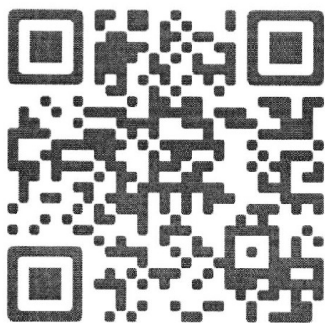




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что число A можно записать как: $n \cdot 1$.

$A = \overline{aaaa}$, где a — цифра, а n — количество цифр, из которых составлено A . Тогда $A = 1111 \cdot a = 101 \cdot 11 \cdot a$.

Заметим, что 101 и 11 — простые, а a — точно не превышает 9 , т.к. это цифра, значит A содержит простые 101 и 11 .

В первой степени. Чтобы число $A \cdot B \cdot C$ было квадратом натурального числа, оно должно содержать все простые делители в четных степенях, значит A делится на 101 и на 11 . Заметим, что C — двузначное, значит оно < 100 и не может делиться на 101 , значит B делится на 101 , а т.к. оно трехзначное, то оно представимо в виде $B = \overline{b0b}$, где b — некоторая цифра.

Однако по условию в записи B есть цифра 1 , значит $b = 1$, и $B = 101$. Также заметим, что $B = 101$ не делится на 11 , тогда $C : 11$, а значит C — двузначное, значит C представимо в виде: $C = \overline{cc}$, где c — некоторая цифра.

По условию в записи C есть цифра 5 , значит $c = 5$ и $C = 55$. Тогда произведение $A \cdot B \cdot C$ можно записать как: $101^2 \cdot 11^2 \cdot a \cdot 5$.

Т.к. это произведение должно быть квадратом, то a содержит 5 хотя бы в первой степени, а т.к. a — цифра, т.к. $0 \leq a \leq 9$, то $a = 5$ (заметим, что $a \neq 0$, т.к. при $a = 0$ $A = 0$, и оно не четырехзначное, что противоречит условию).

Таким образом $A = 5555$. Тогда искомая тройка имеет $(A; B; C) =$

$(5555; 101; 55)$

Ответ: $(5555; 101; 55)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении** каждой задачи отдельно.

1

☐

2

☒

3

☐

4

☐

5

☐

6

☐

7

☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ * 2
По условию, если x увеличить на 3, а y - увеличить на 3, то значение K не изменится, т.е.

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \quad \left| : (x+y+1) \right. \text{ По условию } x > 0 \text{ и } y > 0, \text{ значит } x+y+1 > 0$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{xy-3y+3x-9}$$

$$xy = xy - 3y + 3x - 9$$

$$x - y = 3$$

Преобразуем выражение для M :

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy.$$

Подставим $(x-y) = 3$:

$$M = 3(x^2 + xy + y^2) - 9xy = 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy =$$

$$= 3(x^2 - 2xy + y^2) = 3(x-y)^2$$

Подставим $x-y = 3$:

$$M = 3 \cdot 3^2 = 27$$

Ответ: $M = 27$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

u3.

$$a). (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y = 0$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} - \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3x - y = 1 - 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = 3x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = 1 - x + 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

Тогда уравнению удовлетворяют все пары:

$$(x; 3x - 1 + 2k); (x; -x + 1 + 2n), \text{ где } x \in \mathbb{R};$$

$$k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } (x; 3x - 1 + 2k);$$

$$(x; -x + 1 + 2n), x \in \mathbb{R}; k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$b). \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

Заметим, что $\arccos t \in [0; \pi]$ где $t \in [-1; 1]$.

Рассмотрим область определения функции $f(t) = \arccos t$ то, $\text{Dom } f = [-1; 1]$, а область значений $\text{E}(f) = [0; \pi]$. Тогда неравенство определено, когда

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При этом при всех допустимых x и y :

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq 2\pi, \text{ т.е. неравенство}$$

выполняется при всех допустимых x и y , т.е. иначе, когда

$$\begin{cases} \frac{x}{4} = -1 \\ \frac{y}{9} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 9 \end{cases}$$

при этих значениях неравенство не выполняется, т.е. не

$$\text{значит, неравенство} \begin{cases} \arccos \frac{x}{4} = \pi \\ \arccos \frac{y}{9} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = -1 \\ \frac{y}{9} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 9 \end{cases}$$

при $x = -4$ и $y = 9$ неравенство не выполняется, значит

при $x \in [-4; 4]$ и $y \in [-9; 9]$ неравенство выполняется. (учетом того, что x и y — целые, что требуется найти x и y :

$$x \in [-4; 3]; y \in [-9; 8].$$

Теперь посмотрим, при каких x и y на этих отрезках верно уравнение:

$$1). y = 3x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Переберем целые значения $x \in [-4; 3]$ и посмотрим, сколько раз соответствует $y \in [-9; 8]$ при всевозможных целых k (при $k \in \mathbb{Z}$ и $x \in \mathbb{Z}$ найдем $y \in \mathbb{Z}$):

$$x = -4; y = -13 + 2k; k = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 \text{ (9 штук)}$$

$$x = -3; y = -10 + 2k; k = 1; 2; \dots; 9 \text{ (9 штук)}$$

$$x = -2; y = -7 + 2k; k = 0; 1; \dots; 7 \text{ (9 штук)}$$

$$x = -1; y = -4 + 2k; k = -2; -1; \dots; 6 \text{ (9)}$$

$$x = 0; y = -1 + 2k; k = -4; -3; \dots; 4 \text{ (9)}$$

$$x = 1; y = 2 + 2k; k = -5; -4; \dots; 3 \text{ (9)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x=2; y=5+2k; k=-8; -7; \dots; 1 \quad (9)$$

$$x=3; y=8+2k; k=-8; -7; \dots; 0 \quad (9)$$

Получаем $8 \cdot 9 = 72$ пар решений.

$$2). y = -x + 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

аналогично переберем значения $x \in [-4; 3]$:

$$x=-4; y=5+2n; k \neq n=-7; \dots; 1 \quad (9)$$

$$x=-3; y=4+2n; n=-6; \dots; 2 \quad (9)$$

$$x=-2; y=3+2n; n=-5; \dots; 3$$

$$n=-6; \dots; 1; 2 \quad (9)$$

$$x=-1; y=2+2n; n=-5; -4; \dots; 3 \quad (9)$$

$$x=0; y=1+2n; n=-5; -4; \dots; 3 \quad (9)$$

$$x=1; y=n+2n; n=-4; \dots; 4 \quad (9)$$

$$x=2; y=-1+2n; n=-4; -3; \dots; 4 \quad (9)$$

$$x=3; y=-2+2n; n=-3; -2; \dots; 5 \quad (9)$$

Получили еще 56 пар решений. Заметим, что

внутри одного пункта 1) или 2) пересечений нет, однако между пунктами они могут быть. Проверим их наличие количеством. При ~~уравнении~~ ~~выражении~~ $y = -x + 1 + 2n$

$$3x - 2 \leq 2n - 2k \quad \text{Заметим, что}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В углах x и y (углы 1) и 2) ^{в углах x и y (углы 1) и 2)} соответствующие все возможные значения y одной определенной величины, т.е. для каждого x все y обходятся на 2π , $\pi \in \mathbb{Z}$, т.е. они

одной величины. Также заметим, что в обоих

углах x и y одной величины: $y = 3x - 1 + 2\pi$;
 $y = -x + 1 + 2\pi$;

Тогда для каждого угла $x \in [-4; 3]$ y соответствующие y в обоих углах одинаковы, т.е. это все возможные $y \in [-9; 8]$ определенной величины.

Значит всего пар столько, сколько в одном из углов 1) или 2), т.е. 56.

Ответ: 56 пар $(x; y)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и 4.

Пусть в классе n учеников, и на концерт выделено k билетов, n, k — натуральные, $n > k$, $n \geq 2$, т.е. в классе точно есть двое учеников: Петьа и Валя.

Всего способов выбрать из класса k учеников, которые пойдут на билет: C_n^k .

Пусть Петьа и Валя получили билеты. Тогда осталось еще $k-2$ билета и $n-2$ учеников. Количество способов выбрать $k-2$ учеников из оставшихся $n-2$ ребят, которые пойдут на билет: C_{n-2}^{k-2} — это все возможные способы, когда Петьа и Валя пойдут на билет.

Вероятность того, что Петьа и Валя пойдут на билет:

$$P = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)! \cdot k! \cdot (n-k)!}{n! \cdot (k-2)! \cdot (n-2-k+2)!} = \frac{(k-1)k}{(n-1)n}$$

В начале месяца выделено 4 билета, т.е. $k=4$, а тогда количество учеников в классе пусть равно n .

Тогда вероятность Петьа и Вале поехать на концерт в начале месяца $P_1 = \frac{3 \cdot 4}{n(n-1)}$.

Пусть в конце месяца выдано столько же билетов, что выделено m билетов, где $m > 4$ — натуральное.

Тогда вероятность того, что Петьа и Валя пойдут на концерт, в конце месяца стала равна $P_2 = \frac{(m-1)m}{(n-1)n}$.

По условию $P_2 = 3,5 P_1$:

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 3,5}{n(n-1)} = \frac{(m-1)m}{(n-1)n} \quad \left| \cdot (n-1) \cdot n \right. \quad \text{Решим это уравнение относительно } m$$

$$m^2 - m = 42$$

$m = 7$ или $m = -6$ — не удовлетворяет тому, что $m \in \mathbb{N}$

Значит в конце месяца на концерт было выделено 7 билетов.

Ответ: 7 билетов.

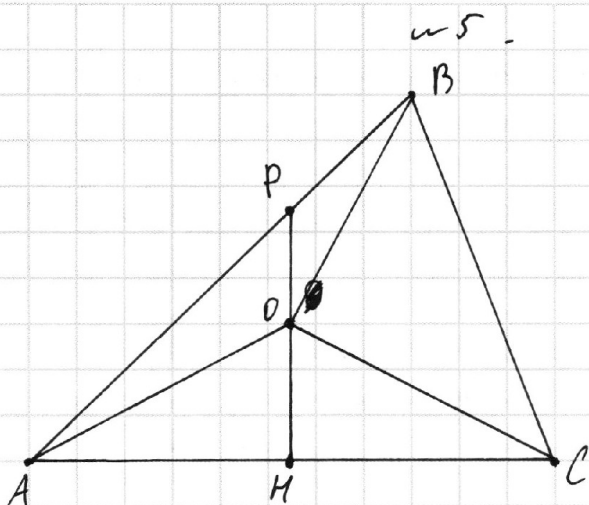


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$, O - центр описанной
 BP , $AP = \frac{16}{5}$; $BP = 2$; $AC = 4$.
опр. w_1

Обозначим угол $\angle ABC$ за α :
 $\angle ABC = \alpha$. Он вписанный
в w_1 , $\angle BOC$ и отрается на
дугу BC , тогда $\angle BOC = 2\alpha$,
как центральный, отражающийся
на ту же дугу BC .

Заметим, что $OB = OC = OA$, как радиусы w_1 , тогда

$$\triangle BOC - \text{равнобедренный} \Rightarrow \angle OBC = \angle BCO = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$$

Заметим, что точки C, O, P и B лежат на w_2 , т.е. четырех-
угольник $BP OC$ - вписанный, а тогда $\angle BPO + \angle BCO = 180^\circ$ по
свойству, откуда $\angle BPO = 90^\circ + \alpha$.

Тогда как смежные с ними: $\angle APO = 180^\circ - \angle BPO = 90^\circ - \alpha$
Продлим PO до пересечения с AC , пусть PO и AC пересекаются
в точке H .

Рассмотрим $\triangle APH$: $\angle A = \alpha$, $\angle P = 90^\circ - \alpha$.

$\angle PHA = 180^\circ - \angle A - \angle P = 180^\circ - \alpha - 90^\circ + \alpha = 90^\circ$ по сумме
углов треугольника. В таком случае $PH \perp AC$.

Рассмотрим $\triangle AOC$, он равнобедренный, т.к. $AO = OC$, OH - его
высота, проведенная к основанию, тогда OH - медиана, т.е.

$$AH = HC = \frac{1}{2} AC = 2$$

$$\text{Из } \triangle APH, \angle H = 90^\circ: \cos \angle PAH = \frac{AH}{AP} = \frac{2}{\frac{16}{5}} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$$\text{Из } \triangle PHT: \sin \angle P = \sin \angle PAH \Rightarrow \sin^2 \angle PAH = 1 - \cos^2 \angle PAH = 1 - \frac{25}{64} = \frac{39}{64}$$

т.к. $\angle PAH$ - острый по условию: $\sin \angle PAH = \frac{\sqrt{39}}{8}$

$$\begin{aligned} \text{Тогда площадь } \triangle ABC \text{ } S: S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle PAH = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (AP + PB) \cdot AC \cdot \sin \angle PAH = \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{5} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{13\sqrt{39}}{10} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } S = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

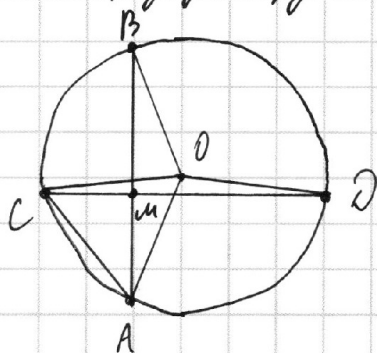


1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- 1). Докажем лемму: две хорды в окружности проводятся перпендикулярные хорды AB и CD . Тогда $\angle BAC + \angle ACD = \angle ALC + \angle BDC = \pi R$, где R — радиус окружности.



Доказательство:

Обозначим центр окружности за O , а $\angle BAC$ за α . Тогда, точку пересечения AB и CD за M и AMC .

Тогда из $\triangle AMC$ $\angle CMC = 90^\circ$:

$$\angle MCA = 90^\circ - \alpha.$$

Заметим, что углы $\angle BAC$ и $\angle MCA$ — вписанные и опираются соответственно на дуги BC и AD , тогда центральные соответствующие им углы, опирающиеся на соответствующие дуги: $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$, $\angle AOD = 2\angle ACD = 180^\circ - 2\alpha$.

$$\text{Тогда длина дуги } BC = \frac{\angle BOC}{360^\circ} \cdot 2\pi R = \frac{2R\alpha}{90^\circ},$$

$$\text{дуги } AD = \frac{\angle AOD}{360^\circ} \cdot 2\pi R = \frac{(90^\circ - \alpha)\pi R}{90^\circ} = \pi R - \frac{\pi R\alpha}{90^\circ}$$

$$\text{Тогда сумма их длин: } \angle BAC + \angle ACD = \pi R - \frac{\pi R\alpha}{90^\circ} + \frac{\pi R\alpha}{90^\circ} = \pi R$$

$$\text{Длина всей окружности } 2\pi R \Rightarrow \angle ALC + \angle BDC = 2\pi R - \pi R = \pi R \quad \text{т.е.}.$$

$$2). \begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

Второе неравенство системы задает круг радиуса 3, с центром в точке $O(0; 0)$.

Первое неравенство равносильно:

$$\begin{cases} x \geq 2 \cos \alpha \\ y \geq 2 \sin \alpha \\ x \leq 2 \cos \alpha \\ y \leq 2 \sin \alpha \end{cases}$$

Оно задает область строго внутри угла правого верхнего и строго левого угла между прямыми $x = 2 \cos \alpha$, $y = 2 \sin \alpha$. Заметим, что точка их пересечения имеет



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим периметр фигуры $P(\alpha)$, как функцию от α в $P(\alpha)$:

$$P(\alpha) = 3\pi + 2\sqrt{9-4\cos^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha}, \text{ где } P(\alpha) \text{ определена для любого } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Преобразуем $P(\alpha)$ в функцию от t :

$$P(\alpha) = 3\pi + 2(\sqrt{5+4\sin^2\alpha} + \sqrt{9-4\sin^2\alpha})$$

Сделаем замену: $\sin^2\alpha = t, t \in [0; 1]$

$$\text{Тогда } P(t) = 3\pi + 2(\sqrt{5+4t} + \sqrt{9-4t})$$

Найдем производную функции $P(t)$ по t . Производная существует для любой $t \in [0; 1]$:

$$P'(t) = \frac{4}{\sqrt{5+4t}} - \frac{4}{\sqrt{9-4t}}$$

$$\text{Найдем её нули: } P'(t) = 0:$$

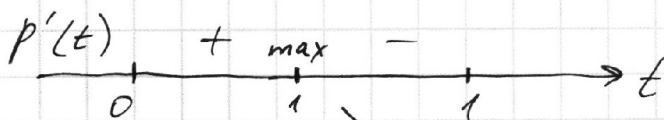
$$\frac{4}{\sqrt{5+4t}} - \frac{4}{\sqrt{9-4t}} = 0$$

$$\sqrt{5+4t} = \sqrt{9-4t}$$

$$5+4t = 9-4t$$

$$8t = 4$$

$$t = \frac{1}{2}$$



$P(t)$

$P(t)$

В точке $t = \frac{1}{2}$ производная функции имеет знак $\leftarrow$ и $\rightarrow$ на промежутке $\Rightarrow$ точка $t = \frac{1}{2}$ — максимум функции $P(t)$ на отрезке $[0; 1]$ и наибольшее значение $P(t)$ достигается именно в точке $t = \frac{1}{2}$:

$P(t) \nearrow \nearrow P_{\max} \searrow \searrow$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = P_{\max} = 3\pi + 2(\sqrt{2+5} + \sqrt{9-2}) = 3\pi + 4\sqrt{7}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Наибольшее значение P достигается когда:

$$t = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

Таким образом $M = 3\pi + 4\sqrt{7}$ — максимальное

значение периметра фигуры $P(\alpha)$ и оно достигается

$$\text{при } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } M = 3\pi + 4\sqrt{7};$$

$$\text{достигается при } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

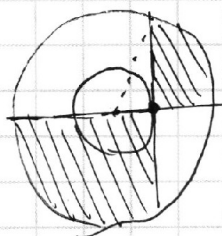
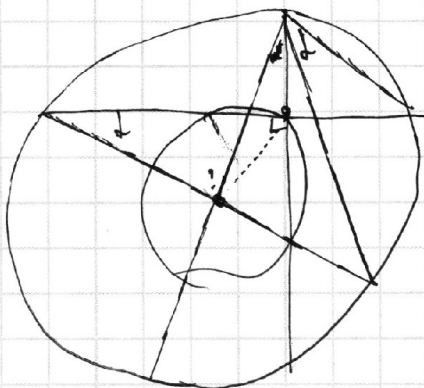
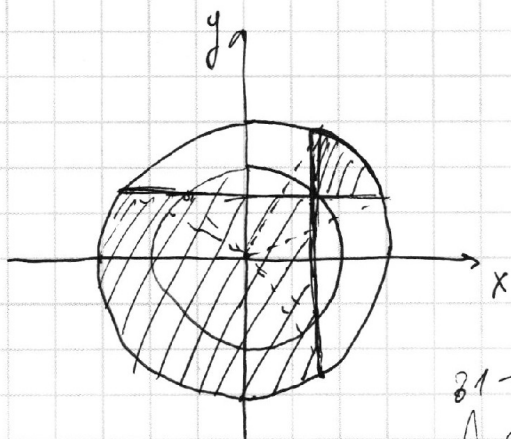


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

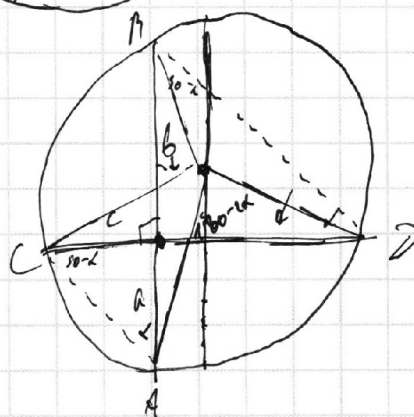
1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = cd$$



$$\left(\sqrt{9-4\cos^2\alpha} + \sqrt{9-4\sin^2\alpha} \right) \left(\sqrt{9-4\cos^2\alpha} - \sqrt{9-4\sin^2\alpha} \right)$$

$$9-4\cos^2\alpha - 9+4\sin^2\alpha$$

$$9-4\cos^2\alpha + 9-4\sin^2\alpha + 2\sqrt{16\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 36\cos^2\alpha - 36\sin^2\alpha + 81}$$

$$14 + 2\sqrt{4\sin^2\alpha + 55}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{5+4\sin^2\alpha} + \sqrt{9-4\sin^2\alpha}$$

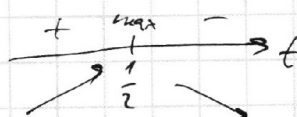
$$f(t) = \sqrt{5+4t} + \sqrt{9-4t}$$

$$f'(t) = \frac{2}{\sqrt{5+4t}} - \frac{2}{\sqrt{9-4t}} = 0$$

$$5+4t = 9-4t$$

$$8t = 4$$

$$t = \frac{1}{2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА 11 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

АА

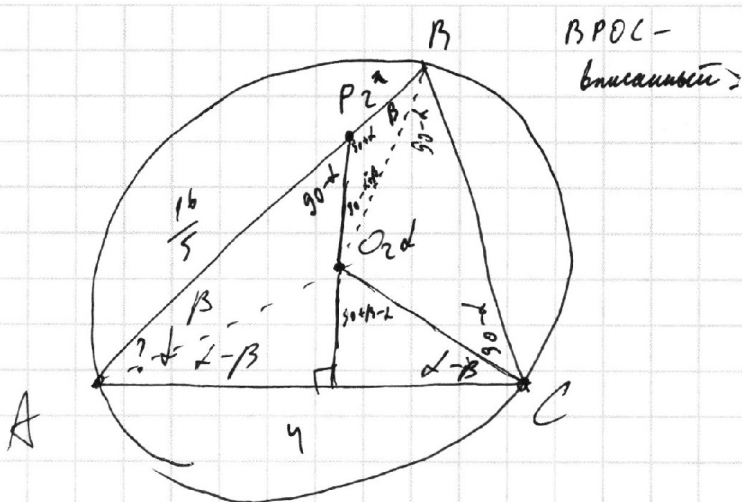
$$3x - 3y = 9$$

$$x - y = 3$$

$$AP = \frac{16}{5} \quad BP = 2$$

$$AC = 4$$

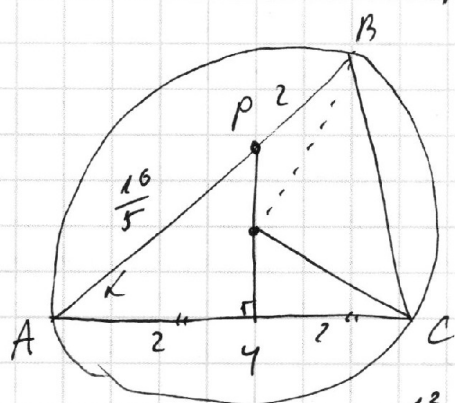
АА $S_{AMC} = ?$



$$180 - 2\alpha + \alpha + \beta + \gamma = 180$$

$$\beta - \alpha = \gamma$$

$$\gamma = \alpha - \beta$$



$$\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$\cos \alpha = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{39}}{8} \quad 39 + 25 = 64$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BP = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$$

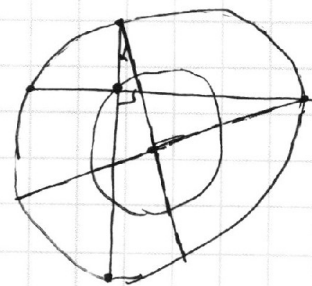
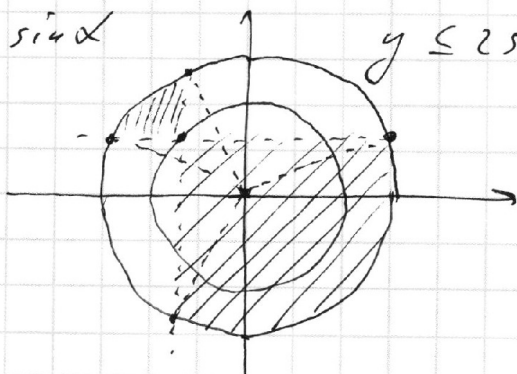
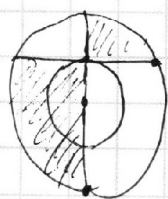
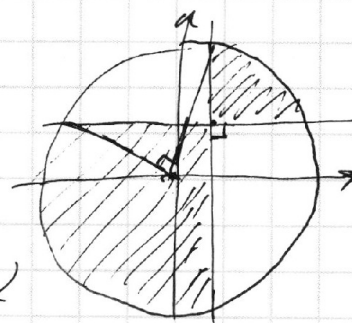
$$(x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0$$

$$x \geq 2 \cos \alpha$$

$$y \geq 2 \sin \alpha$$

$$x \leq 2 \cos \alpha$$

$$y \leq 2 \sin \alpha$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a$$

$$B = \overline{...1} / \overline{1...} / \overline{-1}$$

$$C = \overline{...8k} \cdot 5/5$$

$$A \cdot B \cdot C = k^2$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$3.5 \cdot k(k+3) = k(k+3)(3+k)$$

$$k^2 + 7k + 12 - 42 = 0$$

$$xy = xy - 3x - 3y + 9 \quad xy = xy - 3y + 3x - 9$$

$$xy = 3$$

$$x - y = 3$$

$$k^2 + 7k - 30 = 0$$

$$D = 49 + 120 = 169$$

$$-10 \quad 3$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy$$

$$M = 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy = 3x^2 - 6xy + 3y^2 =$$

$$3(x^2 - 2xy + y^2) = 3(x-y)^2 = 27$$

$$(\sin a - \sin b) \sin a = (\cos a + \cos b) \cos a$$

$$\sin^2 a - \sin a \sin b = \cos^2 a + \cos a \cos b$$

$$\cos 2a + \cos(a-b) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$$

$$\frac{3a-b}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k$$

$$3a-b = \pi + 2ak$$

$$\frac{C_{n-2}^{2k-2}}{C_n^{2k}} = \frac{n!}{k!}$$

$$\frac{(n-2)! \cdot k! \cdot (n-k)!}{n! \cdot (n-k)! \cdot (k-2)!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \alpha x - \sin \alpha y) \sin \pi x = (\cos \alpha x + \cos \alpha y) \cos \alpha x$$

$$\alpha x = \alpha, \quad \alpha y = \beta$$

$$(\sin \alpha - \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha$$

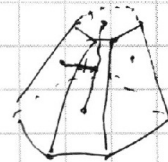
$$\sin^2 \alpha - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\sin^2 \alpha - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 0$$

$$\cos 2\alpha + \cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{3\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0$$



$$3\alpha = \beta + \pi + 2\pi k$$

$$\alpha + \beta = \pi + 2\pi n$$

$$3x - y = 1 + 2k$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$x + y = 1 + 2n$$

$$\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos \beta$$

$$y = 3x - 1 - 2k$$

