: } \{(5555; 101; 55)\}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y > 0$$

н2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Leftrightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \quad \begin{matrix} x, y > 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = (x-3)(y+3) \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y - 9 \geq 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3+y \\ x \neq 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} y > 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\text{Тогда } x^3 - y^3 - 9xy = (3+y)^3 - y^3 - 9(3+y)y = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 27y - 9y^2 =$$

$$= 27. \text{ Это знач. достигается, например, при } x=4 \wedge y=1.$$

(свернет из
рав-нов. переносов)

Ответ: {27}



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x &= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} (x+y) \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} (x-y) \right) \sin \pi x = \\ &= \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} (x+y) \cos \frac{\pi}{2} (x-y) \cos \pi x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} (x+y) = 0 \\ -\sin \frac{\pi}{2} (x+y) \sin \pi x + \cos \frac{\pi}{2} (x-y) \cos \pi x = 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} (x+y) = 0 \\ \cos \left(\frac{\pi}{2} (x-y) + \pi x \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} (x+y) = 0 \\ \cos \frac{\pi}{2} (3x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2k+1 \\ 3x-y = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: ~~$\{(x, y)\}$~~ $\{(x; 2k+1-x) \mid x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x; 3x-2k-1) \mid x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{Z}\}$

$$\text{б)} \quad \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9 \\ x \geq 4 \\ y \geq 9 \end{cases}$$

$\arccos x \in \pi$,
направл.
вектора в (·) 1.

возможно,
уравн. к

Заметим, что при $x, y \in \mathbb{Z}$: $x+y = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x-y = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$
это все условие можно переписать так как x и y имеют раз-
ную четность.

$$x:2 \wedge y:2: 5 \cdot 10 = 50$$

поряд. на отрезке $[-4; 9]$ $(\pm 4, \pm 2, 0)$

$$x:2 \wedge y:2: 4 \cdot 9 = 36$$

$$(\pm 3, \pm 1) \quad (\pm 8, \pm 6, \pm 4, \pm 2, 0)$$

$x=4 \wedge y=9$ - посчитали зрб

$$50 + 36 - 1 = 85$$

Ответ: 85



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

] всего n учеников, а в конце месяца стало выдано $4+k$ билетов.

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{k+2}}{C_n^{k+4}} \Leftrightarrow \frac{7}{2} \cdot \frac{\frac{(n-2)!}{2!(n-4)!}}{\frac{n!}{4!(n-4)!}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(k+2)!(n-k-4)!}}{\frac{n!}{(k+4)!(n-k-4)!}} \Leftrightarrow$$

вер-ть выдачи
билета
(число способов
распр. билетов,
если уже заданы
те же и все делить
на чис. во всех
способов)
вер-ть
в конце
месяца

$$\Leftrightarrow \frac{7}{2} \cdot \frac{4!}{2!} = \frac{(k+4)!}{(k+2)!} \Leftrightarrow \frac{7}{2} \cdot 4 \cdot 3 = (k+4)(k+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 7k + 12 = 42 \Leftrightarrow k^2 + 7k - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq 3 \\ k \geq -10 \end{cases} \begin{matrix} k \geq 0 \\ \Leftrightarrow k = 3 \end{matrix}$$

$$k+4=7$$

Ответ: 7 билетов.

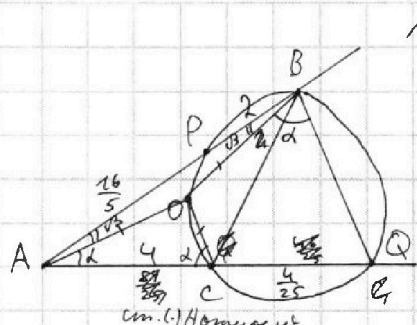


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



NS второе
] Q - пересек ω_2 с AC (если ложно, то.
 $AB \cdot AP = AC^2 \Leftrightarrow \frac{26}{5} \cdot \frac{16}{5} = 4^2$
см. (1) A
относ ω_2 (!)

$$AP = \frac{16}{5}$$

$$BP = 2$$

$$AC = 4$$

$$AB = AP + BP = \frac{26}{5}$$

см. (1) Номос ω_2
 $AQ \cdot AC = AP \cdot AB \Rightarrow AQ = \frac{\frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5}}{4} = \frac{104}{25} > 4$ т.е. Q на дуге AC за (1) C.

$$QC = |AC - AQ| = \left| 4 - \frac{104}{25} \right| = \frac{48}{25}$$

O - центр $\omega_1 \Rightarrow OA = OB = OC \Rightarrow \begin{cases} \angle BAO = \angle ABO = \beta \\ \angle CAO = \angle ACO = \alpha \end{cases}$ такие обозначения.

BQOC - вып. $\Rightarrow \angle OBQ = \angle ACO = \alpha$

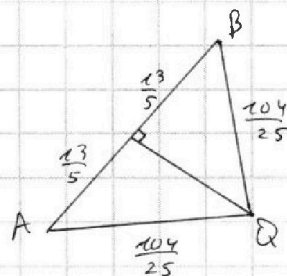
Тогда $\angle BAQ = \beta + \alpha = \angle ABQ \Rightarrow AQ = BQ$

$$S_{ABQ} = \frac{AB \cdot \sqrt{AQ^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}}{2} = \frac{\frac{26}{5} \cdot \sqrt{\left(\frac{104}{25}\right)^2 - \left(\frac{13}{5}\right)^2}}{2} =$$

$$= \frac{13}{125} \sqrt{104^2 - 65^2} = \frac{13}{125} \sqrt{169 \cdot 49} = \frac{13 \cdot 7}{125}$$

$$S_{ABC} = \frac{S_{ABQ} \cdot AC}{AQ} = \frac{\left(\frac{13 \cdot 7}{125}\right) \cdot 4}{\frac{104}{25}} = \frac{13 \cdot 7}{10} = 9,1$$

Ответ: 9,1





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

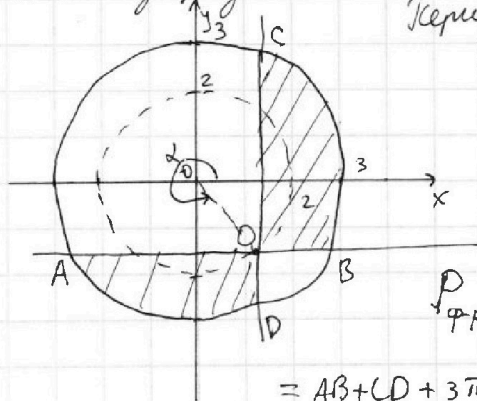
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

16 Изобразим м-во геометрически:



Периметр я буду обозначать за P.
Обознач. точек см. на рисунке.

Когда я буду использовать значок дуги, я буду иметь ввиду дугу, которая является границей $\Phi(\alpha)$.

$$P_{\text{фронт}} = AB + CD + \overset{\text{дуга}}{BC} + \overset{\text{дуга}}{AD} = AB + CD + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 =$$

$$= AB + CD + 3\pi$$

дуга гр-ков
мер равна $2 \cdot \frac{\pi}{2}$, т.к. внутренний
угол, их охват, равен $\frac{\pi}{2}$.

Заметим, что рисунок ~~симметричен~~ ^{можно отразить}
относ. осей x и y, и $AB + CD + 3\pi$ не изменится.
Н.Х.О. (-1)0 лежит в I-ой четверти

$$AB = 2 \cos \alpha$$

в-см. на рис.

$$\begin{cases} AB = 2 \cos \beta \\ 3 \sin \beta = 2 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow AB = 2 \cos(\arcsin \frac{2}{3} \sin \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = 2 \cdot 3 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha}$$

$$CD = 2 \cdot 3 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha}$$

$$(AB + CD + 3\pi) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{2 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha}} \cdot (-\frac{4}{9} \cdot 2 \sin \alpha) \cos \alpha +$$

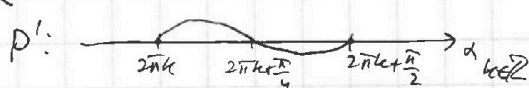
$$+ \frac{2}{2 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha}} \cdot (-\frac{4}{9} \cdot 2 \cos \alpha) (-\sin \alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8}{9} \cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha}} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - 6 \sqrt{\text{чел}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha}} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha \geq 1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha \geq \sin^2 \alpha$$

$$P':$$



увеличивает α
максимум
Т.О. максимум достигается
при $\alpha = 2\pi k + \frac{\pi}{4}$ (в 2-й и 3-й
четв.),
а в обратной ситуации
при $\alpha = \frac{\pi}{2} k + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P_{\max} = 2\sqrt{1 - \frac{4}{9} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \cdot 2 + 3\pi \approx 12 \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{9}} \cdot 2 + 3\pi \approx 4\sqrt{7} + 3\pi$$

Ответ: макс. периметр: $4\sqrt{7} + 3\pi$, достигается при $\alpha \approx \frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$



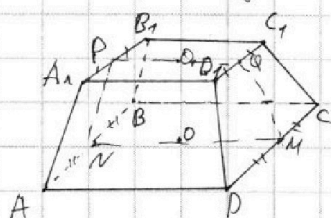
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7
] ABCDA₁B₁C₁D₁ - данная фигура

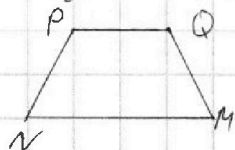


Т.к. есть сфера, касающаяся каждого ребра, то все грани - описанные чет-ки, а в них суммы противополож. сторон равны.

Т.к. фигура симметрична, центры сфер лежат на хордах к центру оснований, а еще симметричны в точках касания.

] P, Q, M, N - середины A₁B₁, C₁D₁, CD, AB соотв.но.

Очевидно, что эти точки лежат в одной пл-сти, кото-
рая, к тому же, содержит точки касания второй сферы с гра-
нями.



Тогда PQMN еще опис. чет-ки, а-но
 $MN + PQ = PN + QM$ (1)

Для грани AA₁DD₁ верно $AD + A_1D_1 = AA_1 + DD_1$ (2)

Нормировав PN - ср. линия AA₁B₁B $\Rightarrow PN \perp AB \Rightarrow PN \leq AA_1$

А аналогично $QM \leq DD_1$

Заметим, что если это знаки строгий то (1) и (2) не
могут выполняться одновременно. Тогда $PN = AA_1$
только при $AA_1 \perp AB$, т.е. $\angle(AA_1, ABCD) = 90^\circ$

Ответ: 90°



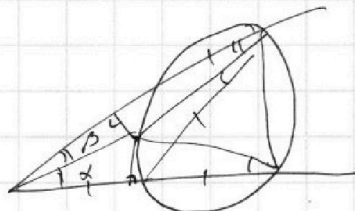
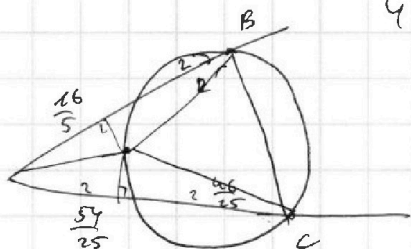
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЧВРКОВИК

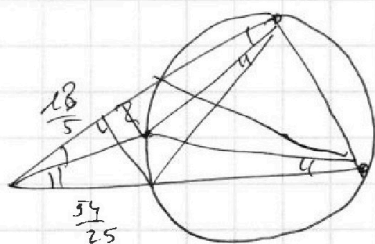


$$\cos \alpha = \frac{54}{26R} \cdot \frac{1}{2R} \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{2}{R}$$

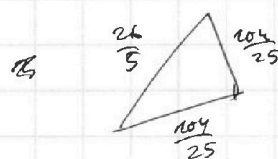
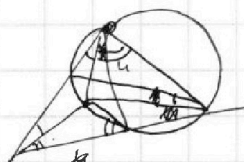
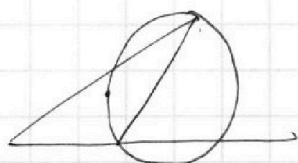
$$\cos \beta = \frac{13}{5R}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \dots$$

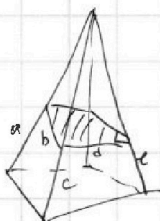
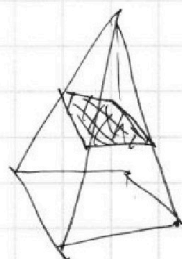
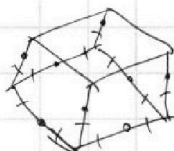
$$\frac{16}{5} + 2 = \frac{26}{5} \cdot \frac{13}{5}$$



$$\frac{1}{5} \sqrt{169 - 54}$$



$$169 \cdot 49$$



$$a + b = e + d$$
$$a + d = b + e$$

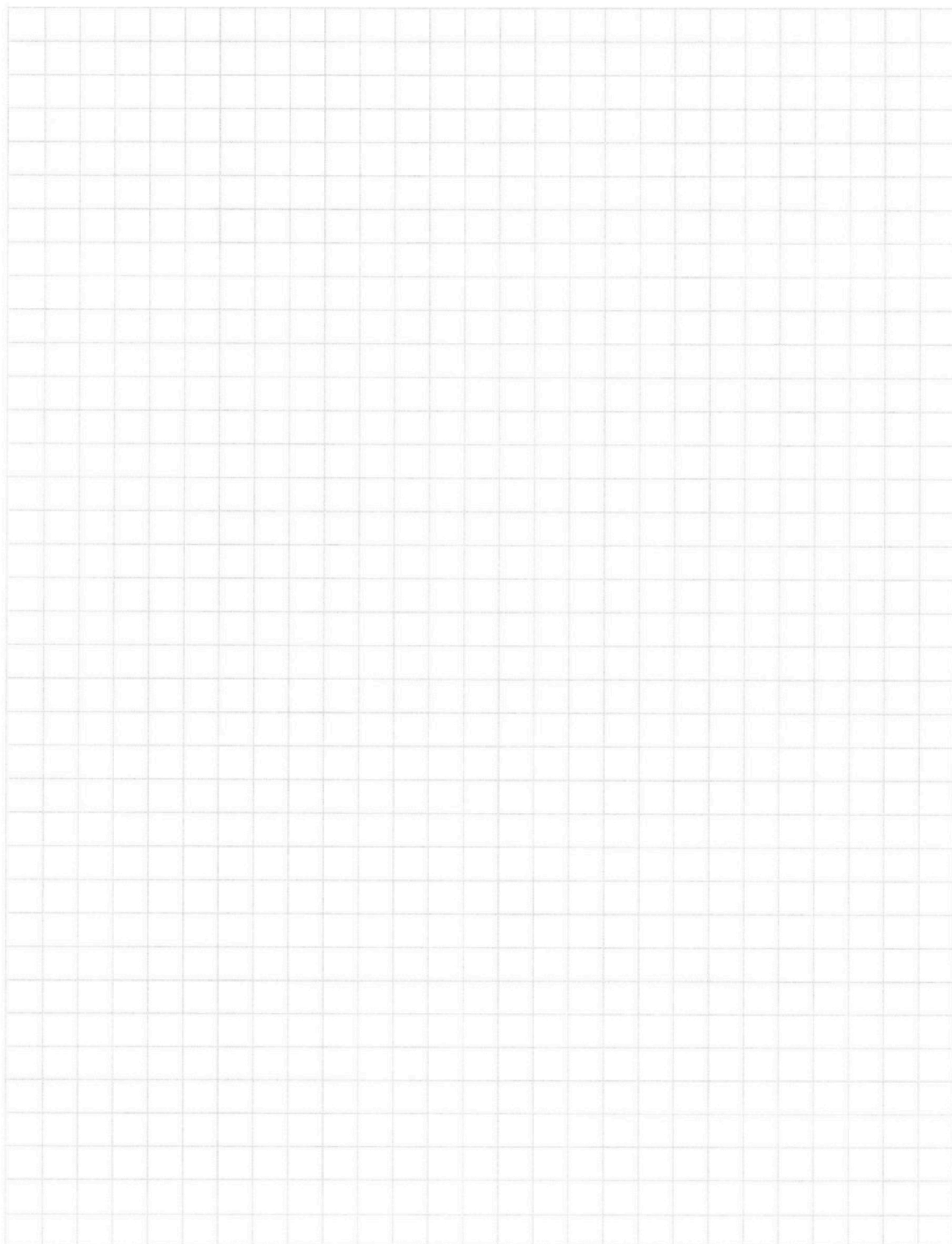


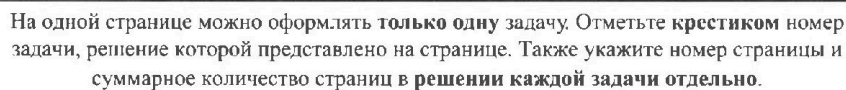
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2) \quad \frac{7}{2} = \frac{(n-k)! \cdot k!}{(n-k+2)! \cdot (k-2)!} \cdot \frac{(n-2)! \cdot 2!}{(n-4)! \cdot 4!} = \frac{k(k-1)}{n(n-k+2)(n-k+1)} \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{4 \cdot 3} \quad (2)$$

$k=7$: ~~996~~

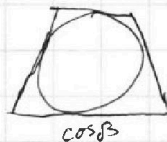
(2) $7 \cdot 6(n-k+2)(n-k+1) = k(k-1)(n-2)(n-1)$
mod n: ~~$-12k - 62k + 72n$~~ $7 \cdot 6^3(k-2)(k-1) = k(k-1) \cdot 2$

$$\sqrt{407} \quad \text{c2) } 2k(2(k-1)(2.1k-42-k)) \stackrel{7.50}{=} 0$$

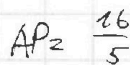
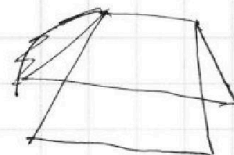
$$6 + 6\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = 4(k-1)(20k-21) : 16$$



$$\begin{array}{l} 56 > 24\sqrt{5} \\ 14 > 8\sqrt{5} \\ 7 > 3\sqrt{5} \\ 49 > 45 \end{array}$$



$$2 \sin \alpha = 3 \sin \beta \Rightarrow$$

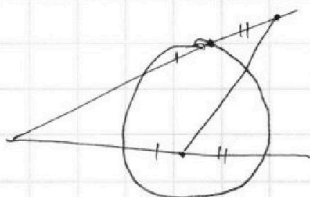
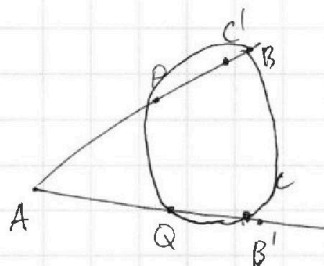
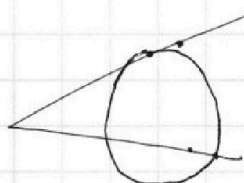


$$BP = 2$$

$$AC = 4$$

$$AQ = \frac{1}{4} \cdot \frac{26}{5} \cdot 2 = \frac{13}{5}$$

$$QC = 4 - \frac{13}{5} = \frac{7}{5}$$



$$\frac{\frac{8 \cdot 13}{5 \cdot 5}}{\frac{7}{5} \cdot 2} = \frac{8 \cdot 13}{7 \cdot 5} = \frac{104}{35}$$

