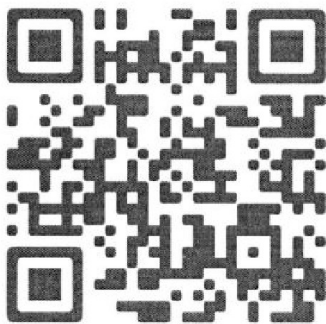




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



✎ [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

✎ [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

✎ [5 баллов] ✎ Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

✎ [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одинадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одинадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одинадцатиклассников не изменилось?

✎ [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1: пусть $A = 1111 \cdot a$, где $a \in [1; 9]$, $a \notin \mathbb{Z}$, тогда:

$$A \cdot B \cdot C = 1111 \cdot a \cdot B \cdot C = k^2 \quad \text{тогда:}$$

$$k^2: 1111, \quad \text{т.к. } 1111 \leq 11 \cdot 101 \quad \text{то } k: 1111$$

$$k^2: 1111^2, \quad \text{т.к. } 1111 \cdot a \cdot B \cdot C: 1111^2, \quad a \cdot B \cdot C: 1111,$$

$$\text{т.к. } \begin{cases} a \cdot B \cdot C: 11 \\ a \cdot B \cdot C: 101 \end{cases}$$

Т.к. $C \leq 99$, то C может делиться только на 11. Т.к. $B \leq 999$, то B может делиться нацело на 11 или на 101, но не делится на 1111. ~~Тогда~~ $a \leq 9$,

тогда ~~наиб~~ удовлетворяет единственный вариант, когда $B: 101$, $C: 11$, т.к. $C = 11 \cdot t$ ($t \notin \mathbb{Z}$, $t \in [1; 9]$), и среди цифр C хотя бы одна единица, то $C = 11$.

Т.к. $B = 101 \cdot f$ ($f \notin \mathbb{Z}$, $f \in [1; 9]$), и среди цифр B хотя бы одна семёрка, то $B = 707$, тогда:

$$1111 \cdot a \cdot 707 \cdot 11 = k^2, \quad 7a = \left(\frac{k}{1111}\right)^2, \quad \text{т.к. } 7a - \text{квадрат, значит } a = 7, \quad A = 7777$$

Ответ: $(7777; 707; 11)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N2: \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{1}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$(x+y+3) \left((x-4)(y+4) - xy \right) = 0$$

① $x+y+3=0$, т.к. $x>0, y>0$ (по условию), то $x+y>0$, $x+y+3>3$, т.е. $x+y+3>0$, $x+y+3 \neq 0$, ~~противоречие~~

$$\textcircled{2} \quad (x-4)(y+4) - xy = 0 \quad 4x - 4y - 16 = 0$$

$$x = y+4$$
$$x^3 - y^3 - 12xy = (y+4)^3 - y^3 - 12y(y+4) = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - 12y^2 - 48y - y^3 = 64$$

$$x^3 - y^3 - 12xy = 64$$

Отв: 64.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N3: a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \cdot \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cdot \cos \pi y$$

$$2 \cdot \sin \frac{\pi y - \pi x}{2} \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \pi y = 2 \cdot \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi y$$

$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \left(\sin \frac{\pi y - \pi x}{2} \cdot \sin \pi y - \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi y \right) = 0$$

$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \left(\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi y + \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \sin \pi y \right) = 0$$

$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \left(\pi y - \frac{\pi x - \pi y}{2} \right) = 0$$

$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \frac{3\pi y - \pi x}{2} = 0$$

$$\frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ 3y - x = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - x + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{x + 1 + 2k}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: а) $(a; 1 - a + 2n), (b; \frac{b + 1 + 2k}{3}), 2ge$

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}.$

б) $\arccos 2 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]; \arcsin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \text{ тогда}$

$\arccos \frac{x}{2} > \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2}, \frac{x}{2} \leq 1, x \in [-2, 2]:$

1. $x = -2: -\pi > \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2}$

2. $x = -6: \arccos -\frac{6}{2} > \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2}$

$\arccos \frac{x}{2} > \arcsin \frac{1 - x + 2n}{4} - \frac{\pi}{2}$

имеет не более 2 решений

Ответ: б) 31.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4: пусть изначально было a -человек, тогда вероятность попадания вместе на концерт была равна $\frac{4}{a} \cdot \frac{3}{(a-1)} = \frac{12}{a(a-1)}$

пусть билетов стало $b+4$, ^($b \geq 0$) тогда вероятность стала $\frac{(b+4)}{a} \cdot \frac{(b+3)}{(a-1)} = \frac{(b+4)(b+3)}{a(a-1)}$, тогда:

$$1. \frac{12}{a(a-1)} = \frac{(b+4)(b+3)}{a(a-1)}, \quad 12 = b^2 + 7b + 12$$

$$b^2 + 7b - 12 = 0$$

$$(b+15)(b-8) = 0$$

$b = -15$, не удовлетворяет условию
 $b = 8$, т.е. 12 билетов было выделено на концерт

Ответ: 12 билетов

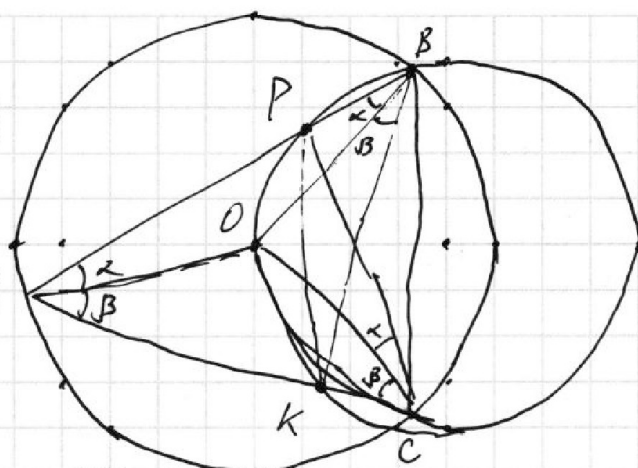


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№5: 1. $\angle AOC = k$
2. $\angle OAB = \angle OBA = \angle (AO=OB=R)$
 $\angle OAC = \angle OCA = \beta (AO=OC=R)$
R-радиус ω ,
3. $\angle OBL = \angle OCL = \beta = \frac{1}{2} \angle OK$
(вписанный)
 $\angle PBO = \angle PCO = \angle = \frac{1}{2} \angle OP$
(вписанный)

4. $\angle BAC = \angle ABK = \alpha + \beta$, $AK = BK$ ($\triangle AKB - \text{пб}$)
5. $\angle BAC = \angle PCA = \alpha + \beta$, $AP = PC = 16$ ($\triangle APC - \text{пб}$)
6. $AP \cdot AB = AK \cdot AC$ (т-о секущих), $AK = \frac{16 \cdot 24}{22} = \frac{192}{11}$

7. $KC = 22 - \frac{192}{11} = \frac{50}{11}$, $AK = BK = \frac{192}{11}$

8. $\angle ABC = 180^\circ - \angle PKE$ ($PBCK$ - вписанный), $\angle AKP =$

$= 180^\circ - \angle PKE$, $\angle AKP = \angle ABC$

9. 1) $\angle BAC$ общий | $\triangle APK \sim \triangle ACB$: $\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PK}$, $PK = \frac{8}{11} BC$
2) $\angle AKP = \angle ABC$

10. Т. Птолемея $PKCB$: $PK \cdot BC + PB \cdot KC = PC \cdot KB$

$$\frac{8}{11} BC^2 + 8 \cdot \frac{50}{11} = 16 \cdot \frac{192}{11} \quad BC^2 = 384 - 50 = 334$$

11. Т. косинусов $\triangle ABC$: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\alpha + \beta)$

$$324 = 576 + 484 - 2 \cdot 24 \cdot 22 \cdot \cos(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) = \frac{426}{2 \cdot 22 \cdot 24} = \frac{33}{48}$$

$$12. \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \frac{33^2}{48^2}} = \frac{9\sqrt{5}}{48} = \frac{3\sqrt{5}}{16}$$

$$13. S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2} = \frac{24 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{16}}{2} = \frac{99\sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $\frac{99\sqrt{5}}{2}$



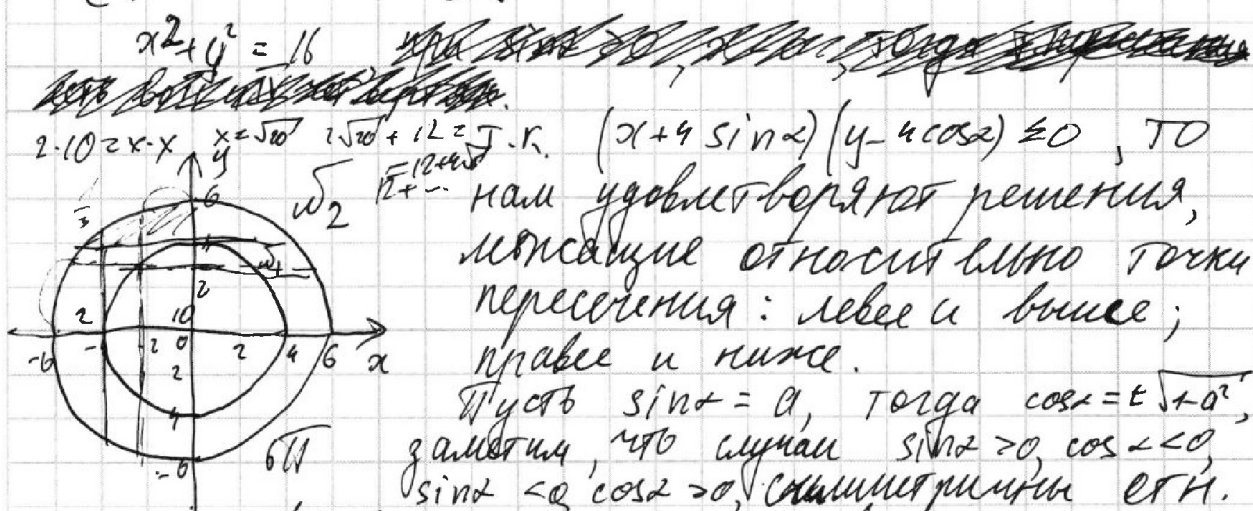
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6: $\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$ $x^2+y^2 \leq 36$ - область, ограниченная окружностью с центром в точке $(0;0)$, радиусом 6.
Заметим, что $x = -4\sin\alpha$ (прямая) и $y = 4\cos\alpha$ пересекаются на ~~окружности радиуса 4~~ окружности радиуса 4, с центром в точке $(0;0)$, т.к.т.
 $\begin{cases} x = -4\sin\alpha \\ y = 4\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 16\sin^2\alpha \\ y^2 = 16\cos^2\alpha \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = 16 \leq 36$ (все части):



Вспомогательная окружность $(x-\sqrt{10})^2 + y^2 = 10$ в окр. $\sqrt{10}$. Заметим, что при $\cos\alpha \geq 0$ и $\cos\alpha \leq 0$ при $\alpha \geq 0$ периметры фигур равны. Нам достаточно рассмотреть случай $\cos\alpha \leq 0$. Тогда нетрудно заметить, что наибольший периметр достигается когда наибольшие длины отрезков $x = -4\sin\alpha$ и $y = 4\cos\alpha$ ограниченных окружностью т.е. они всегда высекают окружность длиной 6π , значит, когда $\alpha = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, тогда $M = 12 + 4\sqrt{10} + 6\pi$

Отв: $12 + 4\sqrt{10} + 6\pi$; $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

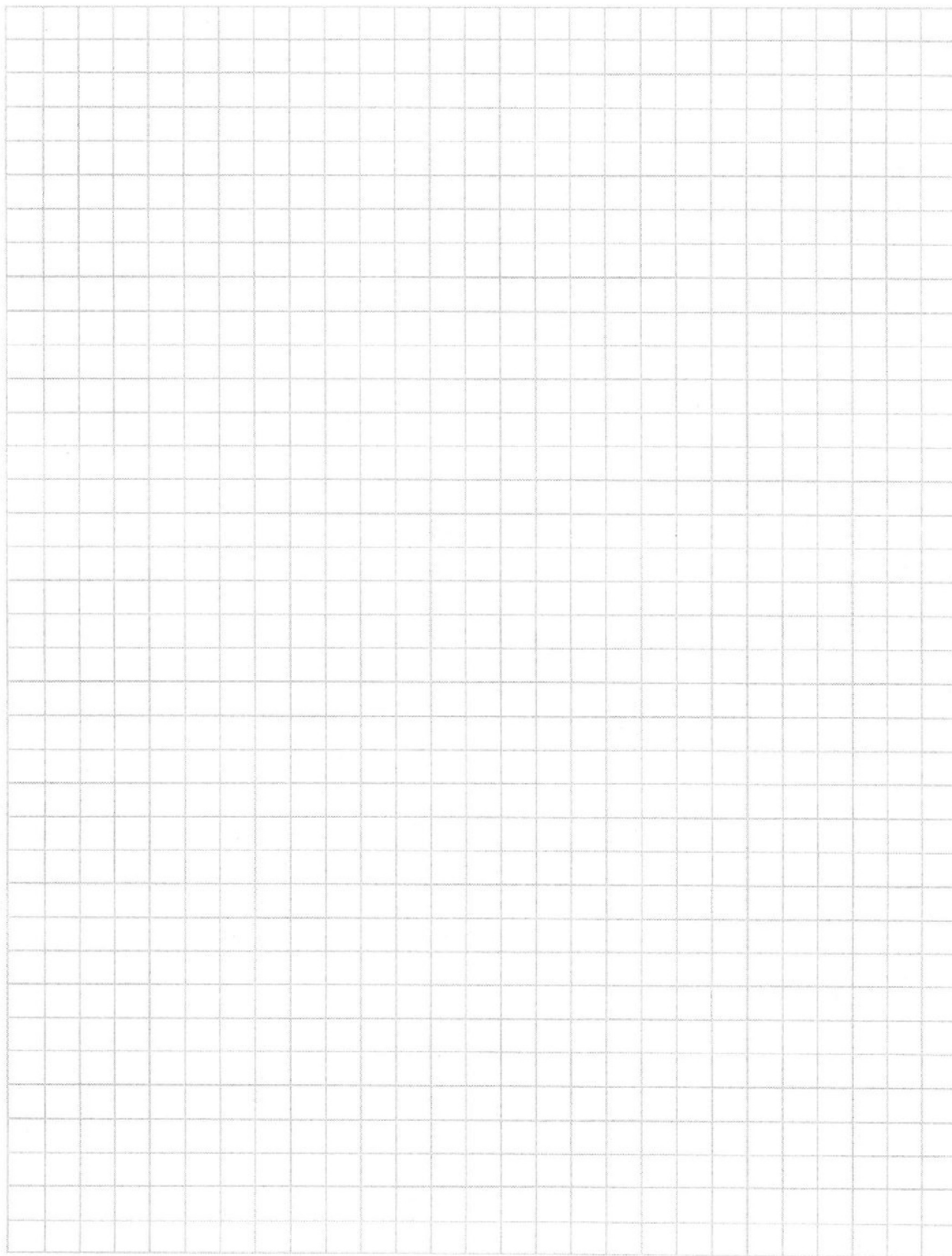
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



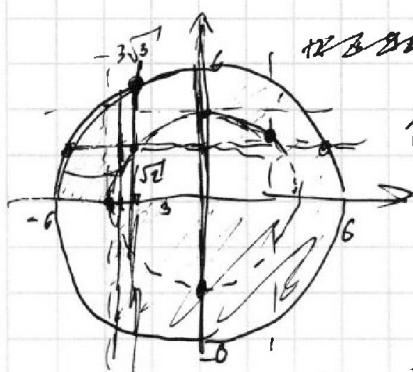


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

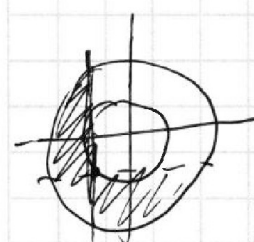
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



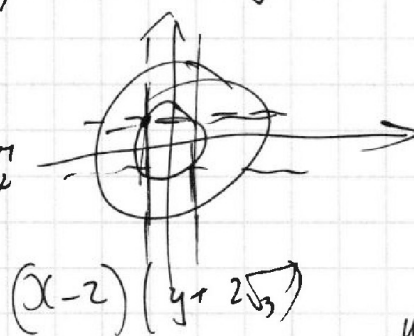
$$\begin{cases} x + 4 \sin \alpha \geq 0 \geq y - 4 \cos \alpha \\ y - 4 \cos \alpha \leq 0 \end{cases} \Rightarrow y \leq 4 \cos \alpha$$
$$x + 4 \sin \alpha \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \sin \alpha$$
$$y \leq 4 \cos \alpha \Rightarrow y \leq 4 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$
$$y \leq x + 4 \sin \alpha + 4 \cos \alpha$$
$$y \leq x + 4 \sin \alpha + 4 \cos \alpha$$
$$y \leq x + 4 \sin \alpha + 4 \cos \alpha$$
$$y \leq x + 4 \sin \alpha + 4 \cos \alpha$$



$$y(x+4) \leq 0$$
$$x \geq -4 \quad y \leq 0$$
$$x \leq 4 \quad y \geq 0$$
$$(x+2)(y-2\sqrt{3}) \leq 0$$

$$\begin{cases} x = -4 \sin \alpha \\ y = 4 \cos \alpha = 4 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 = 16 \sin^2 \alpha \\ y^2 = 16 \cos^2 \alpha \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

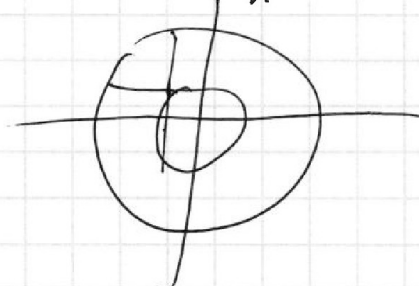
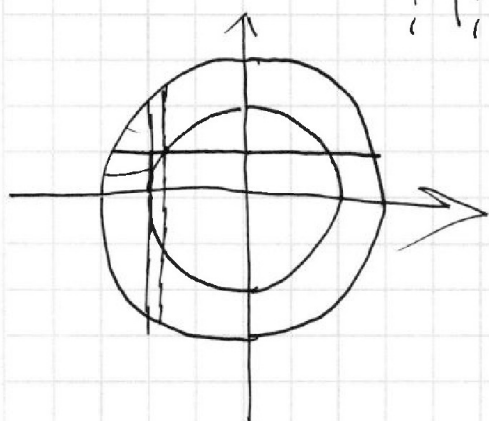


$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\alpha = 2\sqrt{3}$$
$$y \neq -\frac{1}{2}$$
$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y = \pm \frac{1}{2}$$



$$(a, \pm \sqrt{3})$$

$$\frac{\pi}{n} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$8BC^2 + 8 \cdot 56 = 16 \cdot 492$$

$$BC^2 = 2 \cdot 191 - 50 = 382 - 50 = 334$$

$$334 =$$

$$\begin{array}{r} 726 \overline{) 22} \\ 66 \overline{) 33} \\ \hline 60 \end{array}$$

$$(48 + 33)(48 - 33) =$$

$$= \sqrt{\frac{81 \cdot 15}{48^2}} =$$

$$\frac{9\sqrt{15}}{48} =$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ 440 \\ \hline 484 \\ - 334 \\ \hline 150 \end{array} \quad \begin{array}{r} 29 \\ \times 29 \\ \hline 58 \\ 261 \\ \hline 841 \\ - 576 \\ \hline 265 \\ - 234 \\ \hline 31 \end{array}$$

$$2 \cdot \sin \frac{\pi y - \pi x}{2} \cdot \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} \cdot \sin \pi y =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi y \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2}$$

$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \left(\sin \frac{\pi y - \pi x}{2} \cdot \sin \pi y - \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi y \right) = 0$$

$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi y - \pi x}{2} = 0$$

$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} = 0 \quad \cos = 0 \quad \frac{\pi}{2} + \pi n$$

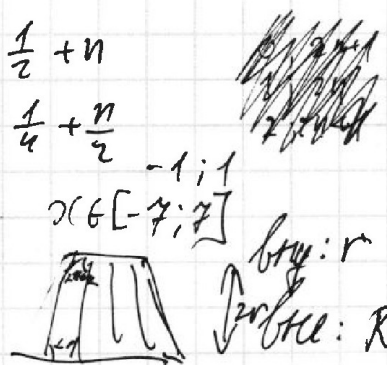
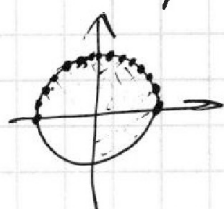
$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + n$$

$$x+y = 1 + 2n$$

$$\arccos \frac{x}{2} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{2} - \arcsin \frac{1-x+2n}{2} > -\frac{\pi}{2}$$



$$[-\pi; 0] \cup [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$[-\pi; 0] - [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\arcsin \sqrt{1 - \frac{x^2}{49}} >$$

$$\frac{1-x}{4} + \frac{\pi}{2}$$

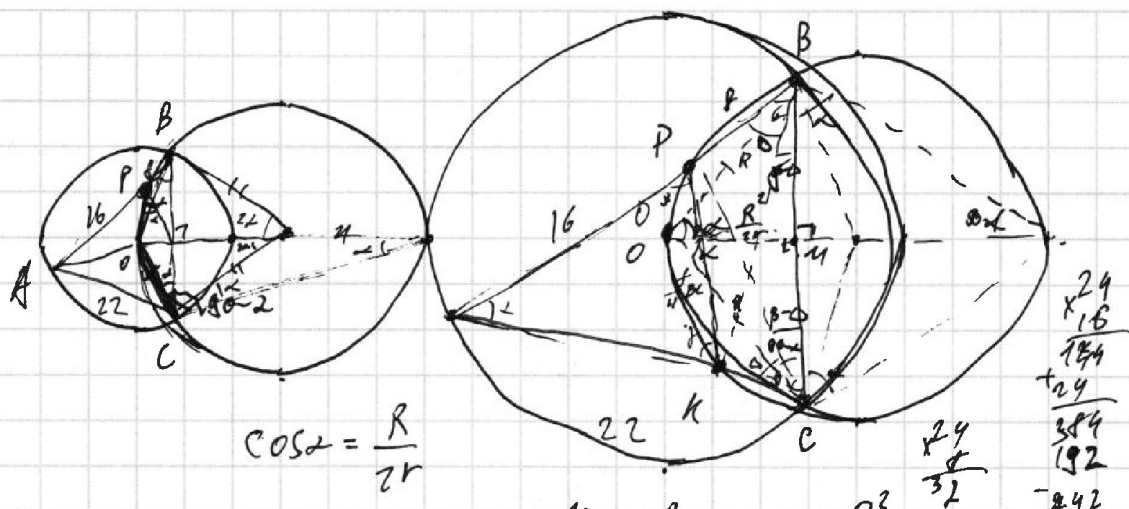


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \alpha = \frac{R}{2r}$$

123 - бер. Q

$$\frac{12}{11} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{R^2}{2r} \cdot \left(2r - \frac{R^2}{2r}\right) = x^2 \quad x^2 = \frac{R^2(4r^2 - R^2)}{4r^2} \quad x = \frac{R}{2r} \sqrt{4r^2 - R^2}$$

$$PK = \frac{16}{11} \cdot \frac{8}{11} \cdot BC$$

$$2r = \frac{8 \cdot BC}{11 \cdot \sin \alpha} = \frac{8 \cdot 11}{\sin(\beta - \alpha)}$$

$$\frac{22 \cdot 24 \cdot BC}{4R} = \frac{22 \cdot 6BC}{R}$$

$$11 \sin \alpha =$$

1234

$$2R = \frac{BC}{\sin \alpha}$$

$$\frac{12}{11} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

$$BC = 2R \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{BC}{R} = 2 \sin \alpha$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R \quad OB^2 = (2r - R)^2 + R^2 = 4r^2 - R^2$$

$$2r = \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{4r^2 - R^2}}{\sin \alpha}$$

$$BC = 2r \cdot \sin \alpha = 2R \cdot \sin \alpha$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot r = R \sin \alpha$$

$$R = 2r \cos \alpha$$

$$BC = \sqrt{22^2 + 24^2 - 2 \cdot 22 \cdot 24 \cdot \cos \alpha}$$

$$374 = 24^2 + 22^2 - 292$$

$$\frac{16}{22} = \frac{8}{11}$$

$$\frac{24 \cdot 8}{11} = \frac{192}{11}$$

$$16 \cdot \frac{192}{11} = \frac{3072}{11}$$

$$BC^2 = 384 - 50 = 334 = 2 \cdot 167$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) (a \cdot 1111) \cdot (b \cdot 100 + c \cdot 10 + d) (10e + f) = k^2$$

$$k^2 : 1111 = 11 \cdot 101$$

$$k^2 : 1111^2$$

$$k \geq 1234321$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ 1111 \\ \hline 1111 \\ 1111 \\ \hline 1111 \\ 1111 \\ \hline 1234321 \end{array}$$

$$100b + 10c + d = 6 \cdot 101$$

$$10e + f = 11 \cdot 101$$

$$a \cdot 1111 \cdot 1111 \cdot 7 = k^2 \quad a = 7 \quad (7777; 707; 11)$$

$$2) \frac{x^4}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y+y} + \frac{3}{(x-y)(y+y)}$$

$$x^3 - y^3 - 12xy$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-y)(y+y)}$$

$$① x+y = -3$$

$$② xy = xy - 2y + 4x - 16 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{y^4} \dots$$

$$x-y = 4 \quad x < y < 4$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy$$

$$(x-y)((x+y)^2 - 2xy) - 12xy = \frac{1}{12} \frac{1}{1331}$$

$$= (x-y)(x+y)^2 - 2xy(x-y+12) = 4(2y+4)^2 - 2xy$$

$$(y+4)^3 - y^3 - 12xy(y+4) = y^3 + 12y^2 + 3 \cdot 16y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y = 64$$

$$① x = -y-3, \text{ не подходит } x, y \geq 0$$

$$3) \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\text{так } \alpha+\beta = x \quad \alpha-\beta = y$$

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2 \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\alpha+\beta = x \quad \alpha-\beta = y$$

$$① \sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = 0 \quad \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$= 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$2 \cdot \sin \pi \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} - \sin \pi y = 2 \cdot \cos \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \pi y$$

$$① \cos(\frac{x+y}{2}) \pi = 0$$

$$\text{так } \pi \frac{x-y}{2} \cdot \pi y = 1$$

$$\text{так } \pi \frac{x-y}{2} = \text{так } \pi y$$

$$\sin \frac{x-y}{2} \cdot \sin y$$

$$② \sin \pi \frac{x-y}{2} = \cos \pi y$$

$$\sin \pi \frac{x-y}{2} - \cos \pi y = 0$$

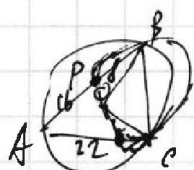


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

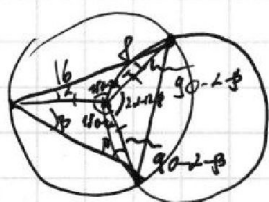
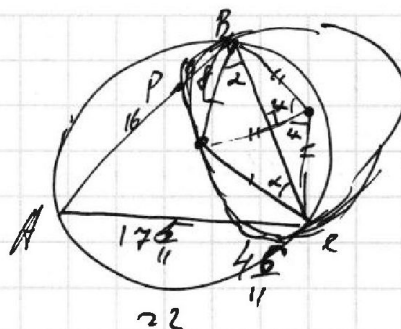
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 16 \cdot 24 &= (22-x) \cdot 22 \\ 8 \cdot 24 &= (22-x) \cdot 11 \\ 192 &= 242 - 11x \\ 11x &= 50 \quad x = \frac{50}{11} \approx 4 \frac{6}{11} \end{aligned}$$

$$17 \cdot \frac{6}{11} \cdot 22 = 16 \cdot 24$$

$$187 + 36 = \frac{192}{11} \cdot 22 = 16 \cdot 24$$



$$2R = \frac{BC}{\sin(2+\beta)} = \frac{24}{\sin(90-2)} = \frac{22}{\sin(90-\beta)}$$

$$2r = \frac{R}{\sin(90-2-\beta)} = \frac{R}{\cos(2+\beta)}$$

$$\cos 2 \cdot 11 = \cos \beta \cdot 12 \quad \cos \beta = \frac{11}{12} \cdot \cos 2$$

И.	Чис.	Ден.	Вер.
а	а	4	$\frac{4}{a} \cdot \frac{3}{(a-1)} \cdot 2$
парам	а	4+6	$\frac{(4+6)(3+6)}{a \cdot (a-1)}$

$$\frac{42}{a(a-1)} \cdot 11 = \frac{(6+4)(6+3)}{a(a-1)}$$

$$132 = 6^2 + 76 + 12$$

$$b^2 + 7b - 120 = 0$$

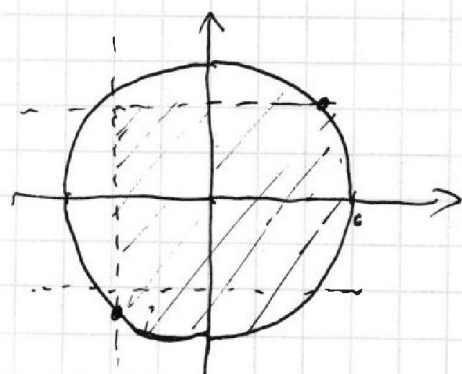
$$(b+15)(b-8) = 0 \quad b = 8$$

(12)

$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+4\sin\alpha \geq 0 \\ y-4\cos\alpha \leq 0 \\ x+4\sin\alpha \leq 0 \\ y-4\cos\alpha \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -4\sin\alpha \\ y \leq 4\cos\alpha \\ x \leq -4\sin\alpha \\ y \geq 4\cos\alpha \end{cases}$$

(123)



$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$