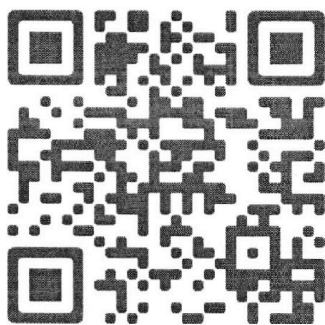




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- 3
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

4. Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что т.к. A состоит из одинаковых цифр и четырехзнач., то $A = 1111 \cdot k$, где $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$

$$A = 11 \cdot 101 \cdot k$$

Т.к. $A, B, C \in \mathbb{N}$ и $A \cdot B \cdot C$ — точный квадрат, то все простые входят в разложение числа $A \cdot B \cdot C$ в четной степени, т.к. в числе A 11 и 101 простые, а $k < 11 < 101$, то в разложении $B \cdot C$ тоже должно быть хотя бы по одному множителю 11 и 101 .

Поскольку C — двузначное (т.е. $C < 101$), то 101 входит в B , но поскольку B трехзначное и содержит единицу в своей записи, то B в точности 101 . Т.е. $A = 11 \cdot 101 \cdot k$, $B = 101$

Тогда $A \cdot B \cdot C$ содержит в своем разложении 11 , а поскольку C имеет в своей записи цифру 5 , то $C = \cancel{11} \cdot 5 = 55$, т.е. $A = 101 \cdot 11 \cdot k$, $B = 101$, $C = 55$

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 101 \cdot 5 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5k, \text{ т.е. } k = 5$$

т.е. $A = 5555$, $B = 101$, $C = 55$

Ответ: $(5555, 101, 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(y+3)(x-3)}, x, y > 0, x \neq 3$$

$$\frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} + \frac{1}{xy} = \frac{y+3}{(x-3)(y+3)} + \frac{(x-3)}{(x-3)(y+3)} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

Заметим что $x+y+1 > 0$, т.е. равенство дробей означает равенство знаменателей (т.к. числитель равен и не ноль)

$$xy = (x-3)(y+3); \quad 3x - 3y - 9 = 0; \quad x - y - 3 = 0$$

$$x = y + 3; \quad M = x^3 - y^3 - 9xy = (y+3)^3 - y^3 - (y+3)y =$$

$$= y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - y^2 - 3y = 8y^2 + 24y + 27, \quad f(y) = 8y^2 + 24y + 27$$

Парабола ветви вверх, т.е. минимум достигается в вершине $\frac{-24}{8 \cdot 2} = -\frac{3}{2} = -1,5$, т.к. $y > 0$, то $8y^2 + 24y + 27$ возрастает правее вершины, а значит

$$M \in (f(0); +\infty), \quad M \in (27; +\infty)$$

Ответ: $M \in (27; +\infty)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В остальных случаях $\arccos \alpha + \arccos \beta < 2\pi$
т.е.

$$x \in \{-4; -3; \dots; 3; 4\}$$

$$y \in \{-9; -8; \dots; 8; 9\}$$

$$\begin{cases} \arccos(\frac{x}{4}) \neq \pi \\ \arccos(\frac{y}{9}) \neq \pi \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} x \neq 4 \\ y \neq 9 \end{cases}$$

$$(x, y) = \begin{cases} (1+2k-a, a) \\ (b; 3b-1-2n) \end{cases} \quad k, n, a, b \in \mathbb{Z}$$

Рассм $x=4$, тогда $y \neq 9$ и y нечетн.

$$x = 1+2k-a = 4 \Rightarrow a = 1+2k-4 = 2k-3, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{т.е. } y = a \in \{-9; -7; -5; \dots; 7\} \quad \begin{matrix} k=3 & k=2 & k=1 & k=5 & k=6 \end{matrix} \quad (9 \text{ пар})$$

Заметим, что для остальных четных x аналогично можно подобрать k , так, чтобы y было любым нечетным из $[-9; 9]$ (10 пар)

Рассм $x=3$, тогда y четный

$$x = 3 = 1+2k-a \Rightarrow a = 2k-2, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{т.е. } y = a \in \{-8; \dots; 8\}$$

Аналогично для любых нечетных x можно подобрать k так, чтобы $y = a \in [-8; 8]$ (10 пар)

$$\text{тогда суммарно пар } 9 + 10 \cdot 4 + 9 \cdot 4 = 85$$

$x=4$ $x \equiv 0 \pmod{4}$ $x \equiv 1 \pmod{2}$

Ответ: а) См решение "Ответ на пункт а"
б) 85



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin(\pi x) - \sin(\pi y)) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2(\pi x) - \sin(\pi y) \sin(\pi x) = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi x) = \cos(\pi y) \cdot \cos \pi x + \sin(\pi y) \cdot \sin(\pi x)$$

$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$0 = \cos(2\pi x) + \cos(\pi y - \pi x)$$

$$0 = 2 \cos\left(\frac{2\pi x + \pi y - \pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi x - \pi y + \pi x}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ 3x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2k - y, k \in \mathbb{Z} \\ y = 3x - 1 - 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ подставляем порою x, y является

$$\begin{cases} (1 + 2k - a, a) \\ (b, 3b - 1 - 2n) \end{cases}$$

$k, n \in \mathbb{Z}$ Ответ на пункт а

$$b) \arccos \frac{x}{y} + \arccos \frac{y}{x} < 2\pi, x, y \in \mathbb{Z}$$

$$(x, y) = \begin{cases} (1 + 2k - a, a) \\ (b, 3b - 1 - 2n) \end{cases}$$

$k, n, a, b \in \mathbb{Z}$, заметим, что (x, y) разное четность

аргумент $\arccos \in [-1; 1]$ т.е. $\frac{x}{y}, \frac{y}{x} \in [-1; 1]$

т.е. $x \in \{-4, -3, \dots, 3, 4\}; y \in \{-8, -8, \dots, 8, 8\}$

$\arccos(2) \in [-\pi; \pi]$ т.е. $\arccos(a) + \arccos(b) = 2\pi$

только при $\arccos 2 = \pi = \arccos 2$

См. см. см.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть количество мальчиков x , билетов стало больше на y , $x, y \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$

• В начале месяца: Вер-ть того, что Петя и Вова оба пойдут на концерт $\frac{4}{x} \cdot \frac{4-1}{x-1} = \frac{12}{x(x-1)}$

• В конце месяца: Вер-ть того, что Петя и Вова оба пойдут на концерт $\frac{4+y}{x} \cdot \frac{4+y-1}{x-1} = \frac{(4+y)(3+y)}{x(x-1)}$

Из условия задачи известно, что

$$\frac{12}{x(x-1)} \cdot 3,5 = \frac{(4+y)(3+y)}{x(x-1)} \quad | \cdot (x-1)x \neq 0$$

$$42 = (4+y)(3+y) ; y^2 + 7y - 30 = 0 ; (y+10)(y-3) = 0$$

т.к. $y \in \mathbb{N}$, то $y = 3$

Тогда всего билетов стало $4+3=7$

Ответ: 7



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

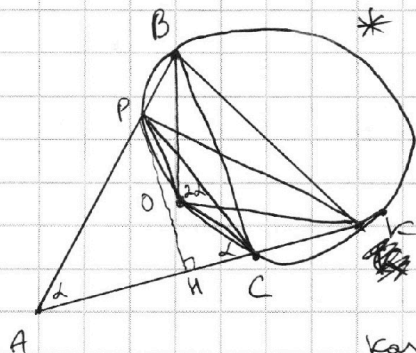
$\triangle ABC$

$$AP = \frac{16}{5}$$

$$BP = 2$$

$$AC = 4$$

$$S_{\triangle ABC} = ?$$



Решение:

$$\angle BAC = \alpha$$

$$\text{тогда } \angle BOC = 2\alpha$$

как центральный

$$\angle BOC = \angle BPC = 2\alpha$$

т.к. опир. на $\widehat{BC}$

$$\angle CPA = 180 - 2\alpha$$

как смежные $\angle BPC$

$$\text{Рассм. } \triangle APC \angle A = \alpha$$

$$\angle APC = 180 - 2\alpha, \text{ тогда } \angle PCA = \alpha$$

т.к. сумма углов $\triangle = 180^\circ$

т.е. $\triangle APC$ - р/б $AP = PC = 3,2$

$$\text{По т.к. } \cos \angle PCZ = \frac{AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot AC \cdot \cos \alpha}{PC^2}$$

Опустим высоту (мед./бисекс) PH ; $AH = HC = \frac{AC}{2} = 2$

$$\sin(\alpha) = \frac{AH}{AP} = \frac{\text{прим. катет}}{\text{гипотен.}} = \frac{2}{3,2} = 1,6$$

$$\text{Тогда } S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot \sin \alpha \cdot AC}{2} = \frac{(AP + PB) \cdot 1,6 \cdot 4}{2} =$$

$$= 5,2 \cdot 1,6 \cdot 2 = 7,2 \cdot 3,2 = 16,64$$

* На чертеже отмечена "лишняя точка" K . Она никак не используется в решении, ее существование и местоположение отн. других точек - невозможно.

Ответ: 16,64

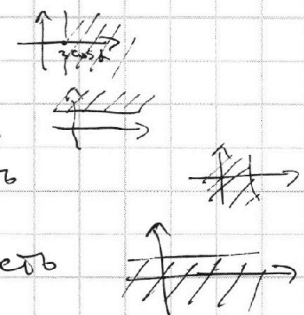


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

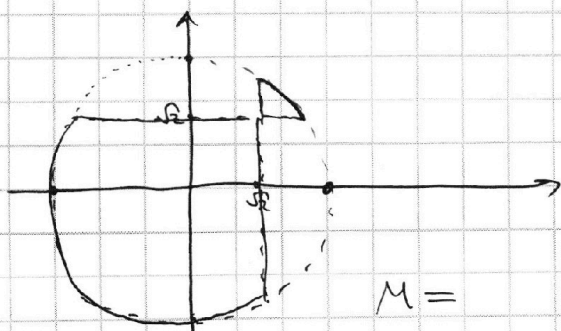
СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases} - \text{круг с ц. } (0,0) \text{ и } R=3$$
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 - \text{круг} \\ x = 2\cos\alpha - \text{прямая} \\ y = 2\sin\alpha - \text{прямая} \\ \begin{cases} x > 2\cos\alpha - \text{полуплоскость} \\ y > 2\sin\alpha - \text{полуплоскость} \\ x < 2\cos\alpha - \text{полуплоскость} \\ y < 2\sin\alpha - \text{полуплоскость} \end{cases} \end{cases}$$


Рассм $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ $2\sin\alpha = 2\cos\alpha = \sqrt{2}$

Найдем M для $\Phi(\frac{\pi}{4} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$



$\alpha \neq \beta$ only симметрично
линейно для $\sin\alpha = \cos\alpha$
Решим задачу макс
т.е. $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$
 $\alpha = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y > 0; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(y+3)(x-3)}$$

$$\frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} + \frac{1}{xy} = \frac{y+3}{(x-3)(y+3)} + \frac{x-3}{(x-3)(y+3)} + \frac{1}{(y+3)(x-3)} \Rightarrow$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\textcircled{\text{I}} \quad x+y+1=0, \text{ т.е. } y=-1-x$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = x^3 + (1+x)^3 + 9x(1+x) =$$

$$= x^3 + 1 + 3x + 3x^2 + x^3 + 9x + 9x^2 = 2x^3 + 12x^2 + 12x + 1$$

$\exists f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 12x + 1$, найдем обл. значений для $x > 0, x \neq 3$

$$f'(x) = 6x^2 + 24x + 12 = 6(x+2-\sqrt{2})(x+2+\sqrt{2})$$

Найдем ~~макс~~ при каждом промежутке возрастания $f(x)$

Метод интервалов $\frac{+}{-2-\sqrt{2}} \quad \frac{-}{-2+\sqrt{2}} \quad \frac{+}{0} \quad \frac{+}{3}$, т.е.

при $x > 0$, $f(x)$ - возр. т.е. $f(x) \in \{f(0); +\infty\} / \{f(3)\}$

$$f(0) = 1, \quad f(3) = 199, \text{ т.е. } f(x) \in (1, 199) \cup (199; +\infty)$$

$$\textcircled{\text{II}} \quad \del{x y = (x-3)(y+3)} \quad xy = (x-3)(y+3)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть однихадоутихмассивов x , а билетов стоиобильне

x, y , $x, y \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$

$$12 \cdot 3,5 = 6 \cdot 2 \cdot 3,5 - 6 \cdot 7 = 36 + 6 = 42$$

Вер-ть того что Петя и Васа ~~в начале~~

~~в начале~~ ^{оба} побудт ~~на~~ ^{в начале месяца} концерт: $\frac{4}{x} \cdot \frac{4-1}{x-1} = \frac{12}{x(x-1)}$

Вер-ть ~~того~~ того что Петя и Васа в конце

месяца

$$u_2 = (1+y)(3+y)$$

$$u_2 = 12 + 7y + y^2$$

$$y^2 + 7y - 30 = 0$$

$$D = 49 + 4 \cdot 30 = 169 = 13^2$$

$$y_1 = \frac{-7-13}{2} = -10$$

$$y_2 = \frac{-7+13}{2} = 3$$

~~sin(x) = 2 sin(x/2) cos(x/2)~~

$$\sin(x) = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$$

~~sin(x) = 2 sin(x/2) cos(x/2)~~

~~sin^2(x) - sin(x) sin(y)~~

$$a = x, b = y; \quad \sin^2 a - \sin b \cdot \sin a = \cos^2 a + \cos b \cdot \sin a$$

$$\sin^2 a - \cos^2 a = \cos b \sin a + \sin b \cos a$$

sin



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

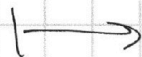
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№9

Билеты: 4

Люди: x



Билеты: $4+y$

Люди: x

Р. Пет. В.

~~$\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}$~~

~~$\frac{12}{x(x-1)} \cdot 3,5 = \frac{(4+y)(3+y)}{x(x-1)}$~~

$x=4$

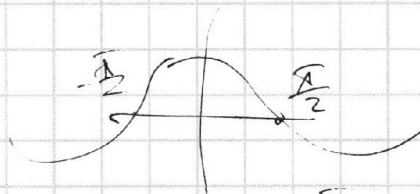
$\frac{4}{4} \cdot \frac{3}{3}$

$\cos \alpha + \cos \beta = ?$

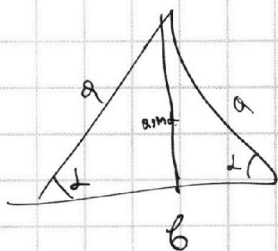
~~$2 \cos$~~

$2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\alpha = \beta \quad 2 \cos(\alpha) \cos 0$



$\frac{\pi}{2} + \pi k$



$\frac{\pi k + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\pi x + \pi y = \pi + 2\pi k$

$x + y = 1 + 2k$

$9,5 + \infty$

85

$2k-3=1$

$-8 -7 -5 -3 -1 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9$

$-8 -6 -4 -2 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8$

$-4 -3 -2 -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M^7 \quad (A; B; C) \quad M^7 \quad \left| \begin{array}{l} \cos \alpha + \cos \beta \\ A \in \{1111, \dots, 9999\}, \text{ т.е. } A = 1111 \cdot k, k \in \{1, \dots, 9\} \\ B \in \{\overline{ab1}, \overline{a1b}, \overline{1ab}\} \\ C \in \{\overline{a5}, \overline{5a}\} \\ ABC = n^2 \end{array} \right.$$

$$A = 1111 \cdot k = 11 \cdot 101 \cdot k \quad \alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$B = 101$$

$$A = 11 \cdot 101 \cdot k$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$0 = \sin \alpha \sin \beta \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot 2$$

$$ABC = 101^2 \cdot 11 \cdot k \cdot C = n^2$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot 2 = 1$$

$$11 \cdot k \cdot C = m^2$$

$$C = 11 \cdot l, l = 5 \Rightarrow k = 5$$

$$k \cdot l =$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \quad x, y > 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x^3 - y^3 - 8xy$$

$$\left. \begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array} \right\} 1 + \frac{2}{y} = \frac{1}{-2} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{-2(y+3)}$$

$$1,5 = \frac{2}{y} + \frac{1}{y+3} - \frac{1}{2y+6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(y+3)(x-3)} \quad (y+3)^2(y+3) =$$

$$f(x, y) = f(x-3, y+3)$$

$$x^3 - y^3 - 8xy$$

$$(y^2 + 6y + 9)(y+3) =$$

$$(y^3 + 6y^2 + 9y + 27)$$

$$(1+x)(1+x) = (1+2x+x^2)(1+x)$$

$$= (1+2x+x^2+x+2x^2+x^3)$$

$$(1+3x+3x^2+x^3)$$

$$\frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} + \frac{1}{xy} = \frac{1+x+y}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(y+3)(x-3)}$$

$$\frac{1+x+y}{xy} = \frac{1+x+y}{(y+3)(x-3)}$$

$$\text{I} \quad 1+x+y=0 \quad (x \neq 3 \quad y, x > 0)$$

$$x \in \mathbb{Z} - y; \quad M = x^3 - (-1-x)^3 - 8x(-1-x) \rightarrow$$

$$y = -1-x$$

$$= x^3 + \dots + \dots$$

$$= x^3 + (1+x)^3 + 8x(1+x) =$$

✓

$$\text{II} \quad xy = (y+3)(x-3); \quad 0 = -3y + 3x - 9$$

$$x - y - 3 = 0; \quad x = y + 3$$

$$6x^2 + 24x + 2 = 0$$

$$x^2 + 4x + 2 =$$

$$= (x+2)^2 - 2 =$$

$$= (x+2-\sqrt{2})(x+2+\sqrt{2})$$

$$D = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$54 + 36 = 90$$

$$198 \quad 199$$

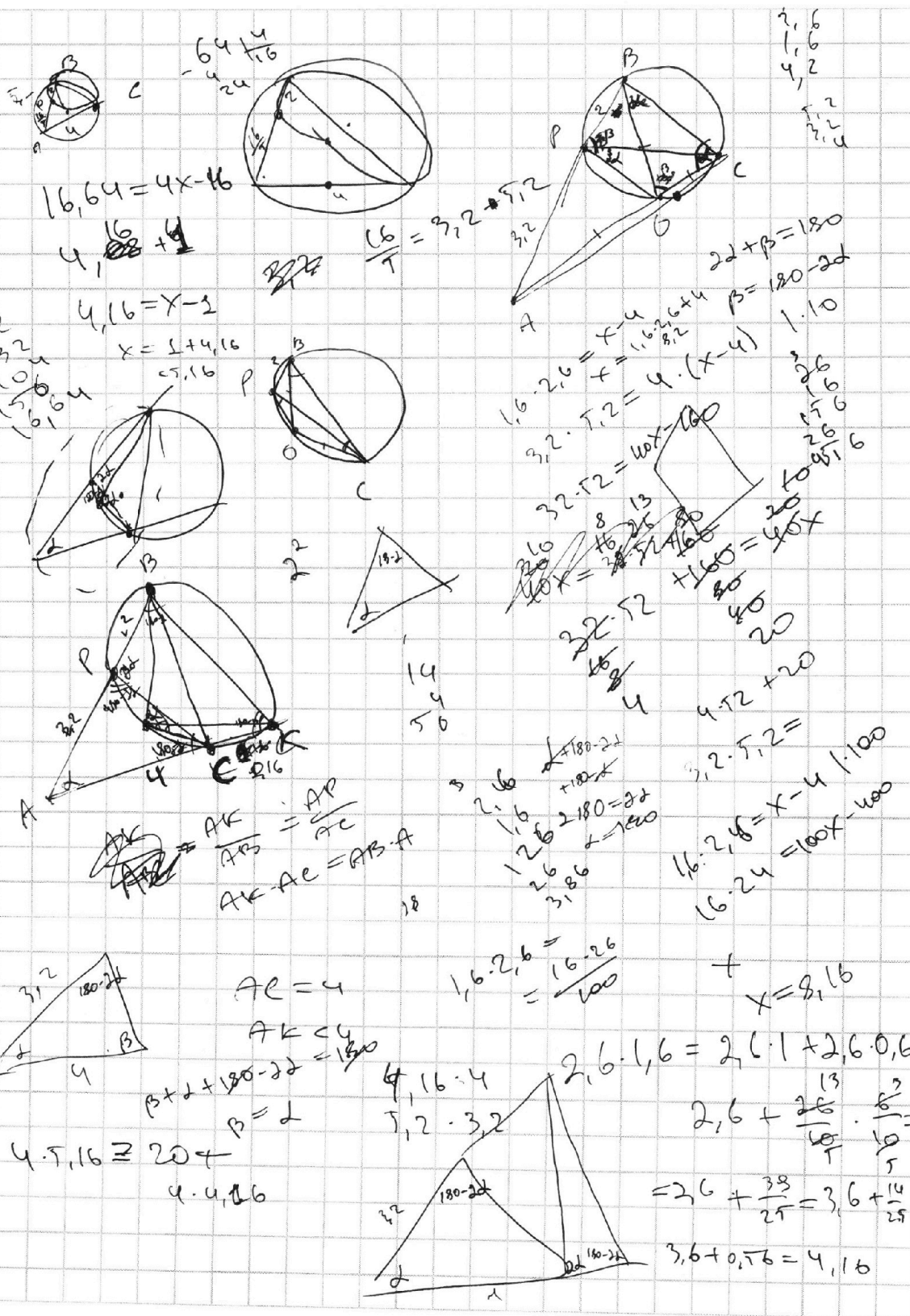
$$f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 12x + 1$$

$$f(3) = 2 \cdot 27 + 12 \cdot 9 + 12 \cdot 3 + 1$$

$$(y+3)^3 = (y^2 + 6y + 9)(y+3) =$$

$$= (y^3 + 6y^2 + 9y + 3y^2 + 18y + 27) =$$

$$= y^3 + 9y^2 + 27y + 27$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

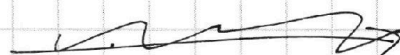
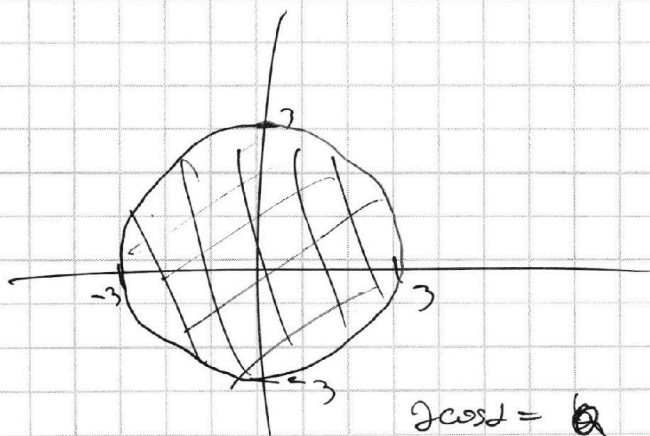
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases} \quad \text{отр. круг}$$

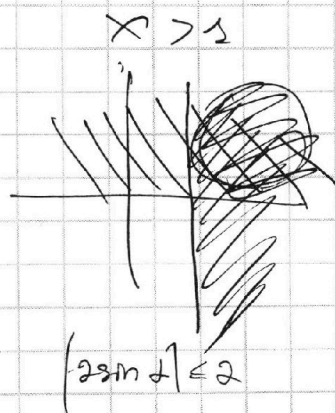


$$\begin{cases} x = 2 \cos \alpha \\ y = 2 \sin \alpha \\ \begin{cases} x > 2 \cos \alpha \\ y < 2 \sin \alpha \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \cos \alpha \\ y > 2 \sin \alpha \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2 \cos \alpha &= a \\ 2 \sin \alpha &= b \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x > a \\ y > b \\ \begin{cases} x < a \\ y < b \end{cases} \end{cases}$$

1
0



$$2 \sin \alpha = 2 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\frac{2a}{2 \sqrt{1 - a^2}}$$

