



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓1

$$A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a \quad ; \quad 0 \leq a \leq 9, a \in \mathbb{Z}$$

a (цифра)

$$A = 11 \cdot 101 \cdot a \quad (11 \text{ и } 101 \text{ простые})$$

$$ABC = k^2 \Rightarrow k^2 : 11, 101$$

$$\Rightarrow k^2 : 11 \cdot 11, 101^2 \Rightarrow ABC : 11^2; 101^2$$

$$a : 11; 101 \Rightarrow BC : 11; 101$$

$$C : 101 \quad \text{т.к.} \quad 9 < C < 100$$

$$\Rightarrow B : 101$$

Все трехзначные числа : 101:

$$101; \quad 101 \cdot 2 = 202; \quad 101 \cdot 3 = 303; \quad 101 \cdot 4 = 404; \\ 101 \cdot 5 = 505; \quad 101 \cdot 6 = 606; \quad 101 \cdot 7 = 707; \\ 101 \cdot 8 = 808; \quad 101 \cdot 9 = 909$$

Среди них имеет 7 окр "7"
только $B = 707$

$$\Rightarrow B = 707. \quad B : 11; \quad BC : 11$$

$$\Rightarrow C : 11. \quad \cancel{C = a}$$

$$C = \overline{XI} \text{ или } \overline{IX} \text{ и } C : 11$$

$$\Rightarrow C = 11 \quad \text{тогда} \quad ABC = 7 \cdot 101 \cdot 11 \cdot a.$$

$$\Rightarrow 7a = \left(\frac{k}{11}\right)^2 \Rightarrow 7a = m^2 \quad \cdot 101 \cdot 11 = k$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$N1 \Rightarrow 7a$ — это квадрат натурального
числа $\Rightarrow 7a : 49 \Rightarrow a : 7$

$\Rightarrow a = 7$
 $a \in (0; 10)$

тогда $A = 7777; B = 707; C = 11$

Ответ: $(7777; 707; 11)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓2

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{y+4+k-4+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\Leftrightarrow (x+y+3) \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-4)(y+4)} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3=0 \\ xy = xy - 4y + 4x - 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3=0 \\ x-y=4 \end{cases}$$

$$\text{Т.к. } xy > 0 \Rightarrow x+y+3 > 0$$

$$\Rightarrow x-y=4 \quad \text{а } x+y+3 \neq 0$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy(x-y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x-y)^3 = 64$$

Доверяется
Например при $x=5; y=1$: $\frac{1}{5} + 1 + \frac{3}{5} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = 2$ ✓

$$M = 5^3 - 1^3 - 12 \cdot 5 \cdot 1 = 125 - 60 - 1 = 64 \checkmark$$

Ответ: $M = 64$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$a) (\sin 2y - \sin 2x) \sin 2y = (\cos 2y + \cos 2x) \cdot \cos 2y$$

$$\sin^2 2y - \cos^2 2y = \sin 2y \sin 2x + \cos 2y \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow -\cos 2y = \cos(2y - 2x)$$

$$\cos(2 - 2y) = \cos(2y - 2x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2y = 2y - 2x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2 - 2y = 2x - 2y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 1 = 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(1 - y - x) = 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x + 1 - 2k}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1 - x - 2k}{1} = 1 - x - 2k \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$

Пары значений: $(x; 1 - x - 2k)$ и $(x; \frac{x + 1 - 2k}{3})$
 $k \in \mathbb{Z}$

$$b) \arccos \frac{x}{4} \geq 0; -\arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2} \quad \forall (x, y)$$

тогда верно все верно (x, y) и $\pi a)$
кроме тех, когда $\arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\text{81) когда } \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{когда } \arccos \frac{x}{7} \geq 0 \text{ и } -\arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{4}$$

оба обратны к равенству.

$$\frac{x}{7} = 1 = \cos(0) ; \sin(\arcsin \frac{y}{4}) = \frac{y}{4} = 1$$

$$\Rightarrow x=7; y=4$$

тогда решением будет:

$$(x; 1-x-2k), k \in \mathbb{Z}, \text{ кроме } (7; 4)$$

$$\text{и все целые пары } (x; \frac{x+1-2k}{3})$$

Если $x=3a$, то пары такие:

$$(3a; \frac{3a+1-4-6k}{3}) \text{ можно } y \text{ было целым}$$

Если $x=3a+1$, то

$$\text{пары такие: } (3a+1; \frac{3a+1+1-2-6k}{3})$$

Если $x=3a+2$, то пары такие:

$$(3a+2; \frac{3a+2+1-3k}{3})$$

$$\text{Ответ: } (3a; a-1-2k); (3a+1; a-2k); (3a+2; a+1-2k) \quad (a, k \in \mathbb{Z}) \setminus \{(7; 4)\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

^{№4}
Вероятность что у Пети будет билет при x билетах равна $\frac{x}{11}$, а у Васи $\frac{x-1}{10}$ т.к. Пете уже останется 1 билет

тогда если всего x билетов, то

$$P(x) = \frac{x(x-1)}{11 \cdot 10}$$

$$P(4) = \frac{4 \cdot 3}{11 \cdot 10}$$

$$P(k) = \frac{k(k-1)}{11 \cdot 10}, \quad k - \text{билетов} \quad (k \geq 4)$$

из конца месяца

$$P(k) = 11 \cdot P(4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(k-1)}{11 \cdot 10} = \frac{11 \cdot 12}{11 \cdot 10} \quad \text{и} \quad k \geq 4$$

$$\Leftrightarrow k^2 - k - 132 = 0 \quad \text{и} \quad k \geq 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=12 \\ k=11 \\ k \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow k=12$$

Ответ: 12 билетов



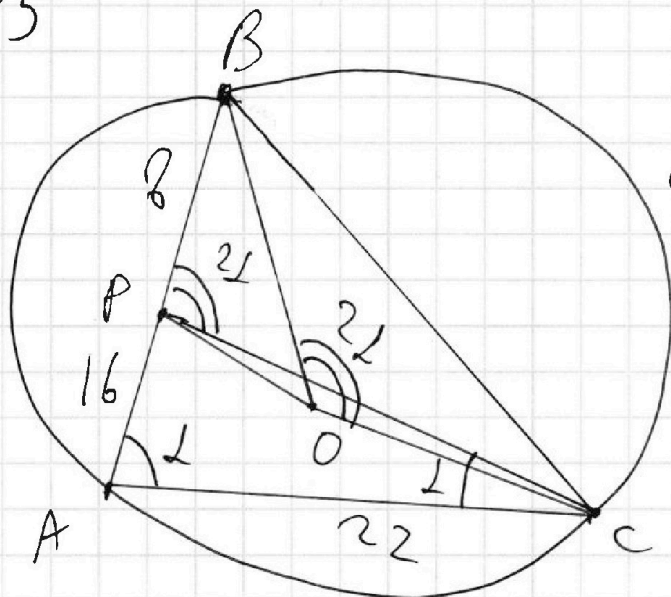
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5



$P, B, C, O \in \omega_2$

т.е. $\odot OPB$ -

ω_1 вписанный

$$\angle BAC = \alpha$$

$$\angle BOC = 2\alpha$$

т.к. центральный

ω_1

$$\angle BPC = \angle BOC$$

т.к. опираются

на одну дугу в ω_2

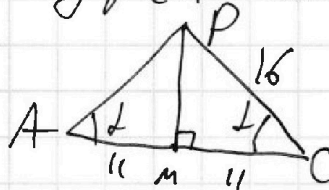
$$\Rightarrow \angle BPC = 2\alpha \Rightarrow \angle APC = \angle BPC - \angle PAC = 2\alpha - \alpha = \alpha$$

$\Rightarrow APC$ - равнобедренный.

$$\Rightarrow PC = 16$$

M - середина AC

$$\Rightarrow AM = MC = 11$$



тогда по т.пифагора $PM = \sqrt{16^2 - 11^2} =$

$$= \sqrt{5 \cdot 27} = 3\sqrt{15}$$

$$\cos \alpha = \frac{11}{16}$$

$$AB = AP + PB = 16 + 8 = 24$$

$$\sin \alpha = \frac{3\sqrt{15}}{16}; S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{24 \cdot 22}{2} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Ответ: } S_{ABC} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

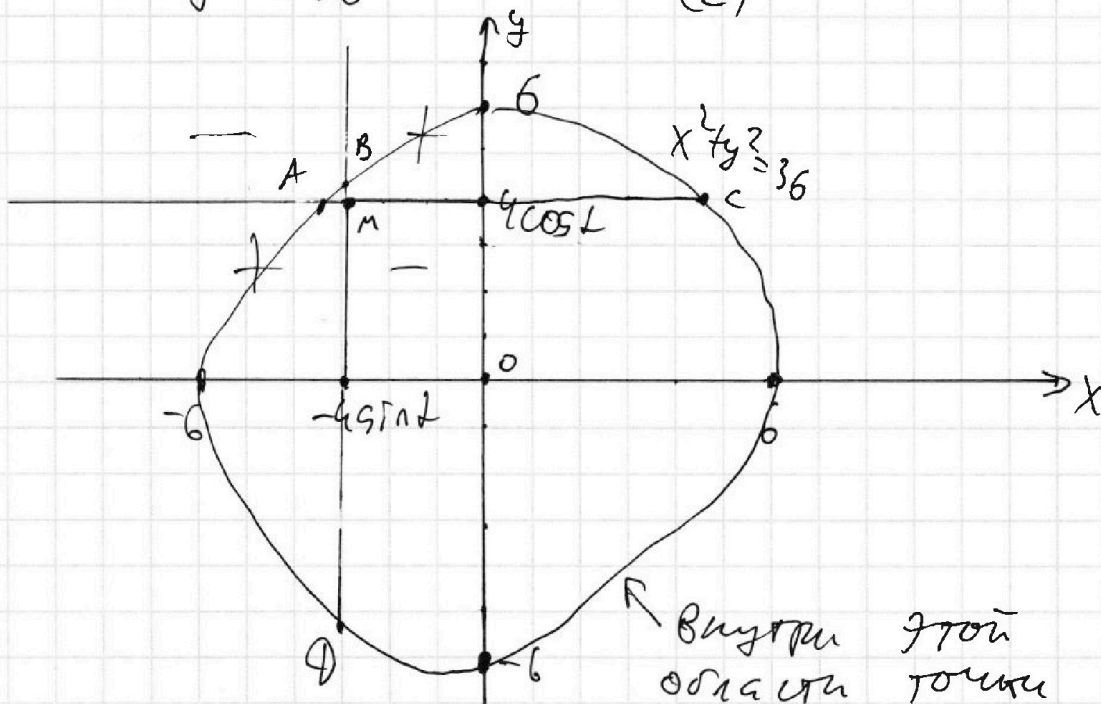
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$\begin{cases} |x + 4\sin t| + (y - 4\cos t) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 36 & (2) \end{cases}$$



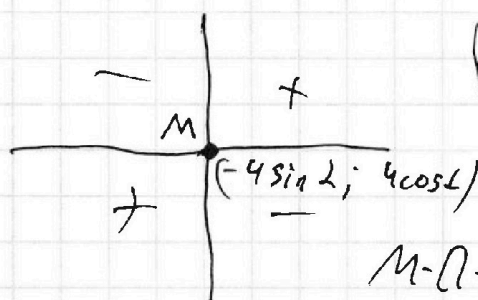
Внутри этой области точки угодн. пер-во (2)

Ур-е (1)

вер

плоскости на 4

части:



(M внутри круга)
т.к. $|-4\sin t| < 6$
 $|4\cos t| < 6$

M - пересечение асимптот

тогда пусть найдем асимптоты,
пересекают $x^2 + y^2 = 36$ в точках

A, B, C, D

тогда необходимо

найти max периметр ABMCD (наша фигура)



1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

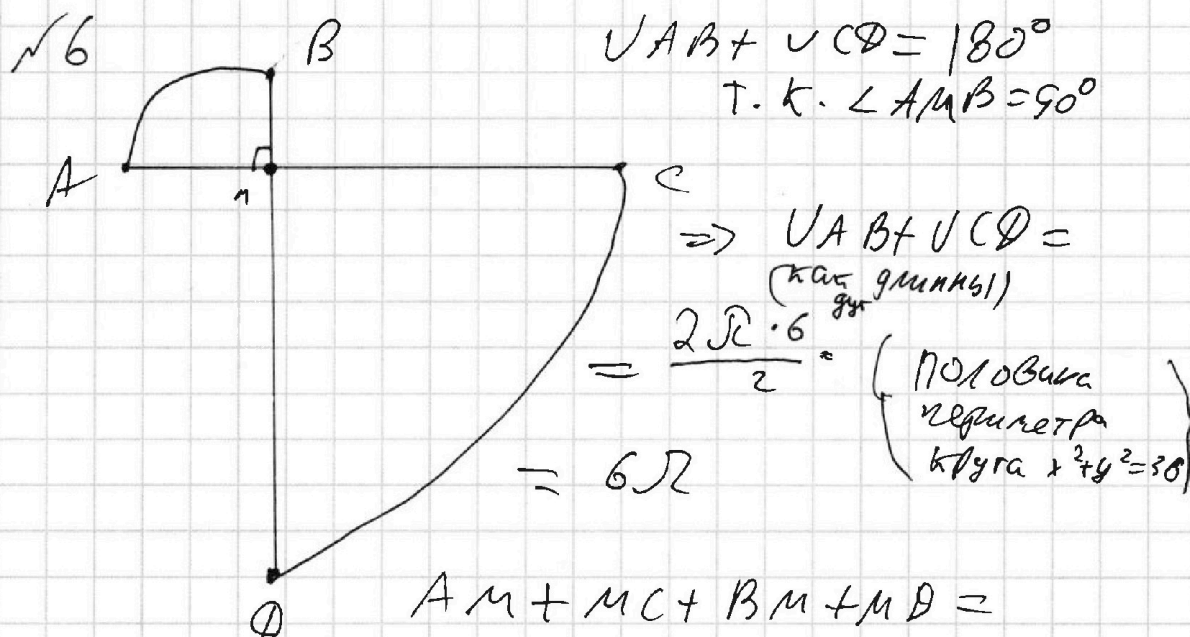
5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$= 4C + BD$$

$$BD: x^2 + y^2 \leq 36; x = -4 \sin \alpha$$

$$\Rightarrow y^2 \leq 36 - 16 \sin^2 \alpha$$

$$-\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} \leq y \leq \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow BD = 2\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}$$

$$AC: x^2 + y^2 = 36; y = 4 \cos \alpha$$

$$x^2 \leq 36 - 16 \cos^2 \alpha$$

$$-\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} \leq x \leq \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow AC = 2\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$$

$$P = 6\pi + 2\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} + 2\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$$

(P — это сумма условий) P — периметр



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$P = 6R + 2 \left(\sqrt{36 - 16\sin^2 L} + \sqrt{36 - 16\cos^2 L} \right)$$

$$P_{\max} \text{ при } \max \left(\sqrt{36 - 16\sin^2 L} + \sqrt{36 - 16\cos^2 L} \right)$$

$$36 = \cancel{24} + 8\sin^2 L + 8\cos^2 L$$

$$\Rightarrow \max \left(\sqrt{28 + 8(\cos^2 L - \sin^2 L)} + \sqrt{28 + 8(\sin^2 L - \cos^2 L)} \right)$$

$$x = 8(\cos^2 L - \sin^2 L)$$

$$\Rightarrow \max \left(\sqrt{28 + x} + \sqrt{28 - x} \right)$$

$$\Rightarrow \max \sqrt{28 + x + 28 - x + 2\sqrt{28^2 - x^2}} =$$

$$= \sqrt{56 + 2\sqrt{28^2 - x^2}}$$

$$\max \text{ при } x = 0$$

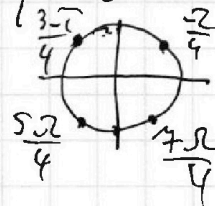
$$\text{Тогда } P_{\max} = 6R + 2(\sqrt{28} + \sqrt{28})$$

$$= 6R + 4\sqrt{28} \text{ при } \cos^2 L = \sin^2 L$$

$$\text{т.е. при } L = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } P_{\max} = 6R + 4\sqrt{28}$$

$$L = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$$



$$= 16(1-x) = 16x - 16$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$36 = 24 + 8 \cos^2 \alpha + 8 \sin^2 \alpha$$

$$\sqrt{24 + 8 \cos^2 \alpha} + \sqrt{24 - 8 \cos^2 \alpha}$$

x

$$\sqrt{24 + x} + \sqrt{24 - x} =$$

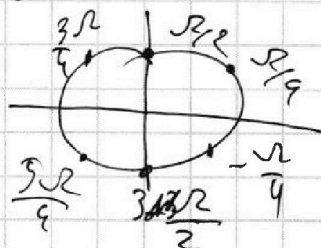
$$= \sqrt{24 \cdot 2 + 2 \sqrt{24^2 - x^2}}$$

max при $x=0$ $4\sqrt{28}$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

~~$\cos \alpha =$~~

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k$$



$$2\sqrt{24} \quad \sqrt{36} + \sqrt{20}$$

$9.6 \quad \sqrt{36+20+2\sqrt{720}}$

$$\sin \alpha = 0$$
$$\cos \alpha = 1$$

~~$28 = 3 + 15$~~

$$2\sqrt{28} \quad \sqrt{36} + \sqrt{20}$$

$$11.2 \quad \sqrt{36+20+2\sqrt{720}}$$

$$28^2 \sqrt{720} = 20 \cdot 36 < 28^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

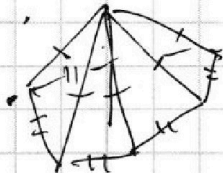


методом

$$\cos 2y = \sin^2 y \quad \cos^2 y = \cos x - y$$

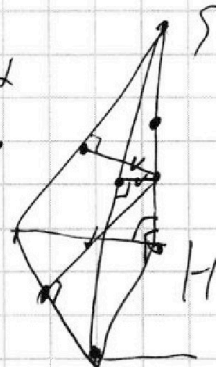
$$(x; 1-x-2y); (x; \frac{x+2y}{3})$$

$$x-y = \frac{1}{3}(2y) \quad x = \frac{1}{3}y$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \cos d$$

$$\pi\left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{y}{2}\right) = -\arccos \frac{y}{2}$$



$$\arccos \frac{x}{4} > -\arccos \frac{y}{2}$$

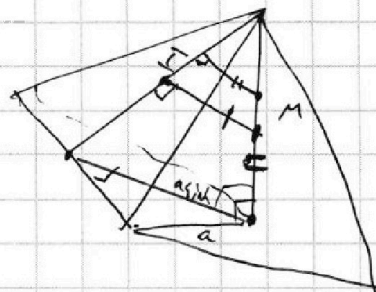
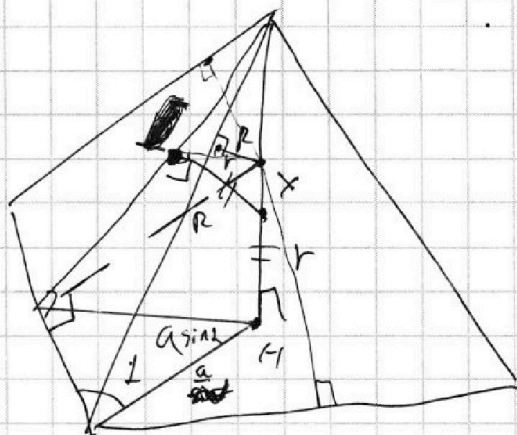
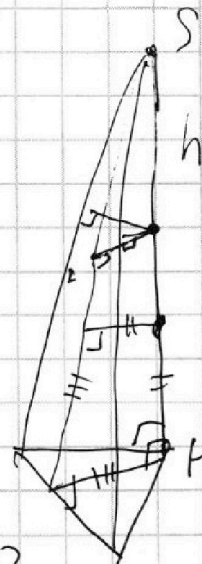
$$A+B \geq 0$$

$$\arccos \arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$= \text{нпр}$$

$$\arccos \frac{x}{4} = 0$$

$$\arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

