



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



✎ [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

✓✎ [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

• 3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

✓✎ [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

✓✎ [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

✎ [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $A = \overline{aaaa} = a \cdot \cancel{1111} \Rightarrow ABC : \cancel{1111}^2 = 11^2 \cdot 101^2$
т.к. это полный квадрат

2) 101 - простое число $\Rightarrow B : 101$ (т.к. с-двузначное, а $a < 10$)
↑
цифра

3) у B есть цифра 7 $\Rightarrow B = 707$ других вариантов нет

4) ~~переведем варианты а из числа А:~~

$a=1 \Rightarrow A = \cancel{1111}$

4) $B : \cancel{11} \Rightarrow C$ должно делиться на 11; C содержит цифру 1 $\Rightarrow C = 11$

5) Итак, $A \cdot B \cdot C = \underbrace{a \cdot 101 \cdot 11}_A \cdot \underbrace{707}_B \cdot \underbrace{11}_C = a \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7$ -

- это полный квадрат,
значит $a=7$

$A = 7777$

Ответ: (7777; 707; 11)

~~101~~
~~101~~
~~101~~
~~101~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x > 0, y > 0$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

↓

$$xy = (x-4)(y+4)$$

$$xy = \cancel{xy+4y} xy+4x-4y-16$$

$$4x-4y=16$$

$$\underline{x-y=4}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = 4(x^2 + y^2) - 8xy =$$

$$= 4(x^2 - 2xy + y^2) = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 16 = 64$$

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$\sin 2\pi y - \sin 2\pi x$~~

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cdot \cos \pi y$$

~~$\sin \pi y - \frac{1}{2}(\cos(\pi(y-x)) + \cos(\pi(y+x))) = \cos^2 \pi y + \frac{1}{2}(\cos(\pi(y+x)) + \cos(\pi(y-x)))$~~

$$\sin^2 \pi y + \frac{1}{2}(\cos(\pi(y+x)) - \cos(\pi(y-x))) = \cos^2 \pi y + \frac{1}{2}(\cos(\pi(y+x)) + \cos(\pi(y-x)))$$

$$\cos 2\pi y + \cos \pi(y-x) = 0$$

$$\cos 2\pi y = \cos(\pi(1-y+x))$$

$$\begin{cases} 2\pi y = \pi(1-y+x) + 2\pi n \\ 2\pi y = \pi(y-x-1) + 2\pi n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = x+1+2n \\ y = -x-1+2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x+1}{3} + 2n \\ y = -x-1+2n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

Подходим все пары чисел вида $(m; \frac{m+1}{3} + 2n)$ и $(m; -m-1+2n)$

где $m, n \in \mathbb{Z}$

$$b) \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{7} > \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{7} > \cos(\arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{x}{7} > \frac{y}{4}$$

$$O\Delta B: \\ 1) 0 < \frac{x}{7} < \pi$$

$$0 < x < 7\pi$$

$$2) -\frac{\pi}{2} < \frac{y}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$-2\pi < y < \pi$$

$$\text{Далее: } y = \frac{x+1}{3} + 2n : 4x > \frac{7}{3}x + \frac{7}{3} + 14n$$

$$x\left(\frac{19}{3}\right) > \frac{7}{3} + 14n$$

$$x > \frac{7+42n}{19}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть m - число одиннадцатиклассников, тогда в начале месяца вероятность попадания на концерт и Васи, и Пети будет:

$$p_1 = \frac{4}{m} \cdot \frac{3}{m-1}$$

Пусть n - число билетов выданных в начале года, тогда новая вероятность:

$$p_2 = \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m-1}$$

По условию задачи $p_2 = 11p_1$

$$\frac{4}{m} \cdot \frac{3}{m-1} \cdot 11 = \frac{n(n-1)}{m(m-1)}$$

$$n^2 - n = 132$$

$$n_1 = \underline{\underline{12}}$$

$$n_2 = -11 \text{ - негод, т.к. меньше нуля}$$

Ответ: 12 билетов

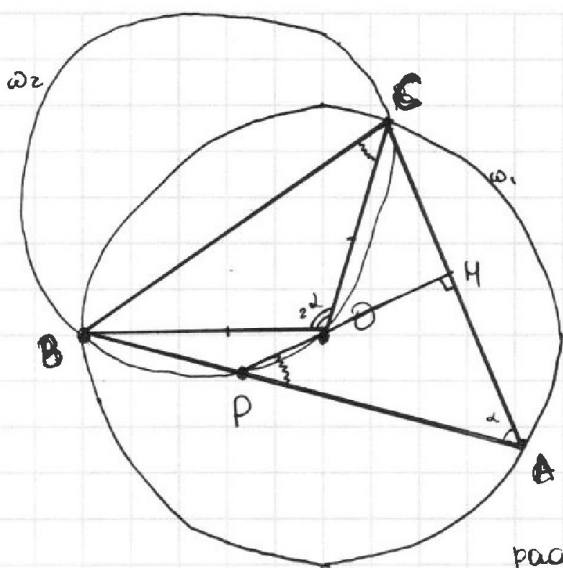


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$S_{ABC} = ?$$

$$AP = 16, BP = 8, AC = 22$$

Решение:

1) $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha$ (центральный угол, опирается на BC)

2) $\triangle BOC$ - равнобедренный, т.к. OB и OC - радиусы $\Rightarrow \angle BCO = \frac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$

3) Точки B, P, O, C лежат на $\omega_2 \Rightarrow \angle BPO = 180^\circ - \angle BCO = 90 + \alpha$

4) $\angle APO = 180^\circ - \angle BPO = 90 - \alpha$ - смежные

5) Продлим PO до пересечения с AC - точка H ; получим, что $\angle HPA = 90 - \alpha$; $\angle PAH = \alpha \Rightarrow \angle PHA = 90^\circ$;

6) Т.к. $PH \perp AC$ и $O \in PH \Rightarrow PH$ - серединный перпендикуляр к AC .
 $\Rightarrow AH = \frac{1}{2} AC = 11$

7) В $\triangle APH$ по г. Пифагора: $PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \sqrt{16^2 - 11^2} = \sqrt{5 \cdot 27} = 3\sqrt{15}$

$$\sin \alpha = \frac{PH}{AP} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$8) S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} (AP + BP) \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ -121 \\ \hline 135 \\ \uparrow 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ \hline 16 \\ \hline 256 \end{array}$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

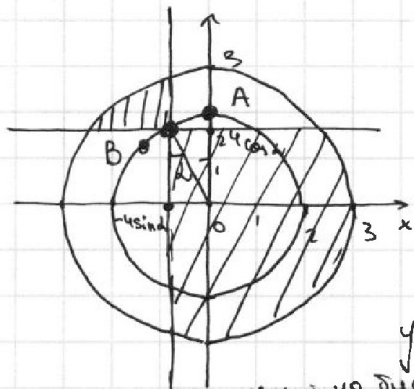
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+4\sin t)(y-4\cos t) \leq 0 & ① \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

окр. с центром $(0;0)$ и $r_1=6$

- ① точка с координатами $(4\sin t; -4\cos t)$ лежит на окр. с центром $(0;0)$ и $r_1=4$, а графиком будет 2 четверти полуокружности (нижняя правая и верхняя левая) отраженные относительно $x=-4\sin t$ и $y=4\cos t$



фигура $\Phi(t)$

С точки зрения симметрии максимум M (периметра Φ) будет ~~находиться~~

у фигур, образованной точкой и дугой из дуге AB (меньшей) ~~на дуге~~ Периметр фигур

состоит из 2-х дуг большей окружности и 2-х пересекающихся прямых, причем из-за симметрии длины дуг всегда равны $\pi r_2 = 6\pi$ (половина длины окр.). Значит периметр фигур зависит только от длин 2-х прямых. ~~и длины~~ Сумма их длин монотонно изменяется на промежутке от B до A . Рассмотрим 2 крайних положения:

- 1) $\alpha = 45^\circ$ (точка B): длина прямых равна в силу симметрии и равна $4 \cdot \sqrt{36 - (2\sqrt{2})^2} = 4 \cdot \sqrt{28} = 8\sqrt{7}$
- 2) $\alpha = 0^\circ$ (точка A): одна из прямых диаметр, а длина второй равна $2 \cdot \sqrt{36 - 16} = 4\sqrt{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

6

☒

7

☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сравним величины в 1-ом и 2-ом случаях

$$1) > 2)$$

$$8\sqrt{7} > 4\sqrt{5}$$

$$\sqrt{7 \cdot 64} > \sqrt{5 \cdot 16}$$

$\Rightarrow$ Максимум M будет при $d = 45^\circ$
и равен $8\sqrt{7} + 6\pi$

из симметрии нам

Ответ: $8\sqrt{7} + 6\pi$, $d = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi \cdot n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

подходит $d = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$O, u_1 = \sqrt{r^2 - a^2}$$

$$O, u = \sqrt{r^2 - b^2}$$

$$uu = \sqrt{a^2 + u_1^2} = \sqrt{a^2 + uab}$$

$$uu^2 = \underbrace{a^2}_{NM} + \underbrace{b^2}_{NM} - 2 \cdot \underbrace{a}_{NM} \cdot \underbrace{b}_{NM} \cdot \cos d$$

$$\cos d = \frac{a^2 + uab - a^2 - 2ab - b^2 - b^2}{-2b \cdot (a+b)} = \frac{b^2 - ab}{b(a+b)}$$

$$= \frac{b-a}{a+b}$$

$$\sin d = \sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow \cos d = \sqrt{1 - \frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{b}} = \frac{b-a}{a+b}$$

находим отношение a и b и ищем угол

$$\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b-a}}{a+b}$$

$$a+b = \sqrt{b^2 - a^2}$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = b^2 - a^2$$

$$2a^2$$



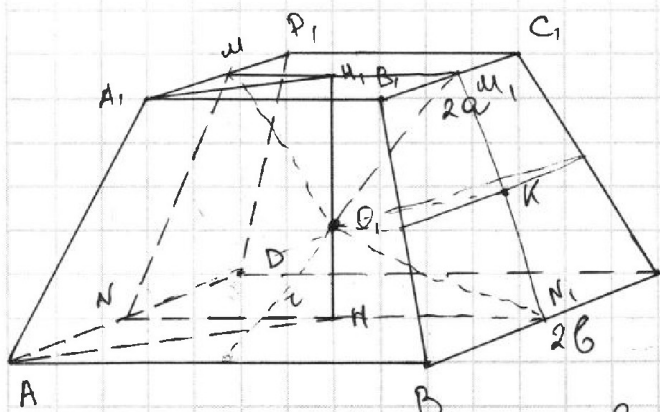
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть сторона верхнего основания $2a$, а нижнего $2b$ (это квадрат, т.к. пирамида правильная)

2) Рассмотрим прямоугольную трапецию MN, MN : $MN_1 = a$,

$NH = b$; M - середина A_1P_1 , N - середина AD .

В этой плоскости шар ω касается ~~сферы~~ грани AA_1P_1D : $OR = OM_1 = ON$ - радиусы; $NR = NH = b$ (касательные из 1-ой точки N), аналогично $MR = MN_1 = a$. Перенесём MN , параллельно b т. $M \rightarrow M_1$: $M_1N_1 = MN$, $z = \sqrt{MN^2 - M_1N_1^2} = \sqrt{(a+b)^2 - (b-a)^2} = 2\sqrt{ab}$ -

- высота усечённой пирамиды

3) Рассмотрим грань AA_1P_1 и найдём AA_1 :

$$AA_1 = \sqrt{MN^2 + (b-a)^2} = \sqrt{ab + b^2 + ab + a^2} = \sqrt{(a+b)^2 + b^2} = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

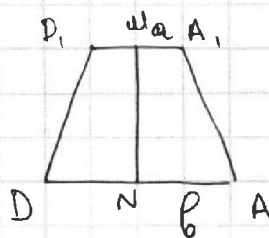
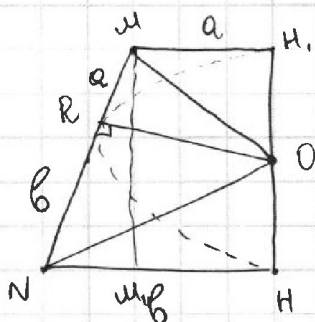
4) ~~Рассмотрим~~ MN, A_1A $\angle MN_1 = \alpha$ - искомым

Рассмотрим MN, N, N : $S_{MN, N, N} = \frac{1}{2} \cdot MN_1 \cdot 2(a+b) = 2(a+b)\sqrt{ab}$

$$S_{MN, N, N} = MN \cdot NN_1 \cdot \sin \alpha = (a+b) \cdot 2b \cdot \sin \alpha = 2(a+b)\sqrt{ab}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{b}$$

$$5) O_1K = \sqrt{ab}; z = \sqrt{ab + \frac{a^2 + b^2}{2} + ab} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + 4ab}{2}}$$





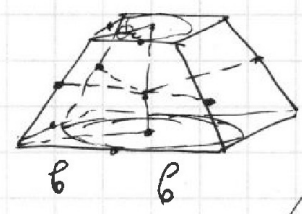
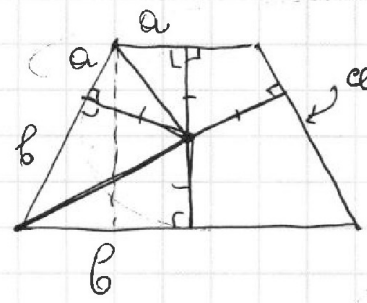
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

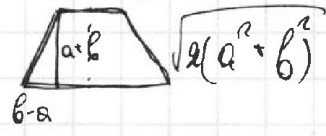
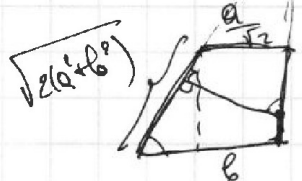
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновики

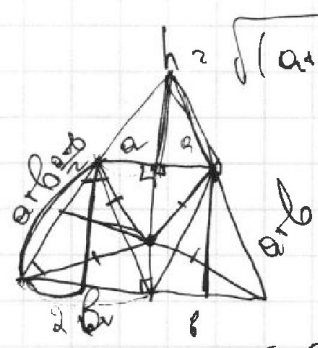


сторона ус. и.



$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2}} \cdot \frac{b-a}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3a^2 + 2ab + 3b^2}{2}}$$



$$S = \frac{1}{2}h \cdot (2a + 2b) = h(ab)$$

$$\frac{3a^2 + 3b^2 + 2ab}{2} = 4ab$$

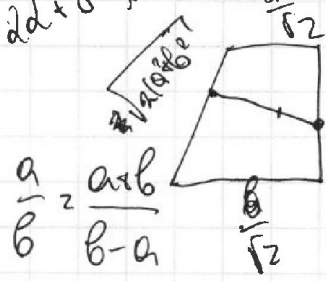
$$2\sqrt{ab}(a+b)$$

$$\frac{3a^2 + 3b^2 - 6ab}{2} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{3a^2 + 3b^2 - 6ab}{2} = 0$$

$$(a\sqrt{3} - b\sqrt{3})^2 = 0 \quad \text{and} \quad \sin d = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$a^2 + x^2 = b^2 + y^2 \quad x + y = 2\sqrt{ab}$$

$$2a + 2b = 4 \cdot 10 \quad \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 2$$



$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot b}{b - a}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{y^2 - b^2} = h$$

$$S = 2 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{h}{2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

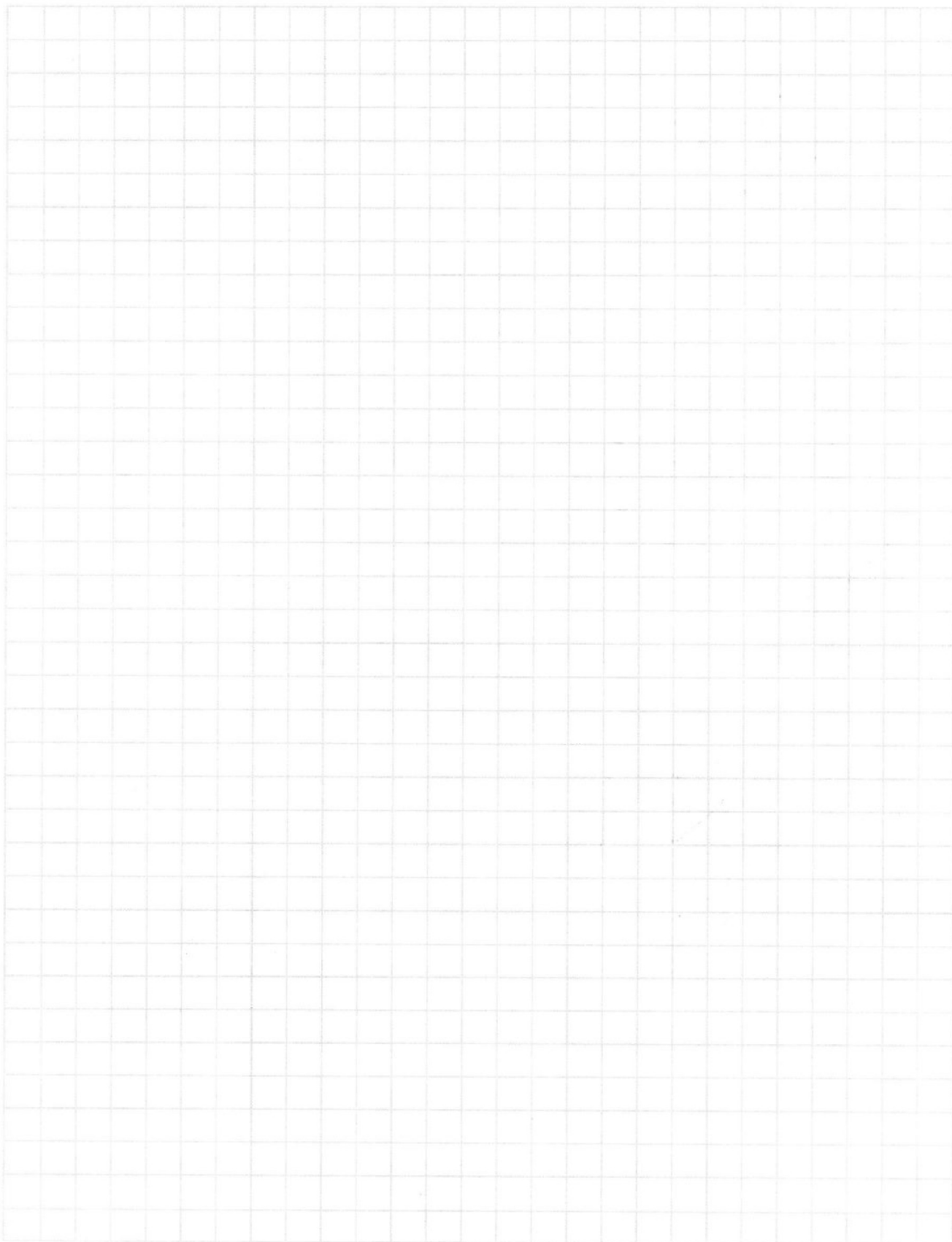
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



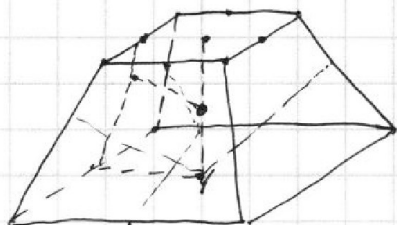


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

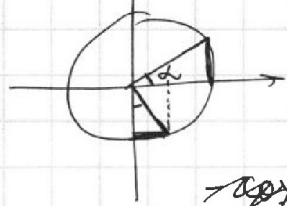
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~чертеж~~



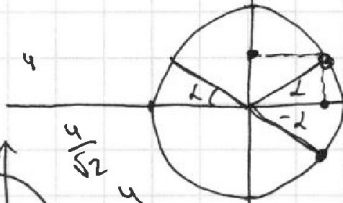
~~чертеж~~

Чертежи

$$\cos(30^\circ - 90^\circ) = \cos - 60^\circ = \cos 60^\circ = \sin 30^\circ$$

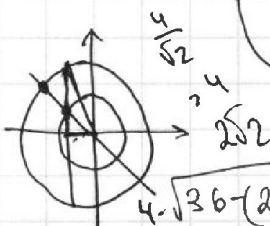
$$\sin(30^\circ - 90^\circ) = \sin - 60^\circ = -\sin 60^\circ$$

$$\sqrt{20} \quad (x + 4 \sin d)(y - 4 \cos d) \leq 0$$



$$\begin{aligned} \cos d &= \cos(-d) \\ -\cos d &= \cos(\pi - d) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x > -4 \sin d \\ y < 4 \cos d \\ x < -4 \sin d \\ y > 4 \cos d \end{cases}$$



$$x^2 + y^2 = 36$$

$$x^2 = 32$$

$$x^2 = 16 \cdot 2$$

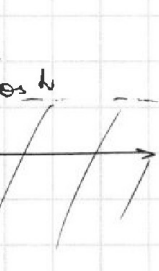
$$x = 4\sqrt{2}$$

$$12\sqrt{2}$$

$$6 + \cos(d - 90^\circ) = \cos(90^\circ - d) = \sin d$$

$$12\sqrt{2} < 8\sqrt{2} + 6$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{32}} < \frac{6}{\sqrt{36}}$$

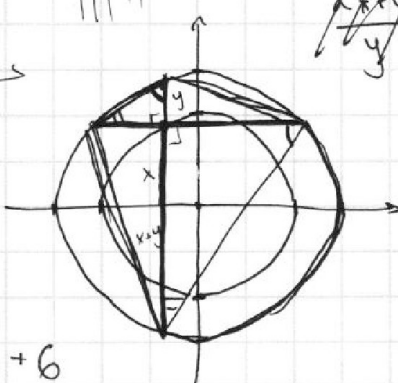


$$16 \cos^2 + 16 \sin^2$$

$$7 + 42n = 19$$

$$6 \cdot \cos d \cdot 2$$

$$8\sqrt{2} + 6$$



$$\frac{x+y}{y} = 7$$