



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) (y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111 \cdot a \quad \text{где } a \in \mathbb{N}, a < 10$$

$$1111 = 101 \cdot 11 \quad 101 - \text{простое}$$

$A \cdot B \cdot C : 101$ не в разл. A только 1-ая степень 101, но в разл. B и C должны ~~быть~~ сумма степеней 101 - нек. число

так C двузнач, то $C < 101$ $C : 101 = \text{натуральное}$

$\Rightarrow B : 101$, единственное 3-знач. число им. цифру

$$6 \text{ и } : 101 - 606$$

$$606 : 11 \Rightarrow C : 11 \quad C = 33 \text{ так}$$

в разл. числе A есть 1-ая степень 11

$$B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3^2 \Rightarrow \text{в разл. } A \text{ существует нек. степень 2 и чет степень 3}$$

все ~~натур.~~ натур. числа < 10 с

нек. степенью 2: $2; 6; 8$
еще с чет степенью 3: $2; 8$

$$A \in \{2; 8\} \quad B = 606 \quad C = 33 \quad - 2 \text{ варианта}$$

Ответ: 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} = \sqrt[2]{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}}, \quad x > 0, y > 0$$

$$\frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{xy} \quad \text{п.р.} \quad x > 0 \text{ и } y > 0, \text{ то}$$
$$x+y+5 > 0 \Rightarrow \neq 0$$

$\Rightarrow$ можно упростить выражение до

$$(x-2)(y+2) = xy$$

$$xy + 2x - 2y - 4 = xy \quad x = y + 2$$

$$x^3 = (y^2 + 4y + 4)(y+2) = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$$

$$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 - 6y^2 - 12y = 8$$

$$M = 8$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) \sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = \sin^2 \pi x + \cos^2 \pi x \cdot \cos^2 \pi y = \cos^2 \pi x$$

$$\frac{\cos(\pi x + \pi y) - \cos(\pi y - \pi x)}{-2} = \frac{\cos(\pi x + \pi y) + \cos(\pi y - \pi x)}{2} = \cos(2\pi x)$$

$$\cos(2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi y - \pi x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = y + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -y + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $3x = y + 2n, n \in \mathbb{Z}; x = -y + 2k, k \in \mathbb{Z}$

б) $E(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $D(\arcsin) = [-1; 1]$

нужно повернуть край

$\arcsin \Rightarrow x \in \{-6; -5; \dots; 5; 6\}$ $y \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ заметим что при

нечётном x $3x$ - неч. $2n, n \in \mathbb{Z}$ - чёт $\Rightarrow y$ - неч.

аналог. y - неч. x - неч. $\Rightarrow y$ - чёт.

аналогично y - чёт. x - чёт. $\Rightarrow y$ - чёт.

всего вар. $6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 33$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

не подходит ~~случае~~

$$\begin{cases} \arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ м.к. в ост. сл.}$$

одно из слог. $\leq \frac{\pi}{2}$ а другое $< \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ сумма $< \pi$

$x=6$ $y=2$ - не подходит

33 - 1 = 32 подк. комбинации

Ответ: 32



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

k - кол-во двенадцатиклассников a - новое число билетов, $a > 4$
пока было 4 билета:

общее число комб по 4 человека, ~~не~~ не учитывая которые
 $k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot (k-3)$; с Петей и Васей:

$4 \cdot 3 \cdot (k-2) \cdot (k-3)$ число комб каждой комб.
равно $4 \cdot 3 \cdot 2$ вер. комб с Петей и Васей

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot (k-2) \cdot (k-3) \cdot 2}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot (k-3) \cdot 2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{k \cdot (k-1)}$$

так в конце месяца вер. расчит. аналогично

$$\frac{a \cdot (a-1) \cdot (k-2) \cdot (k-3) \cdot \dots \cdot (k-a+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot (k-a+1)} = \frac{a(a-1)}{k(k-1)}$$

$$a^2 - a = 6 \cdot 12 \quad (a-9)(a+8) = 42, \text{ но}$$

$$\text{так } a \geq 4 \Rightarrow a = 9$$

Ответ: 9

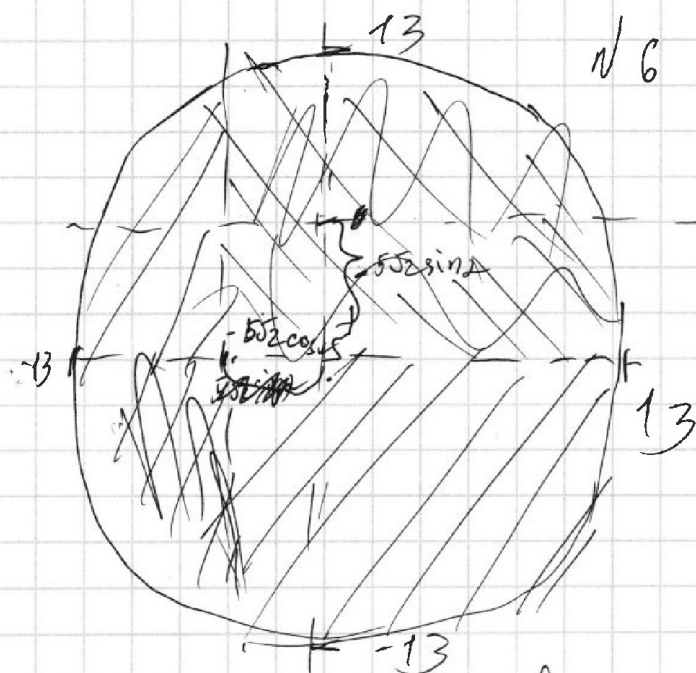


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$x^2 + y^2 \leq 169$ — внутренняя окружность

$C R = 13$ и 4 . $O(0,0)$

$(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0$ — 2 пр. корр.

одна $\parallel O_x$ др. $\parallel O_y$ через M .

$(0, -5\sqrt{2} \sin \alpha)$ и $(-5\sqrt{2} \cos \alpha, 0)$ соотв.

если выше горизонт. и левее верт.
либо ниже верт. и правее верт. —
первое — верт., второе — верт. на ~~оси~~

сумма прямых

пр. $\begin{cases} |x| \leq 13 \\ |y| \leq 13 \end{cases}$ $5\sqrt{2} \leq 13$ то M перес. пр.

$(-5\sqrt{2} \cos \alpha, -5\sqrt{2} \sin \alpha)$ лежат внутри
окр. $x^2 + y^2 \leq 169$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

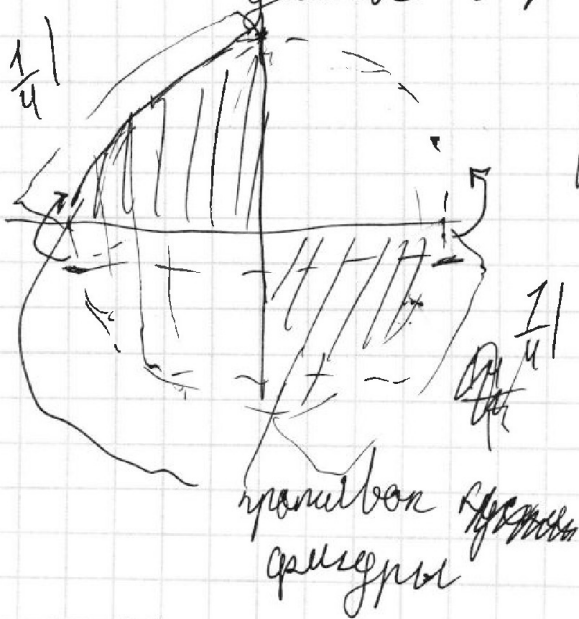
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

периметр фигуры состоит из 2 частей: ~~состоит~~ из отрезков краевых внутри окружности и куски окружности от оси отсекающих. Вспомог. зад.: есть окр.; отрезки перпен. внутри, сумма длин окр. в промывок ~~промежутках~~ (не им. общности); отрезки перпен. ~~к~~ ^{фигуры} ~~к~~ ^к ~~этим~~ ^{этим} отрезкам проходит через окр., тогда ~~эти~~ ^{эти} сумма этих длин — полн. длины окр.



1-й окр.

при сдвиге гориз. прямой вниз ~~эти~~ ^{эти} равные куски окр. перейдут из 1-ой пары промывок.

фигуры в ~~этих~~ ^{этих} ~~других~~ ^{других} и наоборот, сумма ~~ее~~ ^{ее} ~~из~~ ^{из} ~~аналог~~ ^{аналог} со сдвигом гориз. прямой вверх и верот в любые стороны, пока не перес. внутри окр.; в момент тогда перес. выйдет за окр. и не будет на ней, одна из фигур перестанет существовать



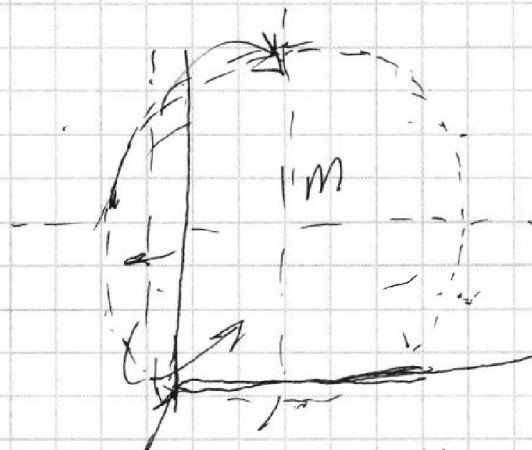
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пример



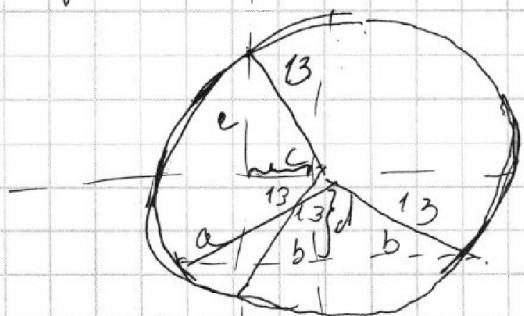
m - фигура в кот как
центр
мешу. верт. выво
передает куски окр.
в m

нет фигуры

м.к. в иск зад пр. пересек.
внутри окр. то шаровая дуга
кусков окружности, дм. гр. криволинейной
области - половина дм. окр.

$$= \frac{13^2 \pi}{2} = \frac{169 \pi}{2}$$

длины прямых отрезков c
a и b - половины
отрезков
 $c = -552 \cos d$



$$d = -552 \sin d$$

$$a = \sqrt{13^2 - 50 \cos^2 d}$$

$$b = \sqrt{13^2 - 50 \sin^2 d}$$

м. Пифагора

м. атт $2a + 2b = 2(a+b)$ м. $a > 0$
 $b > 0$ то чем больше ~~сумма~~ ~~не~~
кв их суммы, тем больше их сумма



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sqrt{169 - 50\cos^2 2} + \sqrt{119 + 50\cos^2 2}) - \max$$

$$288 + \sqrt{169 \cdot 119 + 2500\cos^2 2} - 2500\cos^4 2$$

$$169 \cdot 119 + 2500t - 2500t^2 \quad t = \cos^2 2$$

наибольшего, ~~т.е.~~ $t \in [0; 1]$

$$f(t) = 169 \cdot 119 + 2500t - 2500t^2$$

$$f'(t) = 2500 - 5000t = 5000\left(\frac{1}{2} - t\right)$$

$$\cos^2 2 = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

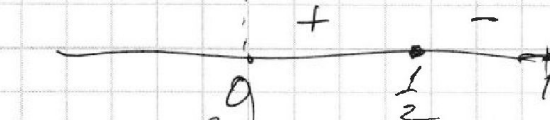
$$\cos 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 2 = 0$$

$$\cos 2 = 1$$

$$\cos 2 = -1$$



$$\cos 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 2 = 1$$

$$\cos 2 = -1$$

$$\sin 2 = 0$$

$$\cos 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 2 = 1$$

$$\cos 2 = -1$$

$$\sin 2 = 0$$

$$\sin^2 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$M_{\max} = \frac{169\pi}{2} + 2\sqrt{169-25} + 2\sqrt{169-25} = 84,5\pi + 48$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $M_{\max} = 84,5\pi + 48$; $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
 $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$



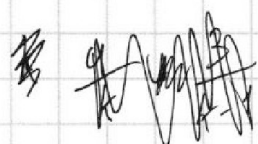
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = a \cdot 11 \cdot 101 \quad P = 6 \cdot 101 \quad C = 33$$



$$4 \cdot 3 \cdot \frac{(k-2)(k-3)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot (k-3)}$$

$$a \cdot (a-1) = 4 \cdot 3 \cdot 6 = 72 \quad a=9$$

$$\sin^2(\pi x) + (\sin \pi y - \sin \pi x) = \cos^2(\pi x) - (\cos \pi y - \cos \pi x)$$

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$$

$$\frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{xy}$$

$$xy = (x-2)(y+2)$$

$$2x - 2y - 4 = 0$$

$$x = y + 2$$

$$(y+2)^3 = (y^2 + 4y + 4) \cdot (y+2) = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$$

$$-y^3 - 6y^2 - 12y$$

$$\angle POC = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$$



$$\begin{cases} PO^2 = 25^2 + R^2 - 2 \cdot 25 \cdot R \cdot \cos 105^\circ \\ PO^2 = 15^2 + R^2 - 2 \cdot 15 \cdot R \cdot \cos 15^\circ \end{cases}$$

$$600 - 50R \sin 15^\circ = -10R \sin 105^\circ$$

$$600 - 50R \sin 15^\circ = -10R \sin 105^\circ$$

$$15 = R \cos 15^\circ$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x \stackrel{1}{=} \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos \pi y \cos \pi x - \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\cos \pi y \cos \pi x = \frac{\cos(\pi y + \pi x) + \cos(\pi y - \pi x)}{2}$$

$$\sin^2 \pi x + \cos(\pi y - \pi x) = \cos^2 \pi x$$

$$\cos(\pi y - \pi x) = \cos(2\pi x)$$

$$\begin{cases} \pi y - \pi x = 2\pi x + 2\pi n \\ \pi y - \pi x = -2\pi x + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 2n \\ y = -x + 2n \end{cases}$$

$$a \neq \sin \frac{x}{6} + \sin \frac{y}{2} < \pi$$

$$y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$\sin^2 x + \frac{\cos(\pi y + \pi x) - \cos(\pi y - \pi x)}{-2} + \frac{\cos(\pi y + \pi x) + \cos(\pi y - \pi x)}{2}$$

$$= \cos^2 \pi x$$

$$\cos(2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi y - \pi x + 2\pi n \\ 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = y + 2n \\ x = -y + 2n \end{cases}$$

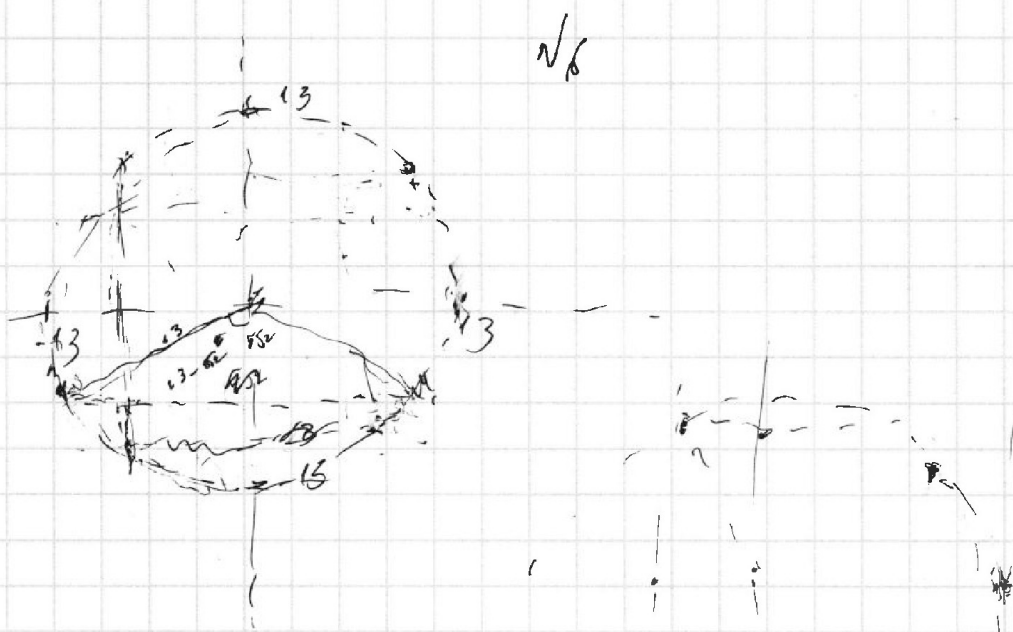


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} & 2 \cdot \left(\sqrt{169 - 50 \cos^2 2} - 50 \cos^2 2 \right) + \\ & + 2 \cdot \sqrt{169 - 50 \sin^2 2} \\ & \sqrt{169 - 50 \cos^2 2} + \sqrt{119 + 50 \cos^2 2} \cos^2 2 = t \\ & * \quad 288 + 2 \sqrt{119 - 169} \sqrt{32500t^2 + 502500t} \\ & \quad - 5000t + 2500 \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{119}}{\sqrt{119}} + \sqrt{119} = 24$$

$$t \in \left[0, \frac{1}{2} \right]$$