



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① Поскольку A - четырехзначное число из одинаковых цифр, то $A = 1111 \cdot a$, где $a \in [1; 9]$

$$A = 11 \cdot 101 \cdot a \quad (11 \text{ и } 101 - \text{простые числа}).$$

Так как $A \cdot B \cdot C$ - квадрат, то 101 входит в разложение $A \cdot B \cdot C$ на простые множители четное число раз, то есть $B : 101$ или $C : 101$ или $a : 101$.

Но $C, a < 101 \Rightarrow B : 101 \Rightarrow B \in \{101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909\}$. Тогда $B = 101$, т.к. в записи B есть единицы.

Значит, $A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot a \cdot 11 \cdot C$. Явно видно, что $C : 11 \Rightarrow C \in \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$, то есть $C = 55$ *

Значит, $A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5 \cdot a$. Это число является точным квадратом только при $a = 5$, то есть $A = 5555$

Ответ: $(5555, 101, 55)$

* Так как $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $a : 5$

② Так как $0 < a < 11$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

② По условию,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad \begin{cases} x \neq 3 \\ x, y > 0 \end{cases}$$

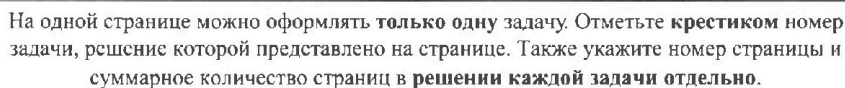
$$\begin{aligned} \frac{x+y+1}{xy} &= \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \\ \text{Так как } x+y+1 &\geq 0+0+1 > 0, \text{ то } xy = (x-3)(y+3) \neq 0 \\ xy &= \frac{xy+3x-3y-9}{x=y+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, } M &= (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - \\ & y^3 - 9y^2 - 27y = 27 \end{aligned}$$

M принимает значения 27, значит, при

$$y=1, x=4$$

Ответ: 27



СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Пороча QR-кода недопустима!

д) arcsos определён только на отрезке $[-1; 1]$

$$|\frac{x}{4}| \leq 1 \quad \text{u} \quad |\frac{y}{9}| \leq 1$$

$\text{arcos } \frac{x}{y} + \text{arcos } \frac{y}{x} \leq 2\pi$, m.k. $\text{arcos } \frac{x}{y} \leq \pi$ u $\text{arcos } \frac{y}{x} \leq \pi$

Равенство достигается при $\frac{x}{4} = \frac{y}{9} = -1$; то есть $x = -4, y = -9$
Значит, задача свелась к тому, чтобы найти $x, y \in \mathbb{Z}$, что

$x \in [-8; 9]$, $y \in [-8; 9]$

• x и y - произвольные из множества a ; то есть либо $x = y$, либо $3x = y$, либо $x + y = 0$.

Итак, ма $[-8; 9]$

4 чет. ч 4 мех. числа, а ма отрезки $[-8; 9]$ и $[0; 8]$

чет. ч 8 мех. чисел, то отрезок ма задану.

$4 \cdot 8 + 8 \cdot 4 = 8 \cdot 8 = 64$

⊕ числа x и y имеют разную четность

Ответ: 64

(! еще продолжим!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

• $x \in [-4; 4]$ и $y \in [-9; 9]$, но $(x, y) \neq (-4; -9)$
• x и y являются решением ур-я
из пункта а)
либо $3x - y$, либо $x + y$ — нечетное число
или
 x и y имеют разную четность
На отрезке $[-4; 4]$ 5 четных чисел и
4 нечетных числа. На отрезке $[-9; 9]$
10 нечетных чисел и 9 четных.
Числа -4 и -9 имеют разную четность.
Значит, ответ на задачу —
~~54~~ $5 \cdot 10 + 4 \cdot 9 - 1 = 85$
Ответ: 85



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

④ Пусть было выдано x билетов. Тогда кол-во способов их выдать так чтобы Петя и Вова оба получили билеты, равно C_{n-2}^{x-2} , где n - число организаторов классики. По условию (и из формулы классической вероятности), имеем: ~~***~~

$$\frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} = 3,5 = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} \quad (x \text{ билетов выдано всем классикам})$$

$$\frac{\frac{(n-2)!}{2! \cdot (n-4)!}}{n!} = 3,5 = \frac{\frac{(n-2)!}{(x-2)! \cdot (n-x)!}}{\frac{n!}{x! \cdot (n-x)!}}$$

$$\frac{(n-2)!}{(n-2)! \cdot (n-1) \cdot n} \cdot \frac{4!}{2!} \cdot 3,5 = \frac{(n-2)!}{(n-2)! \cdot (n-1) \cdot n} \cdot \frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!}$$

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 3,5}{n(n-1)} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$x(x-1) = 7 \cdot 6$$

$$x = 7 \text{ или } x = -6$$

Поскольку $x > 0$, то $x = 7$

Ответ: 7

⑤ Потому что осталось $(x-2)$ билетов, которые необходимо раздать $(n-2)$ организаторам

⑥** Поскольку было выдано билетов x билетов n организаторам равно C_n^x



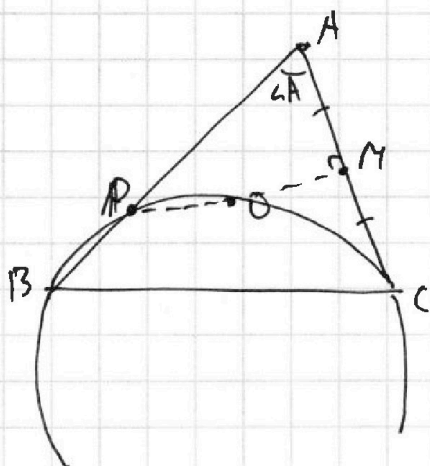
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5



Пусть M - середина AC
Докажем, что точки P, O, M коллинеарны
(OM - ср. пер. к $AC \Rightarrow OM \perp AC$)
Определим P , как $\angle BPO = \angle OCB$
($\neq B$) и докажем, что B, P, O, C коллинеарны.
 $\Leftrightarrow \angle BPO + \angle OCB = 180^\circ$

$$\begin{aligned} \angle MPA &= 90^\circ - \angle A \quad \text{из } \triangle APM \\ \angle OCB &= \frac{180^\circ - \angle BOC}{2} = \frac{180^\circ - 2\angle A}{2} = 90^\circ - \angle A \end{aligned}$$

Поэтому

по условию, $AP = \frac{16}{5}$ и $AM = \frac{AC}{2} = 2$

$$\cos \angle A = \frac{2}{\frac{16}{5}} = \frac{5}{8} \quad (\text{из } \triangle APM)$$

$$\sin \angle A = \sqrt{1 - \cos^2 \angle A} = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8} \quad (\text{т.к. } \angle A - \text{острый})$$

Тогда площадь $\triangle ABC$ равна $AB \cdot AC \cdot \frac{\sin \angle A}{2}$,
то есть $(\frac{16}{5} + 2) \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{2 \cdot 8} = \frac{13 \cdot \sqrt{39}}{5}$

Ответ: $\frac{13\sqrt{39}}{5}$

⊕ $\angle BOC$ - центральный угол, опирающийся на дугу BC окр-и (ABC) , а $\angle BAC$ - вписанный угол, опирающийся на ту же дугу.
По теореме о вписанном угле,
 $\angle BOC = 2\angle A$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

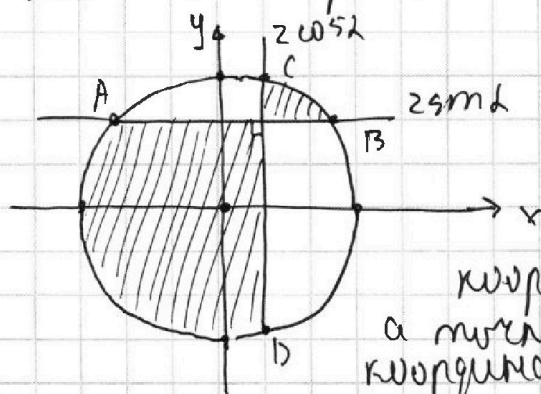
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⑥ Неравенство $x^2 + y^2 \leq 9$ задает на плоскости круг с центром в начале координат и радиусом 3. Мер-во $(x - 2\cos 2)(y - 2\sin 2) \geq 0$ задает на плоскости две противоположные четверти плоскости, ограниченные прямыми $x = 2\cos 2$ и $y = 2\sin 2$. Расстояние от начала координат до точки пересечения этих прямых равно $\sqrt{(2\cos 2)^2 + (2\sin 2)^2} = \sqrt{4} = 2 < 3 \Rightarrow$ она лежит ВНУТРИ круга. Значит, фигура $P(2)$ имеет вид, как на рис. ниже (*)



Периметр $P(2)$ вычислим, как сумму длин дуг $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD}$; плюс $(AB + CD)$.

Точки A и B имеют координаты $(\pm \sqrt{9 - 4\sin^2 2}, 2\sin 2)$, а точки C и D имеют координаты $(2\cos 2, \pm \sqrt{9 - 4\cos^2 2})$.

$$\text{Тогда } AB + CD = 2\sqrt{9 - 4\sin^2 2} + 2\sqrt{9 - 4\cos^2 2}$$

Так как $AB \perp CD$, то $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} =$ половина длины окружности из теоремы о вписанном угле, то есть $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = \frac{3 \cdot 2\pi}{2} = 3\pi$

Значит, периметр $P(2)$ равен

$$3\pi + 2\sqrt{9 - 4\sin^2 2} + 2\sqrt{9 - 4\cos^2 2} =$$

$$= 3\pi + 2\sqrt{5 + 4\cos^2 2} + 2\sqrt{5 + 4\sin^2 2}$$

По мер-ву ~~неравенства~~ о средних (для средних арифметического и квадратического):

$$\frac{\sqrt{5 + 4\cos^2 2} + \sqrt{5 + 4\sin^2 2}}{2} \leq \sqrt{\frac{(5 + 4\cos^2 2) + (5 + 4\sin^2 2)}{2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

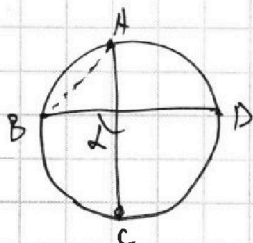
$$= \sqrt{\frac{10 + 4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{14}{2}} = \sqrt{7}$$

Значит, периметр $P(\alpha)$ не превышает $(3\pi + 4\sqrt{7})$

Равенство достигается, когда

$$5 + 4\cos^2 \alpha = 5 + 4\sin^2 \alpha, \text{ то есть } \cos \alpha = \pm \sin \alpha, \\ \text{то есть } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

Примечание



Теорема о вписанном угле; пусть точки A, B, C, D расположены в таком порядке на окруж. Тогда $\alpha = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{AD})$ (см. рис.)
Доказательство: $\alpha = \angle BAC + \angle DBA = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AD}}{2}$ из теоремы о вписанном угле

⊕ Примем $x = 2\cos \alpha$, $y = 2\sin \alpha$
примем окружности,
так как $|2\cos \alpha|, |2\sin \alpha| \leq 2 < 3$



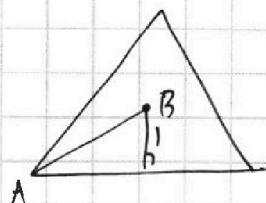
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7 (продолжение)



Однако отрезок AB равен 2, что
уменьшает пирамиду
тригонометрия

Значит,

$$\text{tg}^2 \beta = \frac{h^2}{4}$$

$$\text{tg}^2 \beta + 1 = \frac{1}{\text{ctg}^2 \beta}$$

$$\frac{h^2}{4} + 1 = \frac{h^2 + 1}{1 - (h^2 - \sqrt{h^2 + 1})^2}$$

Решив это уравнение, можно
найти значение h
и получить правильный ответ.
В общем виде ответ зависит
от коэф. вершин пирамиды



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

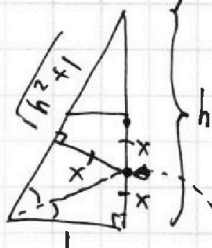
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(7) Пусть мы считаем, что радиус вписанной в основание окружности равен x , а высота пирамиды $\oplus$ равна h . Очевидно из симметрии, что центр ω и Ω попадают на высоту пирамиды.

Пусть x — радиус ω ; тогда высота усеченной пирамиды равна $2x$. Соединим центры пирамиды ω и Ω , перпендикулярной боковому ребру.



из основного св-ва биссектрисы

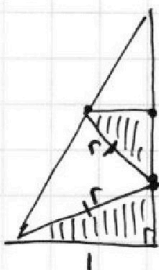
$$\frac{1}{\sqrt{h^2+1}} = \frac{x}{h-x} = \frac{1}{\frac{h}{x}-1}$$

$$\frac{h}{x} = \sqrt{h^2+1} + 1, \text{ то есть}$$

$$x = \frac{h}{\sqrt{h^2+1} + 1}$$

центр ω

Пусть r — радиус Ω . Центр Ω расположим в h от ω или считая, как показано на рисунке ниже.



центр Ω

Найдём расстояние t от центра Ω до плоскости основания пирамиды (из теории Пифагора для заштрихованных Δ):

$$t^2+1 = (2x-t)^2 + \left(\frac{h-2x}{h}\right)^2$$

$$t^2 h^2 + h^2 = 4x^2 h^2 - 4xt h^2 + t^2 h^2 + h^2 - 4xh + 4x^2$$

$$4x^2 h^2 + 4x^2 = 4xt h^2 + 4xh$$

$$t = \frac{xh^2 + x - h}{h^2}$$

$$t = \frac{\frac{h}{\sqrt{h^2+1}+1} (h^2+1) - h}{h^2} = \left[\frac{h^2 - \sqrt{h^2+1}}{h} \right]$$

(*) НЕУДАЧНО!



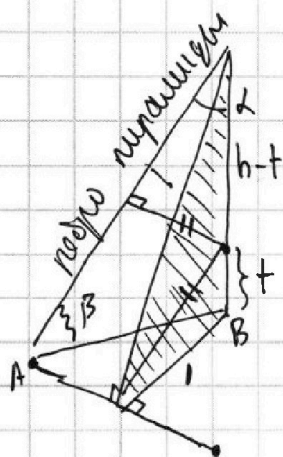


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



(На рисунке линия $///$ - рассматриваемый разрез)
Угол α - это угол наклона бокового ребра пирамиды к её высоте.

Потому $///$ на рисунке равны, как радиусы Ω

$$(h-t)^2 \sin^2 \alpha = t^2 + 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{t^2 + 1}{(h-t)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{h^2 - \sqrt{h^2 + 1}}{h}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\sqrt{h^2 + 1}}{h}\right)^2} = \frac{(h^2 - \sqrt{h^2 + 1})^2 + h^2}{h^2 + 1} =$$

Если β - угол из условия, то $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

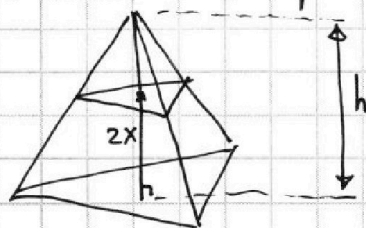
$$1 - \sin^2 \beta = \frac{(h^2 - \sqrt{h^2 + 1})^2 + h^2}{h^2 + 1}$$

$$\sin^2 \beta = \frac{1 - (h^2 - \sqrt{h^2 + 1})^2}{h^2 + 1}$$

Ответ: $\arcsin \left(\sqrt{\frac{1 - (h^2 - \sqrt{h^2 + 1})^2}{h^2 + 1}} \right)$, где

h - высота уменьшенной пирамиды

Примечание В левом примечании, уменьшенная пирамида выделена так: (она имеет и не имеет треугольный)





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

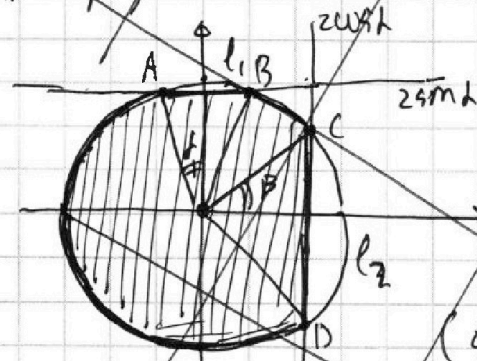
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(6) ~~Уравнение~~ ~~Матрично~~ $x^2 + y^2 \leq 9$ задает круг
с центром ~~максимум~~ ~~координат~~ и
радиусом 3

Матрично $(x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0$ задает
две четверти плоскости, ограниченной
прямими $x = 2\cos\alpha$ и $y = 2\sin\alpha$. Расстояние
от макс. координат до точек пересечения
этих прямых равно 2

$4 > 3 \Rightarrow$ точки пересечения
лежат внутри круга. Но
 $\Rightarrow$ обе прямые пересекают
«отрезок» от макс. координат
на 2 единицы



Нужны образцы $P(\alpha)$
вычислять так, как
на рис. слева.
Периметр $P(\alpha)$ можно
вычислять, как
разности длин дуг l_1 и l_2
(6π) и длин отрезков AB и CD , то
($6\beta + 6\gamma$), или $(AB + CD)$, то

если $6\pi - 6\beta - 6\gamma + AB + CD$

Почему A и B имеют координаты $(2\cos\alpha, \pm\sqrt{9-4\sin^2\alpha})$,
а точки C и D имеют координаты $(2\cos\alpha, \pm\sqrt{9-4\cos^2\alpha})$

$$AB + CD = 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\cos^2\alpha}$$

Почему тогда, $3\cos\beta = 2\cos\alpha \Rightarrow \beta = \arccos(\frac{2}{3}\cos\alpha)$;
аналогично $\gamma = \arccos(\frac{2}{3}\sin\alpha)$

Итак, периметр $P(\alpha)$ равен

$$p(\alpha) = 6\pi - 6\arccos(\frac{2}{3}\cos\alpha) - 6\arccos(\frac{2}{3}\sin\alpha) + 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\cos^2\alpha}$$

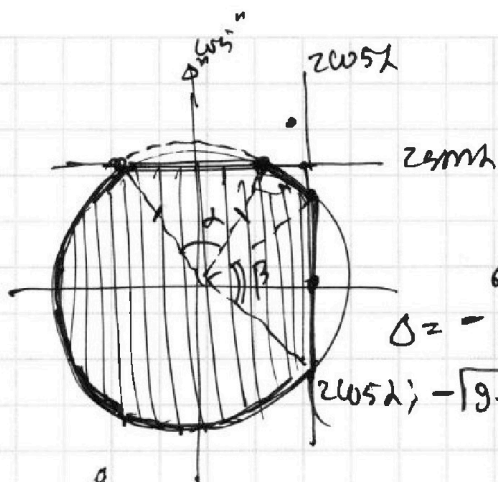


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

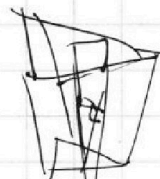
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$50 + 36 - 1 = 85$$



$$\Delta = -\frac{2\alpha}{2\pi} + \beta \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \right)$$

$$(2\cos \alpha; -\sqrt{9-4\cos^2 \alpha})$$

$$= 6 \sin \frac{\alpha}{2} + 6 \sin \frac{\beta}{2} - 6 \left(\frac{\alpha}{2} \right) - 6 \left(\frac{\beta}{2} \right)$$

$$\Delta = 2 \sqrt{9-4\cos^2 \alpha} - \beta \arccos(2\cos \alpha)$$

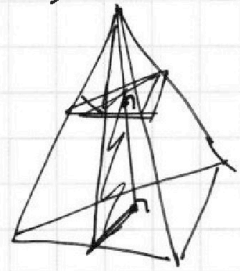
$$\cos \alpha = 2\cos \alpha$$

$$+ 2 \sqrt{9-4\sin^2 \alpha} - \beta \arccos(2\sin \alpha)$$

$$\frac{h^3 + h - h - h\sqrt{h^2+1}}{h^2} = \frac{h^2 - \sqrt{h^2+1}}{h}$$

$$\arccos(2\cos \alpha) + \arccos(2\sin \alpha)$$

$$\cos \alpha = 2\cos \alpha$$



$$\frac{1}{\sqrt{h^2+1}} = \frac{x}{h-x} = \frac{1}{\frac{h}{x}-1}$$

$$\frac{h}{x} = \sqrt{h^2+1} + 1$$

$$x = \frac{h}{\sqrt{h^2+1} + 1}$$

$$1+t^2 = \left(\frac{h-2x}{h} \right)^2 + (2x-t)^2$$

$$h^2 + t^2 h^2 = h^2 - 2hx + 4x^2 + 4x^2 h^2 - 4xht + t^2 h^2$$

$$= \frac{h^2(\sqrt{h^2+1}-1)}{h}$$

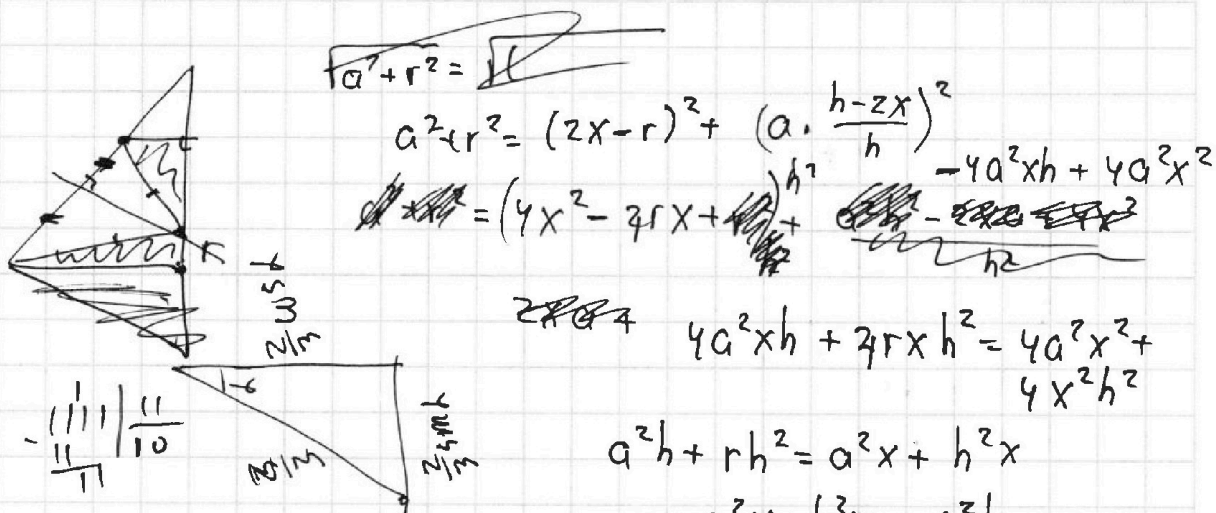


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a^2 + r^2 = \sqrt{h^2}$$

$$a^2 + r^2 = (2x - r)^2 + \left(a \cdot \frac{h - 2x}{h}\right)^2$$

$$\cancel{a^2} = (4x^2 - 4rx + r^2) + \frac{a^2(h^2 - 4hx + 4x^2)}{h^2}$$

$$4a^2xh + 4r^2xh^2 = 4a^2x^2 + 4x^2h^2$$

$$a^2h + rh^2 = a^2x + h^2x$$

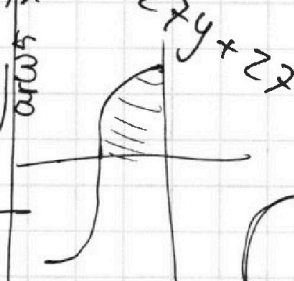
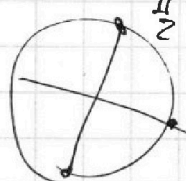
$$r = \frac{a^2x + h^2x - a^2h}{h^2}$$

$$(y+3)(y+3)(y+3) = y^3 + 9y^2 + 27y + 27$$

$$3x - y = 1 + 2k$$

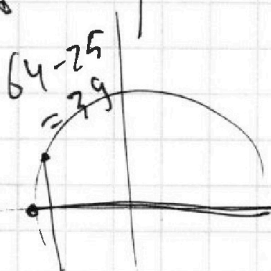
$$x + y = 1 + 2k$$

$$\arccos(x) + \arccos(y)$$



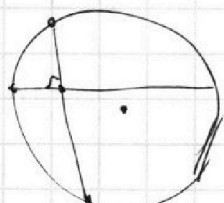
$$\frac{26 \cdot 4 \cdot \sqrt{39}}{5 \cdot 8}$$

$$x^2 - x - 46 = 0$$
$$(x - 7)(x + 6) = 0$$



$$\frac{h^2 + h - \sqrt{4h^2 - 1}}{h}$$

$$h^2 + 1 -$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

--- A: 9
 B: ~~828~~ 9 · 10 · 10 - 8 · 9 · 9

--- 8 9 5

$$\begin{array}{r} 1111 \cdot 0 \cdot B C \\ 4 \end{array}$$

C:

C : 11

$$\begin{array}{r} 11 \\ 22 \\ 33 \\ 44 \end{array}$$

11 · 101

$$\begin{array}{r} 1111 \cdot 11 \\ 11 \\ 1101 \end{array}$$

11B

$$\begin{array}{r} 101 \\ 202 \\ 303 \\ 404 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 505 \\ 606 \\ 707 \\ 808 \end{array}$$

909

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \rightarrow xy = (x-3)(y+3) \neq 0$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = (y+3)^3 - y^3 - 9y(y+3) = y^3 + 3y^2 + 9y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y$$

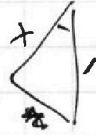
$$\begin{aligned} (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x &= (\cos 2\pi x + \cos 2\pi y) \cos \pi x \\ \sin^2 \pi x - \sin \pi x \sin \pi y &= \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y \\ -\cos(2\pi) \sin^2 \pi &= \cos^2 \pi - \sin \pi \sin \pi = \sin^2 \pi \\ \cos^2 \pi + 1 &= 2 \cos^2 \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(0-b) + \cos(2\pi) &= 0 \\ 2 \cos\left(\frac{0-b+2\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{0-b-2\pi}{2}\right) &= 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi-b}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\arccos \frac{x}{y} + \arccos \frac{y}{x} < 2\pi$$

< cos

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5555

n-й-классик

~~$\frac{C_{n-1}^3}{C_n^4}$ - вероятность выиграть~~

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{7}{2} \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x}$$

$$\frac{\frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_n^x}}{\frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}} = \frac{7}{2} \frac{\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}}{\frac{n!}{x!(n-x)!}}$$

$$\frac{12}{n(n-1)} = \frac{7}{2} \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$x(x-1) = 6 \cdot 7$$

$$(x=7)$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\frac{16}{5}} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{64^{10}}{25^3}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$(x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 9$$

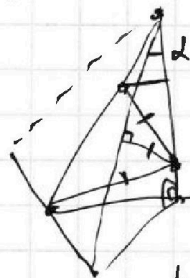
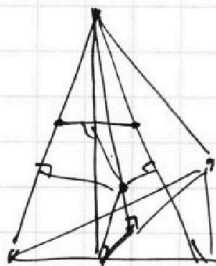
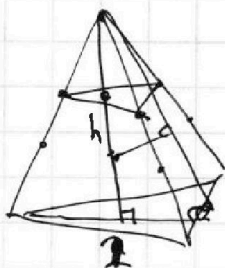
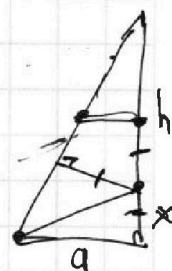
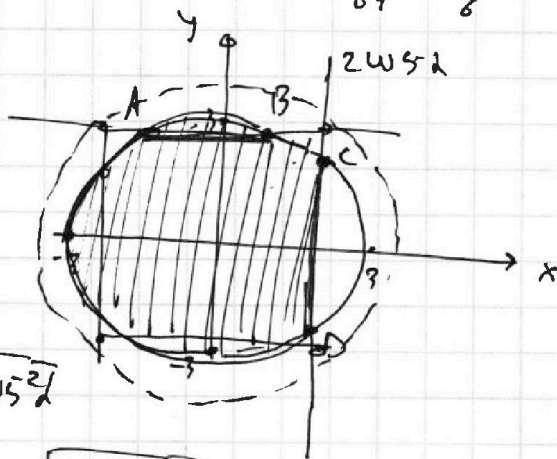
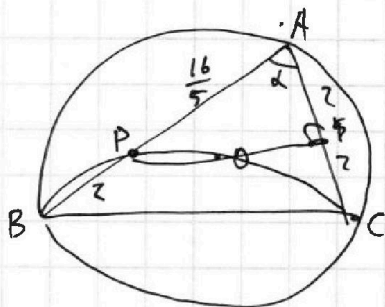
$$(2 \cos \alpha)^2 + (2 \sin \alpha)^2 = 4$$

$$x_A, x_B = 2 \cos \alpha$$

$$y_A, y_B = \pm \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{5 + \cos^2 \alpha}$$

$$x_C, x_D = 2 \cos \alpha$$

$$y_C, y_D = \pm \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{5 + \sin^2 \alpha}$$



$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{x}{h - x}$$

$$\frac{1}{\frac{h}{x} - 1}$$

$$\frac{h}{x} = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} + 1$$

$$2x = \frac{2h}{1 + \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a}} = \frac{2ha}{a + \sqrt{a^2 + h^2}}$$