



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
  - $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 2, а  $y$  — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 6xy$ .
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$ .
- б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 25$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 35$ .
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$A$  - число из 4 одинак. цифр. Т.е.  $A = 1111 \cdot k$ , где  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \in [1; 9]$

$A = 1111k = 11 \cdot 101k$ . Заметим, что 11, 101 - простые. ( $> 3$ ;  $k \neq 11, 101$ )

Тогда если  $ABC = n^2$ ,  $BC = 101^2 \cdot 11^2 \cdot r^2$ .

Т.к. 101 - 3-зм.,  $C$  не может быть  $\div 101$ . Тогда  $13 \div 101$

$B = 101d$  <sup>d-цифра</sup> при этом в  $B$  есть цифра 6.

Значит, единственное возможное  $B = 606$

Тогда  $ABC = (11 \cdot 101 \cdot k) \cdot 606 \cdot C = 101^2 \cdot \underbrace{11 \cdot 6 \cdot k \cdot C}_{\substack{\text{"2"} \\ \text{"m"}^2}}$

Т.к.  $11 \cdot 6 \cdot k \cdot C$  является т.к. квадратом и  $k$  - цифра

$C \div 11$ ;  $C = 11z$ , и т.к. в  $C$  есть цифра 3

единственно возможное  $C = 33$

$ABC = (11 \cdot 101 \cdot k) \cdot (101 \cdot 6) \cdot (11 \cdot 3) = 11^2 \cdot 101^2 \cdot \underbrace{2 \cdot k}_{\substack{\text{"2"} \\ \text{"m"}^2}}$

Получим, что  $2k$  явл. т.к. квадратом.

Очевидно, что т.к.  $k$  - цифра возможны 2 вар:  $k=2$  и  $k=8$

Тогда существуют 2 таких тройки чисел:

$(2222; 606; 33)$  и  $(8888; 606; 33)$

Ответ:  $(2222; 606; 33); (8888; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$\text{Имеем: } K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

Приведем к 1 знамен. левую и правую части

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{(y+2)+(x-2)+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\begin{aligned} x, y &\neq 0 \\ x &\neq 2 \\ y &\neq -2 \end{aligned}$$

Тогда возможны 2 варианта:

$$1) \quad x+y+5=0$$

$$y = -x-5$$

$$M = x^3 + (-x-5)^3 + 6x(-x-5) = x^3 - x^3 - 15x^2 - 75x - 125 - 6x^2 - 30x = -21x^2 - 105x - 125$$

$$x^3 + (-x-5)^3 + 6x(-x-5) = 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$$

$$x^3 + (-x-5)^3 + 6x(-x-5)$$

~~тогда~~  $x, y$  — положительные,

$$\text{тогда } x > 0; -x < 0; -x-5 < 0$$

Сл-но, этот вариант невозможен <sup>противоречие</sup>

$$2) \quad xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4$$

$$y = x-2$$

$$M = x^3 - (x-2)^3 - 6x(x-2) =$$

$$= x^3 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 6x^2 + 12x = 8$$

↑  
единственный вариант

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

| $x \backslash y$ | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|
| -2               | +  | -  | +  | -  | +  | -  | + | - | + | - | + | - | + |
| -1               | -  | +  | -  | +  | -  | +  | - | + | - | + | - | + | - |
| 0                | +  | -  | +  | -  | +  | -  | + | - | + | - | + | - | + |
| 1                | -  | +  | -  | +  | -  | +  | - | + | - | + | - | + | - |
| 2                | +  | -  | +  | -  | +  | -  | + | - | + | - | + | - | - |

Будем отмечать +, если

при указанных  $x, y$

хотя бы одно из чисел

$\frac{x+y}{2}$  и  $\frac{3x-y}{2}$  целое

При  $x=6$  и  $y=2$  - —

Считаем кол-во плюсов.

~~32~~ (32)

Ответ: ~~32~~ 32 пары



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x = -2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \left( \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x + \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x \right) = 0$$

$$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \left( \frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$* \sin \alpha = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$1) \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$

$$\frac{x+y}{2} \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sin \left( \frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$\frac{x-y}{2} + x \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3x-y}{2} \in \mathbb{Z}$$

Ответ: подходят пары  $(x; y)$  такие, что  $\frac{x+y}{2}$  - целое или  $\frac{3x-y}{2}$  - целое.

$$b) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$\arcsin \alpha \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], \text{ сл-мо неравенство не}$$

выполняется только при  $\arcsin \frac{x}{6} = \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2}$ .

✗ (при  $x, y \in \text{обл. опр. arcsin}$ )

$$-1 \leq \frac{x}{6} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{y}{2} \leq 1$$

$$-6 \leq x \leq 6$$

$$-2 \leq y \leq 2$$

Необходимо посчитать пары  $\text{целых } x, y$ . Составим табл.

см. сл. стр.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

Посчитаем, какова вероятность, что при  $k$  билетах на  $n$  человек 2 определенных человека получают билеты.

Вариантов, что получают = кол-во способов раздать  $k-2$  билета оставшимся  $n-2$  людям =  $C_{n-2}^{k-2}$

Всего способов раздать билеты =  $C_n^k$

$$\text{Тогда вероятность} = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{k \cdot (k-1)}{n \cdot (n-1)}$$

$$\text{Изначально } k=4. \text{ Вероятность} = \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} = \frac{12}{n(n-1)}$$

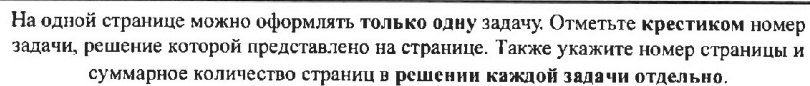
Вероятность увеличилась в 6 раз при  $k_1$

$$6 \cdot \frac{12}{n(n-1)} = \frac{k_1(k_1-1)}{n(n-1)}$$

$$72 = k_1(k_1-1)$$

$k_1$  - натуральное, значит  $k_1 = 9$

Ответ: 9 билетов.

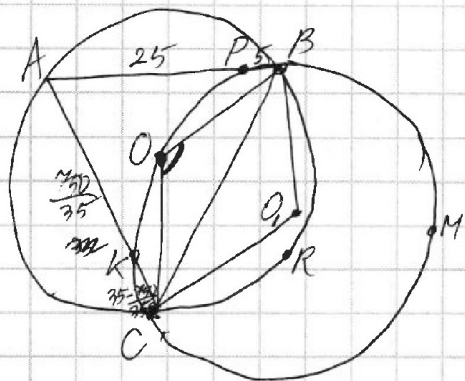


1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AP \cdot AB = AC \cdot AK$$

$$AK = \frac{25 \cdot 30}{35} = \frac{750}{35}$$

$$\angle BMC = 2\angle BOC = 2\angle BRC = 4\angle BAC$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☒7  
☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Тогда } AB+CD = 2(\sqrt{169-50\cos^2\alpha} + \sqrt{169-50\sin^2\alpha}) =$$

$$= 2(\sqrt{119+50\sin^2\alpha} + \sqrt{169-50\sin^2\alpha})$$

Пусть  $t = 50\sin^2\alpha$ ,  $50\sin^2\alpha \geq 0$ . Найдем максимум ф-ции

$$f(t) = \sqrt{119+t} + \sqrt{169-t}$$

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{119+t}} - \frac{1}{2\sqrt{169-t}} = 0$$

$$2\sqrt{119+t} = 2\sqrt{169-t}$$

$$119+t = 169-t$$

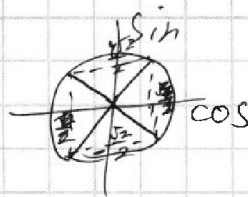
$$2t = 50$$

$$t = 25$$

$$50\sin^2\alpha = 25$$

$$\sin\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$$



$$\text{Тогда, } (AB+CD)_{\max} = 2(\sqrt{119+25} + \sqrt{169-25}) = 48$$

Найдем  $\text{max}$  периметр.  $P_{\text{max}} = 48 + \pi \cdot 13 = 48 + 13\pi$

$P_{\text{max}}$  достигается при  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$

Ответ:  $48 + 13\pi; \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА  
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$\begin{cases} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 169 \end{cases}$$

Второе неравенство ограничивает множество точек круга с радиусом  $\sqrt{169} = 13$  и центром в нач. коорд.

Первое неравенство равносильно совокупности:

$$\begin{cases} x+5\sqrt{2}\cos\alpha \leq 0 \\ y+5\sqrt{2}\sin\alpha \geq 0 \\ x+5\sqrt{2}\cos\alpha \geq 0 \\ y+5\sqrt{2}\sin\alpha \leq 0 \end{cases}$$

Тогда построим график и проведем  
 пр. а пр. б  
 прямые  $x = -5\sqrt{2}\cos\alpha$  и  $y = -5\sqrt{2}\sin\alpha$ .

Поймем, что прямые перпендикулярны  $\omega$ -окружности

Пусть  $a \cap \omega = A; B$ ;  $b \cap \omega = C; D$

Неравенству удовлетворяют заштрих. обл.

Каков периметр? Поймем,

что т.к.  $AB \perp CD$   $\cup AC + \cup BD =$

$= \cup AD + \cup BC$ . То есть, длина

дуг, входящих в  $\Phi$ -константа. Значит, необходимо

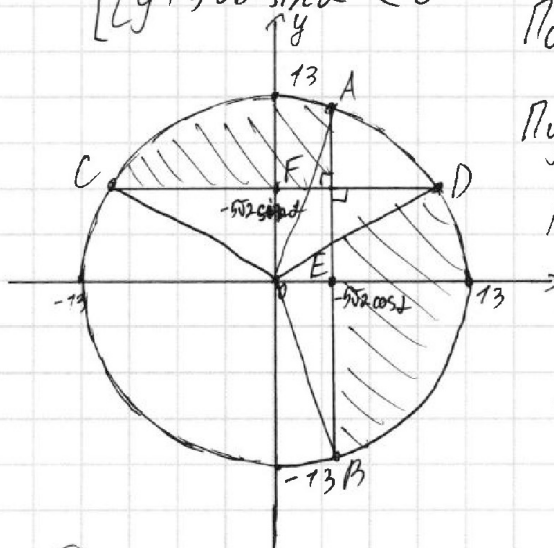
найти такие  $\alpha$ , при кот.  $(AB + CD)_{\max}$   
 (т. н. пр.  $\Delta OEB$ )

Тогда посчитаем длину  $AB$ ,  $AB = 2\sqrt{OB^2 - OE^2} =$

$= 2\sqrt{169 - 50\cos^2\alpha}$ . Аналогично  $CD = 2\sqrt{OD^2 - OF^2} =$

$= 2\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha}$

см сл. стр.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{AB}{CD} = \frac{SN}{SE} = \frac{\sqrt{b^2 + SO^2} + \frac{2b\sqrt{b^2 + SO^2}}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b}}{\sqrt{b^2 + SO^2}} = \frac{2b}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} + 1 =$$

$$= \frac{\sqrt{b^2 + SO^2} + b}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b}$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{ODC}} = \frac{2\sqrt{b^2 + SO^2}}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \left( \frac{\sqrt{b^2 + SO^2} + b}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} + 1 \right) = \left( \frac{2\sqrt{b^2 + SO^2}}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \right)^2 =$$

$$* = \frac{4(b^2 + SO^2)}{b^2 + SO^2 + b^2 - 2b\sqrt{b^2 + SO^2}}$$

$$\frac{S_{ODC}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4} + \frac{b^2 - 2b\sqrt{b^2 + SO^2}}{4(b^2 + SO^2)} = \frac{1}{4} + \frac{b^2}{4(b^2 + SO^2)} - \frac{2b}{4\sqrt{b^2 + SO^2}} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sin^2 \angle OSE - \frac{1}{2} \sin \angle OSE = \frac{1}{4} (\sin \angle OSE - 1)^2$$

тогда искоемое отношение  $\rightarrow \frac{1}{4} (1 - \sin \angle OSE)^2$

$$\sin \angle OSE = \frac{b}{OS} \quad \sin \angle OSK = \frac{\sqrt{1 - b^2/(b^2 + 2SO^2)}}{\sqrt{b^2 + SO^2}}$$

$$\frac{b}{\sin \angle OSE} = \frac{OC}{\sin \angle OSK} = \frac{\sqrt{OE^2 + EC^2}}{\sin \angle OSK} = \frac{\sqrt{b^2 + SO^2 - SE^2}}{\sin \angle OSK} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☐7  
☒СТРАНИЦА  
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$ER = \sqrt{\frac{b^4}{SO^2} + b^2} \cdot \frac{b^2 + SO^2}{(\sqrt{b^2 + SO^2} - b)^2} + \frac{(b^2 + SO^2)b^2}{(\sqrt{b^2 + SO^2} - b)^2} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{b^2 + SO^2}{SO^2} (b^2 + 2)}$$

$$ER = RK$$

$$\cos \angle RSK = \frac{RK}{SR} = \frac{\frac{b}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \sqrt{\frac{b^2 + SO^2}{SO^2} (b^2 + 2)}}{\sqrt{SL^2 + RL^2}}$$

$$m \quad SR = \sqrt{SL^2 + RL^2} = \sqrt{(b^2 + SO^2) \left( \frac{b^2 + SO^2}{(\sqrt{b^2 + SO^2} - b)^2} \right) + \frac{b^2}{SO^2} (b^2 + SO^2) \frac{(b^2 + SO^2)}{(\sqrt{b^2 + SO^2} - b)^2}}$$

$$= \frac{b^2 + SO^2}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \sqrt{\left( 1 + \frac{b^2}{SO^2} \right)}$$

$$\cos \angle RSK = \frac{\frac{b}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \sqrt{\frac{b^2 + SO^2}{SO^2} (b^2 + 2)}}{\frac{b^2 + SO^2}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \sqrt{1 + \frac{b^2}{SO^2}}} =$$

$$= \frac{b \sqrt{(b^2 + SO^2)(b^2 + 2SO^2)}}{(b^2 + SO^2) \sqrt{b^2 + SO^2}} = \frac{b \sqrt{b^2 + 2SO^2}}{b^2 + SO^2}$$

Тогда будем искать площади.

$$S_{ODC} = \frac{1}{2} \cdot OE \cdot CD$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot EN \cdot (AB + CD)$$

$$\frac{S_{ODC}}{S_{ABCD}} = \frac{OE \cdot CD}{EN \cdot (AB + CD)} = \frac{b \cdot CD}{\frac{2b \sqrt{b^2 + SO^2}}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} (AB + CD)}$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{ODC}} = \frac{AB}{CD} \cdot \frac{2 \sqrt{b^2 + SO^2}}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} + \frac{2 \sqrt{b^2 + SO^2}}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

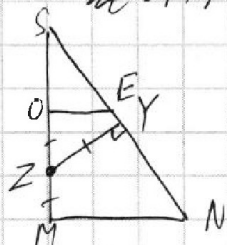
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В н.л. ~~SMN~~:  $ZY \perp SN$   $ZY = OZ = ZM$



Пусть  $OE = b$ ;  $OZ = c$

$$\sin \angle S = \frac{c}{c+SO} \quad \text{tg} \angle S = \frac{b}{SO}$$

$$SE = \sqrt{b^2 + SO^2} \quad \cos \angle S = \frac{SO}{\sqrt{b^2 + SO^2}}$$

$$\text{tg} \angle S = \frac{b}{SO} = \frac{c \sqrt{b^2 + SO^2}}{(c+SO) SO}$$

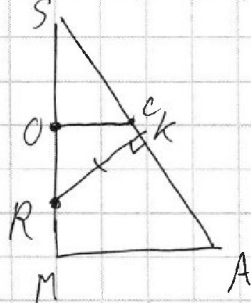
$$b(c+SO) = c \sqrt{b^2 + SO^2}$$

$$c(b - \sqrt{b^2 + SO^2}) = -bSO$$

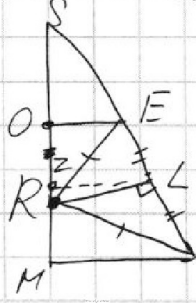
$$c = \frac{bSO}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b}$$

Рассмотрим 1):

В н.л. SMA:



В н.л. SMN:



$$\text{L-сеп EN} \quad \frac{SZ}{SL} = \frac{SO}{SE}$$

$$SO + c = SL \left( \frac{SO}{\sqrt{b^2 + SO^2}} \right)$$

$$SL = \frac{(SO + c) \sqrt{b^2 + SO^2}}{SO} =$$

$$= \left( SO + \frac{bSO}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \right) \sqrt{b^2 + SO^2} = \left( 1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \right) \sqrt{b^2 + SO^2}$$

$$EL = \frac{b \sqrt{b^2 + SO^2}}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b}$$

$$\frac{RL}{SL} = \text{tg} \angle S = \frac{b}{SO}$$

$$RL = \left( 1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \right) \sqrt{b^2 + SO^2} \cdot \frac{b}{SO}$$

$$ER = \sqrt{RL^2 + EL^2} = \sqrt{b^2 + SO^2} \frac{b^2}{SO^2} \left( 1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \right)^2 + \frac{(b^2 + SO^2)b^2}{(\sqrt{b^2 + SO^2} - b)^2}$$

см. сл. стр



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☒

СТРАНИЦА

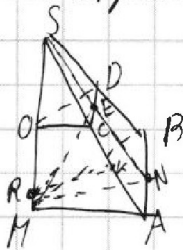
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

Т.к. пирамида прав. центры обоих шаров лежат на высоте, пров. к основанию пир.

Рассмотрим "кусочек" пирамиды такой, что



$AB, CD$  - стороны оснований

$O, M$  - центры оснований.

Поймем, что искомое отношение -

это отношение  $S_{ODC} : S_{ABCO}$ , Т.к. такие куски одинаковы для всех ребер и тн. будут равны!

1) Известно, что  $\Omega$  касается всех ребер.

Поймем, что если касается, то в середине (иначе будет пересек, т.к.  $r$  до центра ребра меньше, чем до любой другой его точки)

$N, E$  - середины  $AB, CD$ . Тогда на  $SM$

есть такая точка  $R$ , что  $ER = \overset{R}{EN} = \overset{R}{EK}$ , где  $\overset{R}{EK} \perp AC$  ( $K \in AC$ )

2) Есть  $\omega$ , кот. касается всех граней.

Поймем, что центр  $\omega$  - это середина  $OM$  ( $Z$ ) см. сл. стр



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$[3] \quad a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin \left( \pi \frac{x+y}{2} \right) \cos \left( \pi \frac{x-y}{2} \right) \sin \pi x = -\sin \left( \pi \frac{x+y}{2} \right) \sin \left( \pi \frac{x-y}{2} \right) \cos \pi x$$

$$\sin \left( \pi \frac{x+y}{2} \right) \left( \cos \left( \pi \frac{x-y}{2} \right) \sin \pi x + \sin \left( \pi \frac{x-y}{2} \right) \cos \pi x \right) = 0$$

$$\sin \left( \pi \frac{x+y}{2} \right) \sin \left( \pi x + \pi \frac{y}{2} \right) = 0$$

$$\sin \left( \frac{\pi x + \pi y}{2} \right) \sin \left( \pi x + \frac{\pi y}{2} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \\ \sin \left( \pi x + \frac{\pi y}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{y}{2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$\arcsin t \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\text{Нельзя чтобы } \frac{x}{6} = 1 \text{ и } \frac{y}{2} = 1$$

$$\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \text{ нельзя}$$

$$-1 \leq \frac{x}{6} \leq 1$$

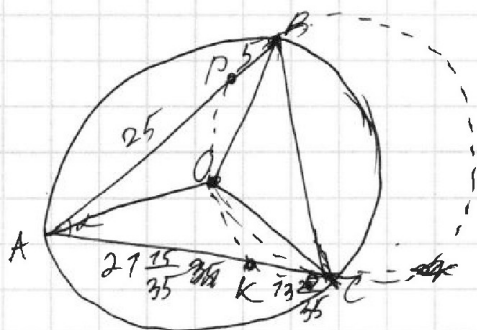
$$-1 \leq \frac{y}{2} \leq 1$$

$$-6 \leq x \leq 6$$

$$-2 \leq y \leq 2$$

2000

[5]



$$AP \cdot AB = AC \cdot AK \quad 25 \cdot 30 = 750$$

$$750 - 35 \cdot (35 - 1)$$

$$\frac{750}{35} - 35 = -1$$

$$20 \frac{50}{35} - 35 = -1$$

$$-1 = 35 - 21 \frac{25}{35} = 13 \frac{20}{35}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{-x-5} + \frac{5}{x(-x-5)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{-x-3} + \frac{5}{(x-2)(-x-3)}$$

$$\frac{-x-5+x+5}{x(-x-5)} = \frac{-x-3+x-2+5}{x(-x-5)}$$

$$21 \times 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$[1] A = 1111 = 11 \cdot 101 \quad A = k \cdot 11 \cdot 101 \quad B = 101 \cdot n = 606$$

$$A = 2222 = 2 \cdot 11 \cdot 101 \quad BC = 101 \cdot 11 \cdot m$$

$$ABC = k \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 6 \cdot C \quad kC = 66d \quad d = v^2$$

$$k=1 \quad ABC = 11 \cdot 101^2 \cdot 6 \cdot C \quad C = 66 -$$

$$k=2$$

$$[2] K = \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} \right| = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \quad \begin{matrix} x, y \neq 0 \\ x \neq 2, y \neq -2 \end{matrix}$$

$$\frac{5+x+y}{xy} = \frac{5+x+y}{(x-2)(y+2)}$$

$$xy = (x-2)(y+2) \quad -2y+2x-4=0 \quad x=y+2 \quad y=x-2$$

$$M = x^3 - (x-2)^3 - 6x(x-2) = x^3 - x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 - 3x \cdot 2^2 + 6x^2 - 12x = 8$$

$$[4] 4 \text{ билета} \quad n \text{ 11-классников}$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_n$$

$$\text{Вероятность, что оба.} \quad \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)!}{2! \cdot (n-4)!} \cdot \frac{n!}{4! \cdot (n-4)!} =$$

$$= \frac{(n-2)! \cdot 4! \cdot (n-4)!}{2! \cdot (n-4)! \cdot n!} = \frac{(n-2)! \cdot 3 \cdot 2}{n!} = \frac{6 \cdot 2}{n(n-1)}$$

$$k \text{ билетов}$$

$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)! \cdot k! \cdot (n-k)!}{(k-2)! \cdot (n-k)! \cdot n!} = \frac{(n-2)!}{n!} \cdot \frac{k!}{(k-2)!} = \frac{k \cdot (k-1)}{n \cdot (n-1)}$$

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \quad k(k-1) = 8 \cdot 9 \quad (k=9)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} + \frac{5}{x(x+5)} = x^3 + (x+5)^3 + 6x(x+5) = x^3 + 15x^2 + 75x + 125 + 6x^2 + 30x = x^3 + 21x^2 + 105x + 125$$



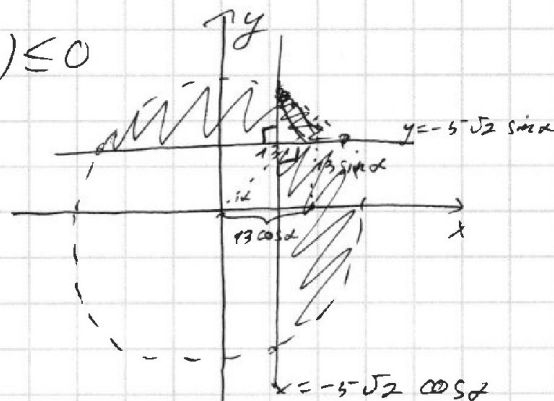
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☐7  
☐СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

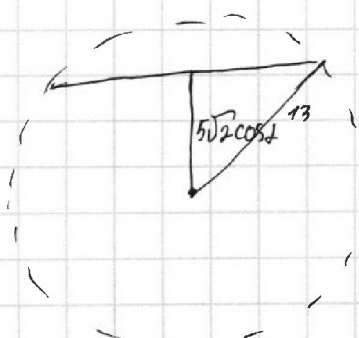
$$\begin{cases} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 169 \end{cases}$$

Круг с рад 13



$$\begin{cases} x+5\sqrt{2}\cos\alpha \leq 0 \\ y+5\sqrt{2}\sin\alpha \geq 0 \\ x+5\sqrt{2}\cos\alpha \geq 0 \\ y+5\sqrt{2}\sin\alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5\sqrt{2}\cos\alpha \\ y = -5\sqrt{2}\sin\alpha \end{cases}$$



$$\begin{aligned} 2\sqrt{169-50\cos^2\alpha} + 2\sqrt{169-50\sin^2\alpha} &= \\ = 2\sqrt{119+50\sin^2\alpha} + 2\sqrt{169-50\sin^2\alpha} \\ 50\sin^2\alpha &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{119+x} + 2\sqrt{169-x} &= \\ = \frac{1}{2\sqrt{119+x}} - \frac{1}{2\sqrt{169-x}} &= 0 \end{aligned}$$

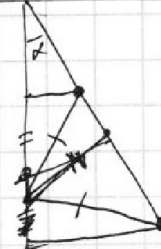
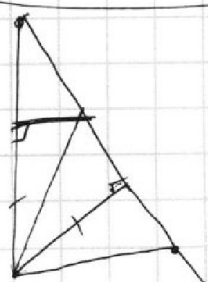
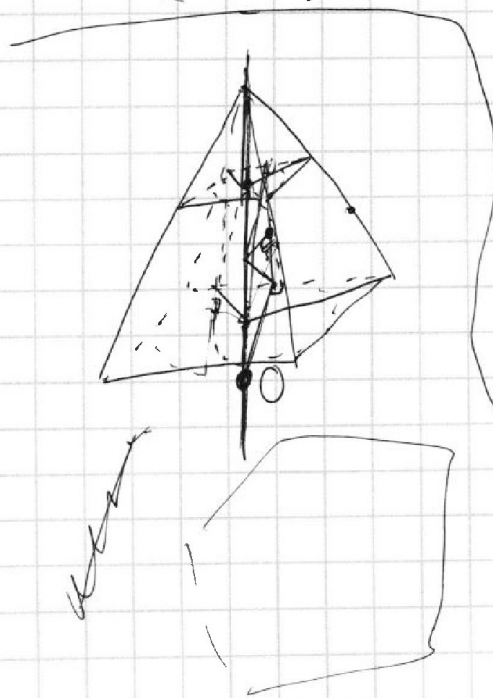
$$\sqrt{119+x} = \sqrt{169-x}$$

$$119+x = 169-x$$

$$50\sin^2\alpha = 25 \quad 2x=50 \quad x=25$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$



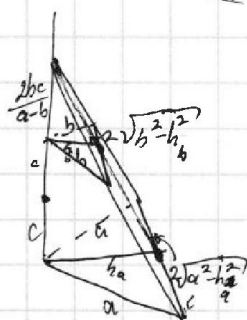
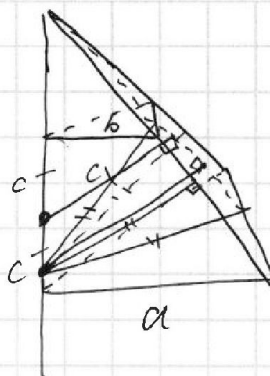
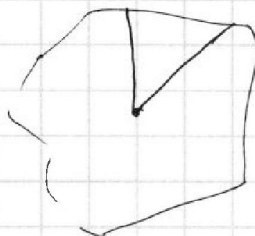
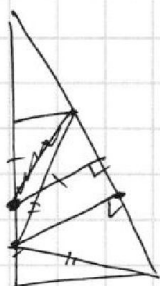


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



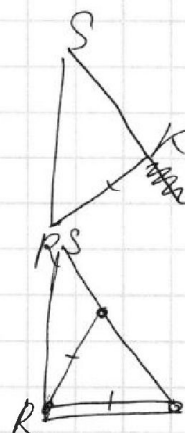
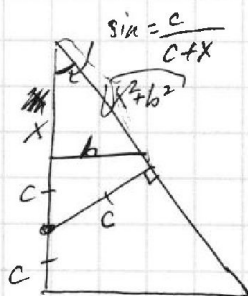
$$\frac{b}{a} = \frac{x}{x+2c}$$
$$(x+2c)b = xa$$
$$x(b-a) = 2bc$$
$$x = \frac{2bc}{a-b}$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - h_b^2} \cdot h_b$$
$$\frac{2bc}{(a-b)b} = \frac{2bc}{(a-b)} + 2c$$
$$a$$

$$\frac{x}{c} = \frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{b} - 1$$

$$x = \frac{c}{b} \sqrt{x^2 + b^2} - c$$

$$\frac{2c + 50}{5N}$$



$$\sin \alpha = \frac{c}{c+x}$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{x} = \frac{\frac{c}{c+x} \sqrt{x^2 + b^2}}{x}$$

$$\frac{b}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{c}{c+x}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{b} = 1 + \frac{x}{c}$$