



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a \in \mathbb{N}, a \leq 9 \quad b, c \in \mathbb{Z} \text{ и } 0 \leq b, c \leq 9 \quad m \in \mathbb{N} \text{ и } m \leq 9 \quad n \in \mathbb{Z} \text{ и } 0 \leq n \leq 9 \quad x \in \mathbb{N} \text{ и } x \leq 9$$

Т.к. все цифры в числе A одинаковы, то A представимо в виде $1111 \cdot x$, где x - цифра, из которой составлено число A . Заметим, что $111 = 101 \cdot 11$, где 101 и 11 - простые числа.

Пусть число B представимо в виде $100a + 10b + c$ ^{где a, b, c - цифры}

число C представимо в виде $10m + n$, ^{где m, n - цифры}

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot x (100a + 10b + c) (10m + n)$$

$A \cdot B \cdot C$ должно быть квадратом натурального числа поэтому при разложении на множители числа $A \cdot B \cdot C$

101 должно встретиться четное кол-во раз. 101 - простое,

$10m + n$ принимает максимальное значение, равное $10 \cdot 9 + 9 =$

$= 99$, поэтому $100a + 10b + c$ должно быть делителем

$$\text{на } 101. \quad 100a + 10b + c \equiv -a + 10b + c \pmod{101}$$

Из условия известно, что хотя бы одно из чисел (a, b, c)

равно 6. Пусть это число $a = 6$. ~~$10b + c - a$~~

$-6 + c + 10b$ должно быть сравнимо с нулем по модулю 101 . Максимальное значение $c - 6 + 10b$ равно $9 - 6 + 90 = 93$, тогда нам не можем получить по модулю 101 , когда $10b - 6 + c = 0$. $10b = 6 - c$. Обратно, что у данного уравнение единственное решение: $c = 6$; $b = 0$, тогда при $a = 6$; $b = 0$; $c = 6$

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot x (606 + 101 \cdot 11 \cdot x \cdot 606 \cdot (10m + n)) = 101^2 \cdot 11 \cdot x \cdot 6 \cdot (10m + n + 11 \cdot x \cdot 606 \cdot (10m + n))$$

$10m + n$ должно делиться на 11 , из условия известно, что хотя бы один из m и n равно 3. Пусть $n = 3$, тогда, чтобы $10m + n$ делилось на 11 $m = 3$. Если или наоборот,



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

чтобы с делилось на 11 и ~~на~~ когда бы одна из цифр с была 3, то $C=33$, т.к. ~~на~~ ~~делится~~ двузначные числа, которые делятся на 11 состоят из одинаковых цифр.

$A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot X = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot X$, чтобы $A \cdot B \cdot C$ было квадратом натурального числа, X должно быть числом $X=2$ и $X=8$

Тогда нам подходит ~~(2222; 606; 33)~~ (8888; 606; 33).

(II) пусть $b=6$; тогда:

$-a+60+c \stackrel{101}{=} 101$; $60+c-a$ не может быть равно нулю в силу ограничений на c и a , а так же не может равняться 101, т.к. $60+c-a < 101$ в силу ограничений на a и c .

(III) пусть $c=6$ тогда:

$$10b - a + 6 \stackrel{101}{=} 0; \quad 10b - a + 6 = 0; \quad 10b = a - 6 \text{ равенст-}$$

во возможно при $b=0$; $a=6$; такой случай рассмотрен в (I).

$10b - a + 6 < 0$ в силу ограничений на a и b .

Рассмотрен все возможные случаи, поэтому Ответ:
(2222; 606; 33) (8888; 606; 33).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

У условия можно записать следующее равенство:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)} \quad \text{①} \quad \frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} \cdot \text{м.к.}$$

$x, y > 0$, то можно поделить обе части равенства ① на $(x+y+5)$, тогда: $\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-2)(y+2)}$, то есть $(x-2)(y+2) = xy$

$$xy + 2x - 2y - 4 = xy; \quad x - y = 2, \quad x = 2 + y$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy, \text{ подставив } x = 2 + y$$

$$M = 2(4 + 4y + y^2 + 2y + y^2 + y^2) - 6(2 + y)y = 2(3y^2 + 6y + 4) - 6(2y + y^2) =$$

$$= 6y^2 + 12y + 8 - 12y - 6y^2 = 8$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) - \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

Пусть $\pi x = \alpha$, $\pi y = \beta$

Тогда исходное равенство имеет вид:

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha - \cos \beta) \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 0$$

$$\cos 2\alpha - \cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$-2 \sin\left(\frac{3\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0, \begin{cases} \sin\left(\frac{3\alpha - \beta}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Проведем обратную замену:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi x + \pi y}{2} = \pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} \textcircled{I} \frac{3x - y}{2} = k, k \in \mathbb{Z} \\ \textcircled{II} \frac{x + y}{2} = l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\textcircled{I}: \frac{3x - y}{2} = k; 3x - y = 2k; 3x = 2k + y; x = \frac{2k + y}{3}$$

$$\textcircled{II}: \frac{x + y}{2} = l; x + y = 2l; x = 2l - y$$

Ответ на пункт а) $\left(\frac{2k + y}{3}; y\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$
 $(2l - y; y)$, где $l \in \mathbb{Z}$.

б) Чтобы найти целых чисел (x, y) удовлетворяющих одновременно уравнению и неравенству, необходимо, чтобы $x = \frac{2k + y}{3}$

или $x = 2l - y$; рассмотрим эти случаи по-отдельности.

$$x = \frac{2k + y}{3}; \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \leq \pi$$

$$x = \frac{y + 2k}{3}; \arcsin \frac{y + 2k}{18} + \arcsin \frac{y}{2} \leq \pi \quad (*)$$

Используя графический метод, график удовлетворяет арксинус левой части неравенства $(*)$ принадлежит отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В условии спрашиваем

т.к. в неравенстве (*) присутствуют арксинусы, то появляются ограничения.

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{6} \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{6} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -6 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

В задании спрашивается про

какие решения, тогда давайте переберём все возможные значения y . y может быть равен $-2, -1, 0, 1, 2$.

Пусть $y = -2$.

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin(-1) < \pi, \text{ т.к. } \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \text{ то } \arcsin \frac{x}{6} < \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \text{ т.к. } \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ то } \arcsin \frac{x}{6} \leq \frac{\pi}{2}, \text{ что верно при всех } x \text{ из } [-6, 6].$$

$\arcsin \frac{x}{6} < \pi + \frac{\pi}{2}$, $\arcsin \frac{x}{6} < \frac{3\pi}{2}$, это верно при всех x из $[-6, 6]$, т.к. $\arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}$. Нам подходит 13 значений x при $y = -2$.

Пусть $y = -1$: $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin(-\frac{1}{2}) < \pi$, $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$, $\arcsin \frac{x}{6} < \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, $\arcsin \frac{x}{6} < \frac{5\pi}{6}$, $\arcsin \frac{x}{6} < \frac{5\pi}{6}$, что верно при всех x из $[-6, 6]$, т.к. $\arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда нам подходит еще 13 пар решений.

Нам подходит $-6 \leq x \leq 6$, но чтобы эти решения удовлетворяли уравнению $x = \frac{y+2k}{3}$, при $y = -2$: $x = \frac{2k-2}{3}$.

$\frac{2k-2}{3} = -6$; $2k-2 = -18$; $2k = -16$; $k = -8$ подходит; $\frac{2k-2}{3} = -5$; $2k-2 = -15$; не подходит, т.к. левая часть делится на 2, а правая нет, значит k не целое.

$\frac{2k-2}{3} = -4$; $2k-2 = -12$; $2k = -10$; $k = -5$ подходит; $\frac{2k-2}{3} = -3$; не подходит, т.к. k не целое; $\frac{2k-2}{3} = -2$; $2k-2 = -6$; $2k = -4$; $k = -2$ подходит.

$\frac{2k-2}{3} = -1$ не подходит, т.к. k не целое; $\frac{2k-2}{3} = 0$; $k = 1$ подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{2k-2}{3} = 1; k \text{ - нецелое} \quad \frac{2k-2}{3} = 2; 2k-2=6; k=4 \quad \frac{2k-2}{3} = 3 \text{ не подходит } k \text{ - нецелое}$$

$$\frac{2k-2}{3} = 4; 2k-2=12; 2k=14; k=7 \quad \frac{2k-2}{3} = 5 \text{ не подх. } k \text{ - нецел.}$$

$$\frac{2k-2}{3} = 6; 2k-2=18; 2k=20; k=10$$

Получается, что на этом этапе нам подходит следующие пары:

$$(-6; -2) (-4; -2) (-2; -2) (0; -2) (2; -2) (4; -2) (6; -2).$$

Теперь рассмотрим $y = -1$; $\arcsin \frac{x}{6} \in \frac{\pi}{6}$ при всех допустимых x .

$x = \frac{2k-1}{3}$ Если x - четный, то нам не подходит, т.к. $3x$ не будет делиться на 2, а $2k-1$ чет. Рассмотрим, можно ли перейти к x .

$$\frac{2k-1}{3} = -5; 2k-1=-15; k=-7; \frac{2k-1}{3} = -3; 2k=-8; k=-4; \frac{2k-1}{3} = -1; k=-1$$

$$\frac{2k-1}{3} = 1; 2k-1=3; k=2; \frac{2k-1}{3} = 3; 2k=10; k=5; \frac{2k-1}{3} = 5; k=8$$

подходят следующие пары: $(-5; -1) (-3; -1) (-1; -1) (1; -1) (3; -1) (5; -1)$.

Теперь $y=0$: $x = \frac{2k}{3}$ нам будут подходить только четные x , т.к. иначе $2k$ будет делиться на 2, а $3x$ нет.

$$\frac{2k}{3} = -6; k=-9; \frac{2k}{3} = -4; k=-6; \frac{2k}{3} = -2; k=-3; \frac{2k}{3} = 0; k=0; \frac{2k}{3} = 2; k=3$$

$$\frac{2k}{3} = 4; k=6; \frac{2k}{3} = 6; k=9$$

подходят следующие пары: $(-6; 0) (-4; 0) (-2; 0) (0; 0) (2; 0) (4; 0) (6; 0)$.

Теперь $y=1$: $x = \frac{2k+1}{3}$ нам подойдут только четные x , т.к. иначе $3x \div 2$ а $2k+1 \div 2$, т.е. не будет делиться на 2, а $3x$ нет.

Теперь $y=2$: $\arcsin \frac{x}{6} \in \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ при всех допустимых x , кроме $x=6$, т.к. $\arcsin \frac{6}{6} = \frac{\pi}{2}$.

$x = \frac{2k+2}{3}$ Нам подойдут только четные x , т.к. иначе $2k+2 \div 2$, а $3x \div 2$, т.е. не будет делиться на 2, а $3x$ нет.

подходят еще 6 пар, $x=6$ нам не подходит, т.к. у нас строгий знак и тогда нам подходит $7+6+7+6+6 = 32$ пар.

Ответ: а) $(\frac{2k+9}{3}, y), k \in \mathbb{Z}; (2k-9, y), k \in \mathbb{Z}$

б) 32



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть одна группа классиков x человек, а
билетов, выданных на концерт в конце месяца y штук.
Вероятность того, что Пете и Вase оба пойдут
на концерт в начале месяца равна $\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}$, а

вероятность того, что Пете и Вase оба пойдут
на концерт в конце месяца равна $\frac{y \cdot (y-1)}{x(x-1)}$

По условию известно, что $\frac{y \cdot (y-1)}{x(x-1)} \cdot \frac{x(x-1)}{4 \cdot 3} = 6$

$$y(y-1) = 72; y^2 - y - 72 = 0$$

$(y-9)(y+8) = 0$ $y > 0$, т.к. количество билетов не может
быть отрицательным. $\Rightarrow y = 9$.

Ответ: 9



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

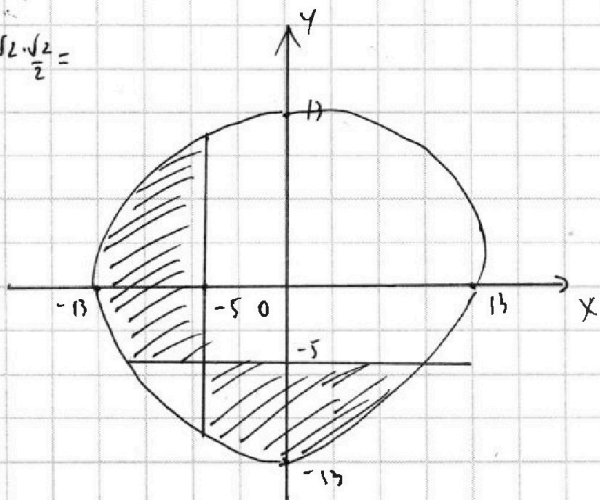
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

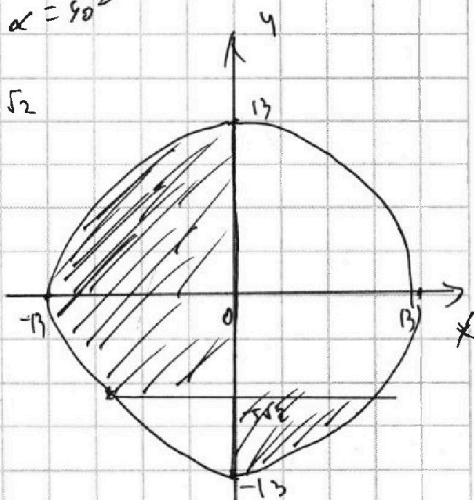
① $\begin{cases} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0, \\ x^2+y^2 \leq 169 \end{cases}$; $\begin{cases} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) = 0 \\ x = -5\sqrt{2}\cos\alpha \\ y = -5\sqrt{2}\sin\alpha \end{cases}$ в зависимости от α
 ~~x и y принимают значения от $-5\sqrt{2}$ до $5\sqrt{2}$~~
 x и y принимают значения от $-5\sqrt{2}$ до $5\sqrt{2}$

построим два графика. При $\alpha = 45^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$

$\alpha = 45^\circ$
 $x = -5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$
 $= -5$
 $y = -5$



$\alpha = 90^\circ$
 $x = 0$
 $y = -5\sqrt{2}$



Эти два графика нарисованы для наглядного представления. Заметим, что любой такой график при α можно описать так: любой дуги отдельных частей дуги, симметричные "в одну" и эта дуга будет представлять собой совокупность. Например, в графике для $\alpha = 90^\circ$ формально, очевидно, симметрично относительно ОУ переносим левую часть множества и получим множество, дуги из графика которого является дуга, равная половине дуги окружности. Получают, что α при разных α меняется на периметр фигуры $F(\alpha)$ при уменьшении α увеличивается длина дуги, $x = -5\sqrt{2}\cos\alpha$ и $y = -5\sqrt{2}\sin\alpha$, то есть необходимо максимизировать длину этих кривых. Чем ближе кривые $x = -5\sqrt{2}\cos\alpha$ и $y = -5\sqrt{2}\sin\alpha$ к ОУ и ОХ соответственно, тем больше их значение, чем меньше $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ тем ближе кривые к осям $\Rightarrow \Rightarrow$ надо минимизировать сумму $\sin\alpha + \cos\alpha$. Тогда $\Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐

2 ☐

3 ☐

4 ☐

5 ☐

6 ☒

7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right); \text{ минимальное значение } \sin \text{ будет когда } \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \quad \begin{cases} \alpha + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = -\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Мы получили нули α , теперь найдем значение M .

Решим как лет ввели ранее, периметр состоит из длины дуги и ~~из~~ суммы длин краев. Длина дуги равна $\pi \cdot 13 = 13\pi$ ~~13\pi~~

1317; при $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ или $\alpha = -\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
длина одной дуги ~~одна~~ из краев равна длине диаметра (26).
а длина второй кривой равна длине диаметра ~~радиуса (13)~~ ~~13\pi~~ ~~5\sqrt{2}~~ ~~5\sqrt{2}~~. Итого же значение M равно

$$13\pi + 26 + 26 - 5\sqrt{2}$$

Ответ: $52 - 5\sqrt{2} + 13\pi$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{XXXX}$$

$$B = \overline{abc}, \text{ где } \begin{cases} a=6 \\ b=6 \\ c=6 \end{cases}$$

$$C = \overline{mn} \begin{cases} m=3 \\ n=3 \end{cases}$$

$$\overline{XXXX} \cdot \overline{abc} \cdot \overline{mn} = K^2$$

$$1111 \cdot \overline{abc} \cdot \overline{mn} = K^2$$

$\Rightarrow K$ делится на 1111

$$K^2: 1111 \cdot 1111$$

$$1111 \cdot (600 + 10b + c)(30 + n) = K^2$$

$$(600 + 10b + c)(30 + n): 1111$$

$$18000 + 600n + 300b$$

$$10b + b - a : 101$$

максимум 9/10

$$10b + c - b$$

$$60 + c - a \text{ делят}$$

$$1111 \cdot \overline{abc} \quad 1111(600 + 10b + c)(30 + n) = K^2$$

$$\overline{600 + 10b + c} : 1111$$

$$1111(100a + 60b + c)(30 + n) = K^2$$

$$\overline{600 + 10b + c} =$$

$$10b + c = 511$$

$$1111(\overline{600})$$

$$100a + 60b + c$$

$$101 \mid 7$$

$$\overline{91}$$

$$100a + 60b + c = 1111$$

$$2222(600 + 10b + c) \mid$$

$$3333 = 3 \cdot 1111$$

$$701$$

$$101 \cdot 11$$

$$\begin{array}{r} 1111 \cdot 7 \\ - 7 \\ \hline 41 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1111 \cdot 7 \\ - 7 \\ \hline 41 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \cdot 7 \\ - 7 \\ \hline 41 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1111 \cdot 7 \\ - 7 \\ \hline 41 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \cdot 7 \\ - 7 \\ \hline 41 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1111 \cdot 7 \\ - 7 \\ \hline 41 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \cdot 71 \\ - 71 \\ \hline 13 \end{array} \quad \begin{array}{r} 101 \cdot 71 \\ - 71 \\ \hline 13 \end{array}$$

$$51$$

$$101 \cdot 11 \cdot X \cdot (100a + 10b + c)(10m + n) = K^2$$

$$m=10, n=1$$

$$101$$

$$5$$

$$606$$

$$600 = -6$$

$$100a + 10b + c : 101$$

$$600 + 10b + c = 101K$$

$$100a + 60b + c = 101m$$

$$100a + 10b + c = 101n$$

$$100a + 10b + c = 101 \cdot 6 - a + 10b$$

$$\begin{cases} 6 - a + 10b \text{ делится на } 101 \\ -6 + 10b + c \\ 60 + c - a \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n(3x-y) = 2kxy$$

$$\cos 2nx - \cos(1(x-y)) = 0$$
$$\cos 2n(2k-y) - \cos(n(2k-y)) = 0$$

$$\cos 2n(2k-y) - \cos 2n(k-y) = 0$$

$$-2 \sin n \sin n \oplus \sin n \oplus \sin n = 0$$

$$\arcsin(\frac{1}{6})$$

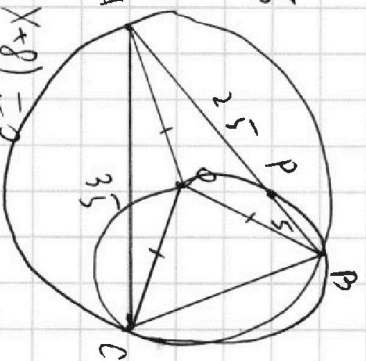
$$\frac{1}{6} - \frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{6}$$

$$\frac{x(x-1)}{12} = 6$$

$$\arcsin(\frac{1}{6}) + \arcsin(\frac{1}{6}) = 0$$



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{16}{100}$$

Пусть количество выигравших

Пусть количество проигравших X.

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{4}{x} = \frac{16}{x^2}$$

$$\frac{4}{25} \cdot \frac{4}{25} = \frac{16}{625}$$

$$\frac{4}{25} \cdot \frac{4}{25} = \frac{16}{625}$$

$$y^2 = 6 \cdot 16$$

$$\frac{x^2}{N^2} \cdot \frac{16}{N^2} = 6$$

$$\frac{4}{N^2} \cdot \frac{4}{N^2} = 6$$

$$x = 4\sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \cos^2 \beta - \cos^2 \beta = 0$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\alpha - \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha + \beta) = 1$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \cos(\alpha - \beta) = 0 \quad \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 0$$

$$2 \alpha + \beta - \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$



$$2 \alpha - \alpha + \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 60^\circ - \cos 30^\circ = -2 \sin 45^\circ \sin 15^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$$

$$\sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

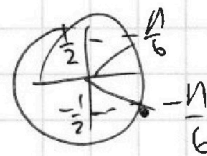
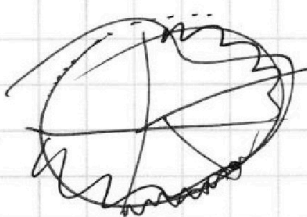
$$\sin(2k + y) - \sin y$$

$$21 + 12$$

$$2n$$

$$n$$

$$-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}$$



$$n, n$$

$$\frac{y}{2} \leq 1$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{y + 2k}{3}$$

$$\frac{2k - 1}{3}$$

$$\frac{2k - 1}{3} = -6$$

$$(-6) \rightarrow (-4) \rightarrow (-2) \rightarrow (0) \rightarrow (2)$$

$$-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$-6, -4, -2, 0, 2$$

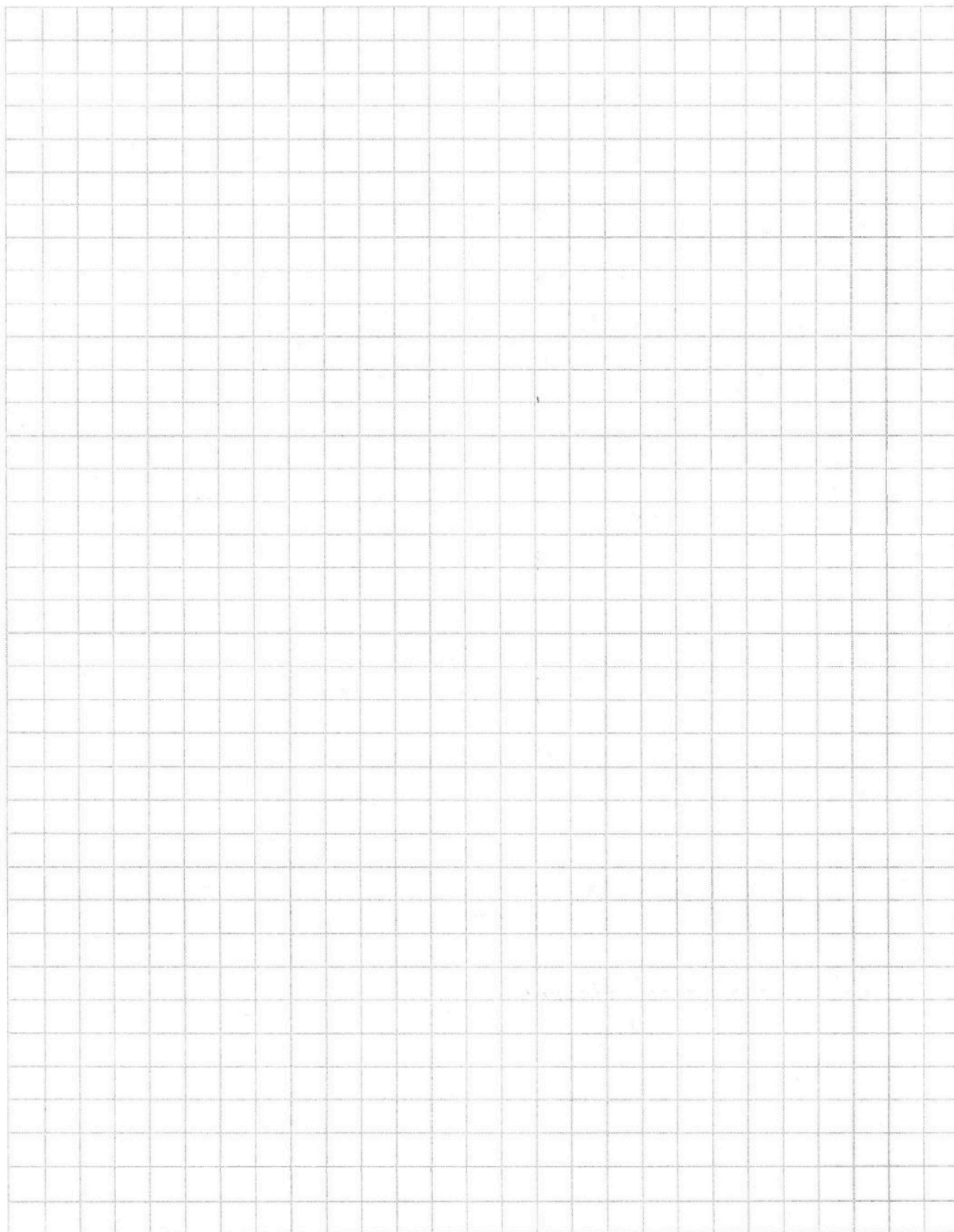


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$\frac{2}{14} = \frac{5}{7,0}$$

$$\cos \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = -1$$

$$\sin \alpha = -1$$

$$-5\sqrt{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$\sin \alpha = 1$$

$$\cos x \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} - x)$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

$$5\sqrt{2}$$

$$\max(\sin x + \cos x)$$

$$\frac{1}{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x)$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$x = -\frac{\pi}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

