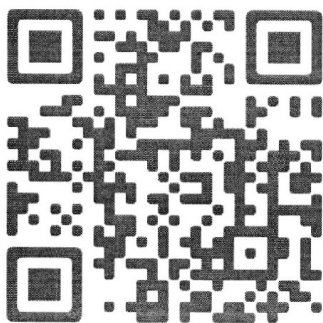




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что т.к. A - 4-разрядное число, составл. из одинак. цифр, то $A = a \cdot 1111$, где a - цифра (иначе A - не 4-значное).
 $\rightarrow A:101$ и $A:11$

Чтобы $A \cdot B \cdot C = q^2$, q - н.ч.к., то каждый множ. должен входить в произведение в четн. степени
 $A:101$ и $A:101^2 \rightarrow \begin{cases} B:101 \\ C:101 \end{cases} \rightarrow$ невозможно, т.к. C - 3-значное.

наблюдаем, что $B:101$ и B содержит 2 $\rightarrow$ тогда B может быть только 202 (оно простое).

$A:11$; $A:11^2$; $B:11 \rightarrow C:11$ и C содержит 3
 $\rightarrow C$ может быть только 33, т.к. C - 3-значное.

Тогда $C = 33$; $B = 202 \rightarrow$

$\begin{cases} C:3 \text{ и } C:3^2 \\ B:2 \text{ и } B:2^2 \end{cases} \rightarrow A:6^4$, ищем $A = a \cdot 1111$
 где $a < 10$
 $\rightarrow a$ только 1

$\rightarrow A = 6666$

Проверим, что такая тройка подходит:

$$6666 \cdot 202 \cdot 33 = 2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2$$

$\rightarrow$ искомое н.ч.к. $q = 101 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3$

Ответ: $A = 6666$
 $B = 202$
 $C = 33$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
4 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по усл. $x, y > 0$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$

⇒ приведем к общему знаменателю и посчитаем:

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} \quad x \neq 1, y > 0$$

числители обеих частей равны

$$\rightarrow \begin{cases} x+y+2=0 \\ xy=(x-1)(y+1) \end{cases} \rightarrow \text{по усл.} \rightarrow \text{заметьте, что } x, y > 0 \rightarrow \text{противоречие.}$$

$$xy = (x-1)(y+1) = xy + x - y - 1 \rightarrow x = y + 1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy. \text{ При } x = y + 1$$

$$\rightarrow M = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

Следует: $M = 1$

достигается при, например, $x=2, y=1$ ($x=y+1$):

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = 8 - 1 - 7 = 1.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi y$$

$$\cancel{\sin^2 \pi x} + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos \pi x \cdot \cos \pi y + \cos^2 \pi y$$

$$\rightarrow \sin^2 \pi x = \cos^2 \pi y \rightarrow \sin \pi x = \pm \cos \pi y$$

$$\sin \pi y \cdot \sin \pi x =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть у нас было n 11 классиков. Тогда вероятность того, что из четырех билетов два достанутся Петю и Вась: $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$
где C_{n-2}^2 - кол-во способов выбрать 2 билета
из $n-2$ билетов.

C_n^4 - общее кол-во способов выбрать 4 билета.
Тогда нам то как кол-во билетов св. до X :
Вероятности стали $\frac{C_{n-X-2}^{X-2}}{C_n^4}$

По усл.: $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{C_{n-X-2}^{X-2}}{C_n^4}$

$$\rightarrow \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \cdot \frac{4! \cdot (n-4)!}{n!} \cdot \frac{5}{2} = \frac{(n-2)!}{(X-2)!(n-X)!} \cdot \frac{X! \cdot (n-X)!}{n!}$$

$$\rightarrow \frac{X!}{(X-2)!} = \frac{5 \cdot 4!}{2 \cdot 2} \rightarrow X(X-1) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 30$$

$$X^2 - X - 30 = 0 \rightarrow X = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} X = -5 \\ X = 6 \end{cases}$$

т.к. кол-во билетов положительно,
 $X = 6$

Ответ: 6



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

найдем координаты: $y = 3$ и $y^2 + x^2 = 25$
 $\rightarrow x^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow x = 4$
($y = 3$ т.к. центр / $y \Delta OPL$ (сег. рис.) $OK = h = 3$),
а y — катет.

$$\rightarrow x = 4, \quad CD = 2x = 8 = EF$$

$$\rightarrow M = \pi \cdot R + 8 + 8 = \boxed{5\pi + 16}$$

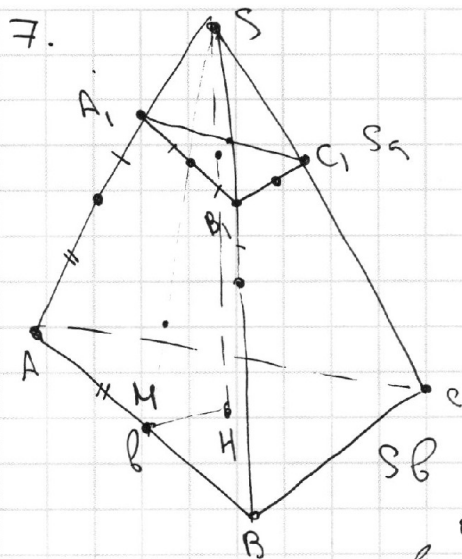
~~Найдем $CD^2 + EF^2 =$~~
 ~~$2 \cdot (2x_0)^2$~~
~~где x_0 — координата т. D; x_1 — координата т. E~~



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Страна $\triangle A_1B_1C_1$ равна a ; страна $\triangle ABC$ равна $a \cdot k = b$

Тогда радиус сферы, кас. грани равен r ; радиус сферы, кас. ребер равен R

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{1}{3} r \cdot (S_{бок} + S_a + k^2 \cdot S_a)$$

(объем равен $\frac{1}{3}$ площади $\triangle ABC$ умножить на высоту h пирамиды. у нас h радиус сферы)

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_b \cdot h_b - S_a \cdot h_a = S_a \cdot k^2 \cdot h_a \cdot k - S_a \cdot h_a = \frac{1}{3} S_a \cdot h_a \cdot (k^3 - 1) = \frac{1}{3} \cdot h_a \cdot (k-1) \cdot (k^2 + k + 1) \cdot S_a$$

Примем замечание, что $h_b - h_a = 2r \Rightarrow h_a(k-1) = 2r$

$$\Rightarrow V_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot k^2 \cdot S_a \cdot 2r \cdot (k^2 + k + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot S_a \cdot 2r \cdot (k^2 + k + 1) = \frac{1}{3} \cdot r \cdot (S_{бок} + S_a(k^2 + 1))$$

$$2S_a(k^2 + 1) + S_a \cdot k \cdot 2 = S_{бок} + S_a(k^2 + 1)$$

$$S_{бок} = S_a(k^2 + 2k + 1) = S_a(k+1)^2$$

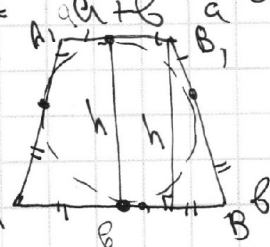
Рассмотрим шар, кас. ребер. и т. А. касат. из т. А к этому шару равен, причем т.к. вписанная сфера, шар касается сторонам основания в их серединах.

Касат. проведенные из одной точки к сфере равны $\rightarrow AA_1 = AB_1$

Проведем AA_1BB_1 ; в т. Пирамиды:

$$h^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$4h^2 + b^2 - 2ab + a^2 = a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow h^2 = ab \rightarrow h = \sqrt{ab}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{k} + k - 10 = 0$$

$$k^2 - 10k + 1 = 0$$

$$D = 100 - 4 = 96$$

$$k = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4}}{2} = 5 \pm \frac{\sqrt{96}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$$

$$\rightarrow \frac{S_{\text{max}}}{S} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{5 \pm 2\sqrt{6}}\right)^2 =$$

$$= \left(1 + 5 \pm 2\sqrt{6}\right)^2 = \left(6 \pm 2\sqrt{6}\right)^2$$

$$\text{Ответ: } \frac{S_{\text{max}}}{S} = \left(6 \pm 2\sqrt{6}\right)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

значение $x^3 - y^3 - 3xy$, при $\begin{cases} y = x-1 \\ y = -x-2 \end{cases}$

при $y = x-1$:

$$x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-1) = x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 3x^2 + 3x =$$

$$= x^3 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 3x^2 + 3x = 1$$

$y = -x-2$

$$\rightarrow x^3 + (x+2)^3 + 3x(x+2) = x^3 + x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot x + 8 + 3x^2 + 6x =$$

$$= 2x^3 + 9x^2 + 18x + 8$$

$$2(x^3 + 4x^2 + 4x + 2) = 2(x^3 + 4x^2 + 4x + 8) =$$

$$(2x^3 + 9x^2 + 18x + 8)' =$$

$$= 6x^2 + 18x + 18 \neq 0 : 6$$

$$x^2 + 3x + 3$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

$\rightarrow f \rightarrow$ φ -числ возраст. на всей о. опр.

но $x \cdot y \neq 0$

$$(x-1)(y+1) > 0 \rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ y < -1 \\ x > 1 \\ y > -1 \end{cases}$$

$$x=2, y=1$$

$$8 - 1 - 3 \cdot 2 =$$

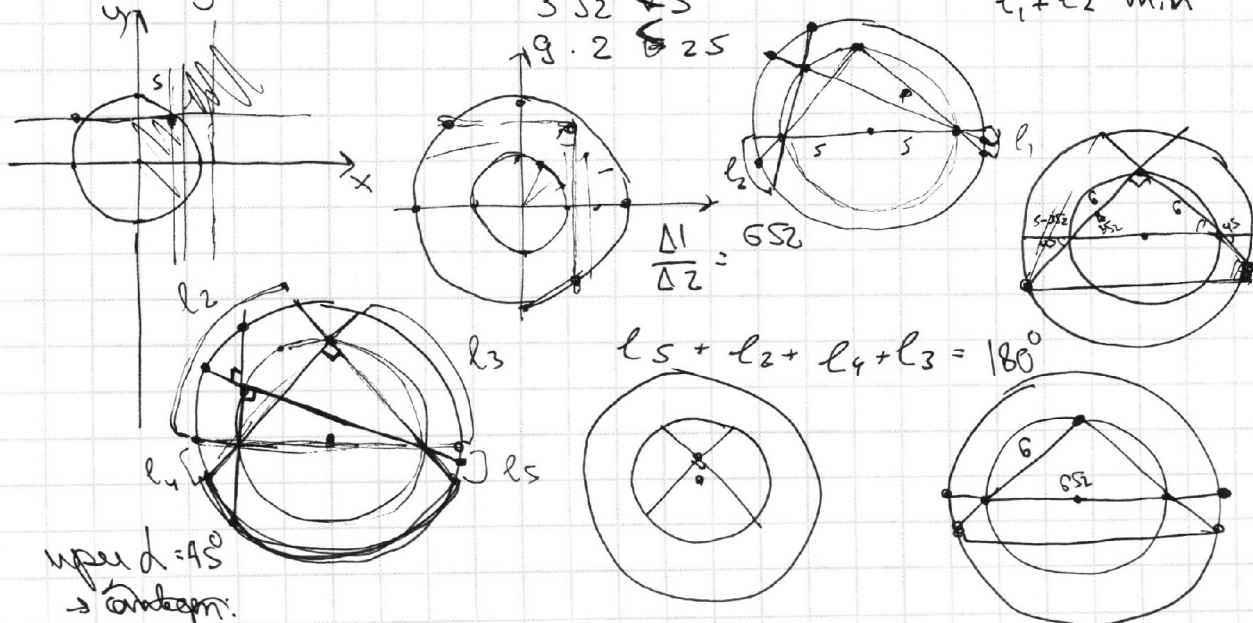
4. I_y нас n 11-класси берати. того, что будем составлять 1-му гр.: $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-3}$

а что будем $\rightarrow p^2$ I_y нас стало x будем об.

стало p^1 и $p^1 \cdot 2 = p^2 + 2,5$

$$6. \begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \cdot \sin d)(y - 3\sqrt{2} \cdot \cos d) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 3\sqrt{2} \cdot \sin d \\ y \leq 3\sqrt{2} \cdot \cos d \\ x \geq 3\sqrt{2} \cdot \sin d \\ y \geq 3\sqrt{2} \cdot \cos d \end{cases}$$

$l_1 + l_2 = \min$





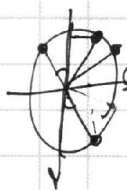
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} (\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x &= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x \\ (\sin \pi x)^2 + \sin \pi y \cdot \sin \pi x &= (\cos \pi x)^2 + \cos \pi y \cdot \cos \pi x \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2} \\ \cos(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) &= \frac{1}{2} (\cos(\beta - \alpha) + \cos(\alpha + \beta)) \\ \sin \alpha \cdot \sin \beta &= \frac{\cos(\beta - \alpha) - \cos(\alpha + \beta)}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{\sqrt{6}}{8} \\ \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{3} &= \cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

И 11-классов.

Код-до шифровальной программы

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{C_{n-2}^{n-2}}{C_n^4} \rightarrow \frac{C_n^4}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{n-2}}{C_n^4} \cdot \frac{5}{2}$$

одна из шифровальной: C_n^4

вероятно, в шифровальной

$$\frac{n!}{(n-x)! \cdot x!} \cdot \frac{n!}{(n-y)! \cdot y!} = \frac{n!}{(n-x-y)! \cdot (n-x-y)!} \cdot \frac{2!}{5} \cdot \frac{2!}{5}$$

$$\frac{y! \cdot (n-y)!}{x! \cdot (n-x)!} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2 \cdot (n-y)!}{(n-x)!} \rightarrow \frac{(n-2)!}{x!} = \frac{2 \cdot (n-y)!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

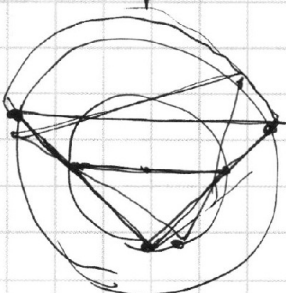
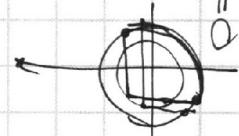
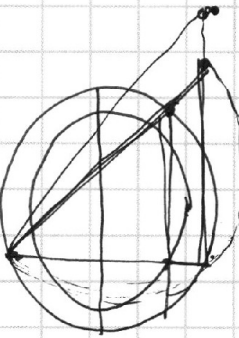
$$\frac{x \cdot (x-1)}{2} = \frac{1}{5 \cdot 3 \cdot 2} \rightarrow x(x-1) = 30 \rightarrow x = 6$$



$$(\sin \pi x)^2 + \frac{\cos(\pi y - \pi x)}{2} = (\cos \pi x)^2 + \frac{\cos(\pi y - \pi x)}{2}$$

$$\cos 2\pi x = \frac{\cos(\pi y - \pi x) - \cos(\pi x - \pi y)}{2} = 0 \rightarrow \cos 2\pi x = 0$$

$$\begin{aligned} &= AC^2 + AD^2 + 2AC \cdot AD \cdot \cos \angle CAD \\ &= EA^2 + AF^2 + 2EA \cdot AF \cdot \cos \angle EAF \\ &= CF^2 + EF^2 + 4 \end{aligned}$$



[illegible]