



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

A - четырехзнач. число, сост. из одинак. цифр

↓

то $\forall a \in \overline{aaaa}$, где $a \in [1; 9] \in \mathbb{Z}$

↓

$$A = a \cdot 1111 = a \cdot \underbrace{11} \cdot \underbrace{101} \quad , \quad a \leq 11 \Rightarrow a \neq 11$$

прост. простое.

Чтобы произв. A, B, C было к.в. нужно чтобы одно из B и C : 101, т.е. в к.в. простых ст. входящ. ~~101~~ нечети $\Rightarrow \geq 2$

$$C - \text{двузнач.} \Rightarrow C < 100 \Rightarrow C \not\equiv 101 \Rightarrow B : 101$$

Примем B содержит ≥ 1 "1"

$$B = B \cdot 101 = \overline{B0B} \Rightarrow \text{такое возм. только при } B=1 \Rightarrow B=101$$

$B \in [1; 9] \in \mathbb{Z}$

Т.е. C должно : 11, т.е. ст. входящ. в A, B, C нечети., а A : 11 ≥ 121 , т.е. ≥ 2 $a \in [1; 9] \in \mathbb{Z}$

Примем C содержит 5 по усл. $\Rightarrow C=55$, тогда $a \cdot 11 = \overline{55}$ не содержит 5.

$$B=101 \quad A=a \cdot 11 \cdot 101 \quad \text{Т.е. в } C \text{ 5 входит один раз.} \Rightarrow A : 5$$

$C=55$

иначе A, B, C не к.в. $\Rightarrow a=5$, т.е. $a \in [1; 9] \in \mathbb{Z}$ а! 5

Ответ: $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K_1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{y+x+1}{xy}$$

$$\begin{array}{l} x \rightarrow x-3 \\ y \rightarrow y+3 \end{array} \quad \text{по усл.} \Rightarrow \quad K_2 = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{(y+3)+(x-3)+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$K_1 = K_2 \Rightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

числители равны $\Rightarrow$ знамен. равны

$$\begin{aligned} xy &= (x-3)(y+3) \\ xy &= xy + 3x - 3y - 9 \end{aligned}$$

$$x - y - 3 = 0 \quad x = y + 3$$

Примем ~~$xy = 0$~~ $xy = (x-3)(y+3) \neq 0$, т.к. $x, y > 0 \Rightarrow$ все парн $x = y + 3$
 $x > 0$ погр.
и др. ших нет

$$\begin{aligned} M = x^3 - y^3 - 9xy &= (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y = \\ &= 27 \end{aligned}$$

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

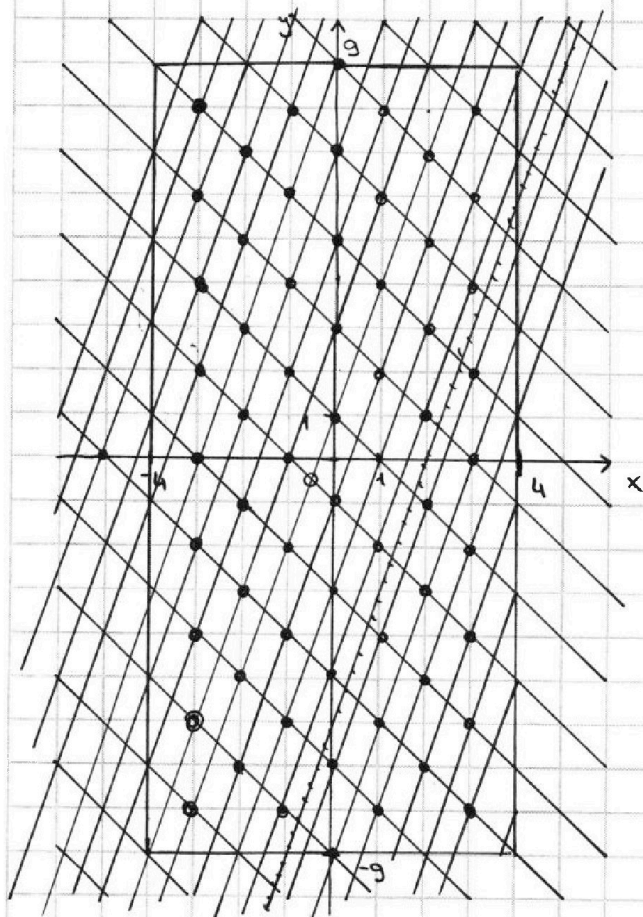
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Изобразим на м-ти м-во (x, y)



$$\begin{cases} y = 3x + 24 - 1 & \text{с семейство} \\ & \text{прямых} \\ y = -x + 24 + 1 & \text{3x-1 со сдвигом на 2} \\ & \text{с семейство} \\ & \text{прямых} \\ & -x+1 \text{ со} \\ & \text{сдвигом на 2} \end{cases}$$

Посчитаем кол-во

целочисл. точек.

Внутри параллелога:

со сторонами 8 и 16
еще все подходит

$$8 \cdot 7 + 4 = 60$$

56

Ответ: 60



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi y \cos \pi x + \sin \pi y \sin \pi x$$

$$-\cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi - 2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y) \Rightarrow \begin{cases} \pi - 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x - \pi = \pi x - \pi y + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

"

$$\begin{cases} y = 3x + 2k - 1, & k \in \mathbb{Z} \\ x + y = 2k + 1, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 2k - 1, & k \in \mathbb{Z} \\ y = -x + 2k + 1, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{т.е. все отшли. от } x \text{ по мети.}$$

a) Ответ: $\{(x, 3x + 2k - 1) \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x, -x + 2k + 1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$

$\arccos \frac{x}{4} \leq \pi \Rightarrow$ Подходят $\forall x_{\text{лю}}$, если в ОДЗ
 $\arccos \frac{y}{9} \leq \pi$ кроме $\arccos \frac{x}{4} = \pi$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = -1 \\ \frac{y}{9} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -9 \end{cases}$$

$x \in [-4; 4]$ - ОДЗ, т.е. $\cos k \in [-1; 1]$
 $y \in [-9; 9]$ ~~подх. все парит.~~

$$\begin{cases} y = 3x + 2k - 1 \\ y = -x + 2k + 1 \end{cases} \quad \text{все отшли. от } x \text{ по мети.}$$

~~$x = -3$~~
 ~~$x = -2$~~
 ~~$x = -1$~~
 ~~$x = 0$~~
 ~~$x = 1$~~
 ~~$x = 2$~~
 ~~$x = 3$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3 было n одишагустикое сшивов.

"

Вероятность $p_0 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{2}{n(n-1)}$ (т.ч. 2 билета удали Петя и Вася)

Всего n способов выбрать из n человек 4

$$p_0 = \frac{\frac{(n-2)!}{2!(n-4)!}}{\frac{n!}{4!(n-4)!}} = \frac{(n-2)! \cdot 4!}{2! \cdot (n-4)! \cdot n!} = \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} = p_1$$

Вероятность p_{01} :

$$p_{01} = \frac{C_{n-2+a}^{a+2}}{C_{n+a}^{4+a}} = \frac{(n-2)! \cdot (4+a)!}{(a+2)! \cdot n!} = \frac{(4+a)(3+a)}{n(n-1)} = p_2$$

3 добавили a билетов.

n способов дать $4+a$ билетов n людям

$$p_2 = \frac{\frac{(n-2)!}{(a+2)!(n-a-4)!}}{\frac{n!}{(4+a)!(n-a-4)!}} = \frac{(n-2)! \cdot (4+a)!}{(a+2)! \cdot n!} = \frac{(4+a)(3+a)}{n(n-1)} = p_2$$

"

$p_2 = 3,5 p_1$

$$3,5 \frac{12}{n(n-1)} = \frac{(4+a)(3+a)}{n(n-1)} \Rightarrow 42 = 12 + 7a + a^2$$

$a^2 + 7a - 30 = 0$

$(a+10)(a-3) = 0$

$$\begin{cases} a=3 \\ a=-10 \end{cases} \Rightarrow a=3$$

добавили

положит. кол-во билетов

$a+4 = 7$

Ответ: 7

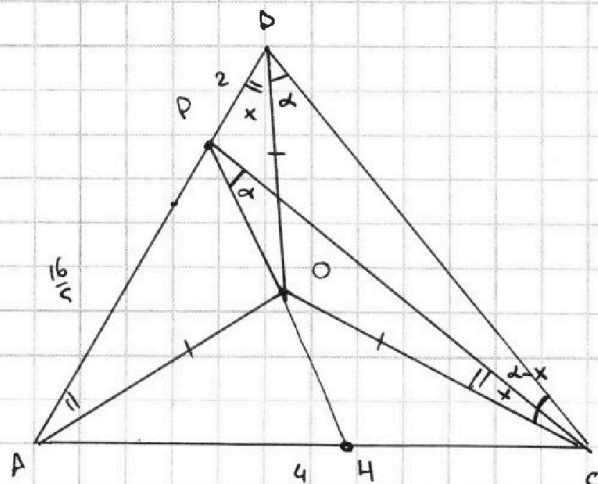


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$OA = OB = OC = R$$

$$\angle BOC: BO = OC \Rightarrow \angle CBO = \angle OCB$$

$$\begin{aligned} \angle BCO &= \alpha \\ \angle PCO &= x \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \angle BCP &= \alpha - x \\ \angle BCO &= \angle PCO \end{aligned}$$

POCB - впис., т.к. точки на
одн. окруж.



$$\angle PBO = \angle PCO = x$$

$$\angle BPO = 180^\circ - \angle POC \quad \angle BPC = 180^\circ - \angle PBC - \angle PCB = 180^\circ - (x + \alpha) - (\alpha - x) = 180 - 2\alpha$$

$$\angle OPC = \angle OBC = \alpha \Rightarrow \angle APO = 180 - \angle BPC - \angle CPO = 180 - (180 - 2\alpha) - \alpha = 180 - \alpha$$

или смежный

т.е. PO - биссектриса $\angle APC$

$$\begin{aligned} \angle BAO &= \angle ABO = x, \text{ т.к. } \triangle ABO - \text{р/б} \\ \angle OAC &= \angle OCA = \alpha, \text{ т.к. } \triangle AOC - \text{р/б} \end{aligned} \Rightarrow \triangle APC - \text{р/б, т.к. } \angle PAO + \angle OAC = \angle PCO + \angle OCA$$

PO - высота и медиана

$$AH = HC, \text{ т.к. } PO - \text{медиана}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{16/5}{2} = \frac{2}{16/5} = \frac{5}{8}$$

$$\text{т.к. } PH - \text{высота} \Rightarrow \angle PHA = 90^\circ$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8} \Rightarrow S = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$S = \frac{26/5 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8}}{2} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

Ответ: $\frac{13\sqrt{39}}{10}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично для хордонт. $= 6 \sqrt{-\frac{4\sin^2 \alpha}{9} + 1}$

Сумма фук g_{up} , полуш. пересел. перш. хорд $= \frac{1}{2}$ длины окруж =
 $= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3 = 3\pi$

$\Rightarrow$
 $P = \max 6 \sqrt{-\frac{4\cos^2 \alpha}{9} + 1} + 6 \sqrt{-\frac{4\sin^2 \alpha}{9} + 1} + 3\pi$

госуд. при $\max \sqrt{-\frac{4\cos^2 \alpha}{9} + 1} + \sqrt{1 - \frac{4\sin^2 \alpha}{9}} =$

$= \sqrt{1 - \frac{4 - 4\sin^2 \alpha}{9}} + \sqrt{1 - \frac{4\sin^2 \alpha}{9}} = \sqrt{\frac{5 + 4\sin^2 \alpha}{9}} + \sqrt{\frac{9 - 4\sin^2 \alpha}{9}}$

$f(\alpha)$
 $\text{Ищем } \max \sqrt{5 + 4\sin^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha} \geq 0$
 $f(\alpha)^2$ имеет ~~то же~~ монотонное $\max$

$5 + 4\sin^2 \alpha + 9 - 4\sin^2 \alpha + 2\sqrt{(5 + 4\sin^2 \alpha)(9 - 4\sin^2 \alpha)}$

$14 + 2 \sqrt{(5 + 4\sin^2 \alpha)(9 - 4\sin^2 \alpha)}$
 $\max?$

$4\sin^2 \alpha = t, t \geq 0$

$(5 + 4t)(9 - t) = 45 + 4t - t^2 \quad \max \text{ в вершине } t = \frac{4}{2} = 2$

$\Rightarrow 4\sin^2 \alpha = 2 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Т.е. $\max P$ госуд. при $\alpha = 45^\circ \quad \cos \alpha = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Посчитаем $M = 6 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}} + 6 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}} + 3\pi = 3\pi + \frac{12\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$ Ответ:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 12 ИЗ 2

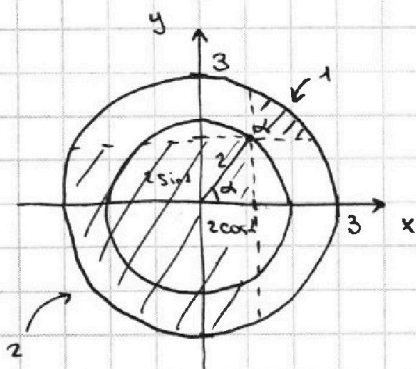
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 & (1) \\ x^2+y^2 \leq 9 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \begin{cases} x-2\cos\alpha \geq 0 \\ y-2\sin\alpha \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2\cos\alpha \leq 0 \\ y-2\sin\alpha \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases}$$

Изобразим на коорд. пл-ти.

(2) $\Leftrightarrow (x,y)$ лежит внутри окр. радиуса 3, т.е. x^2+y^2 - радиус 3 по т. Пифагора.



Кроме того изобразим окр. рад. 2

$2\cos\alpha$ = проекция отрезка из центра координат в т. А тангенса, что $\angle A = \alpha$
 Аналогично $2\sin\alpha$ = проекц. OA на ось y

Если $\begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \end{cases}$ - это 4 точки, лежащие внутри 1

Если $\begin{cases} x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases}$ - точки, лежащие внутри 2

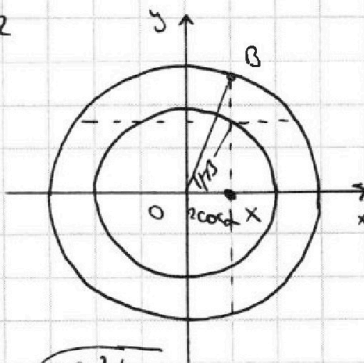
Найдем min периметр всех таких фигур

Найдем β : $\cos\beta = \frac{OX}{OB} =$

$$= \frac{2\cos\alpha}{3}$$

$$BX = OB \sin\beta = 3 \sin\beta = 3 \sqrt{1 - \frac{4\cos^2\alpha}{9}} = 3 \sqrt{\frac{4\cos^2\alpha}{9} + 1}$$

$$\text{Верхн. миним.} = 6 \sqrt{\frac{4\cos^2\alpha}{9} + 1}$$



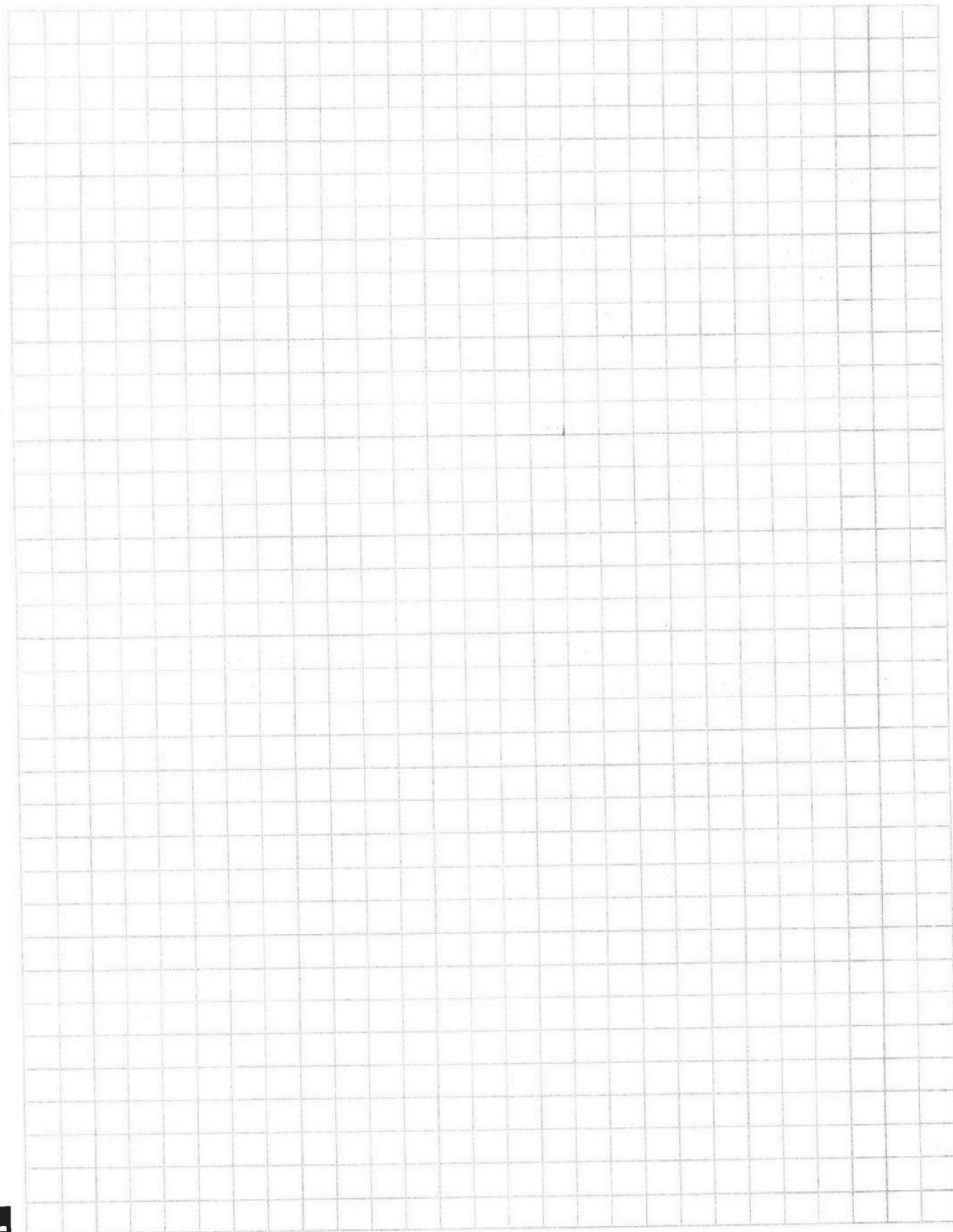


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\frac{16}{5}}{\sin(1+x)} = \frac{R}{\sin d}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{R}{2}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{5}{16} R$$

$$R \cos \beta = \frac{13}{5}$$

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta)$$

$$\sin_1 \sin_2 (\sin_1 \cos_2 + \sin_2 \cos_1) (\sin_1 \cos_2 - \sin_2 \cos_1)$$

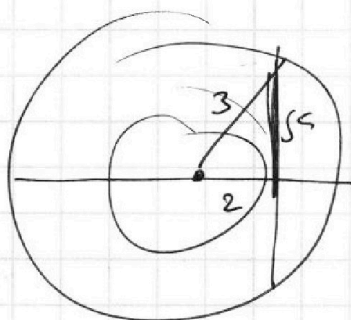
$$\sin_1^2 \cos_2^2 - \sin_2^2 \cos_1^2$$

$$\sin_1^2 (1 - \sin_2^2) - \sin_2^2 (1 - \sin_1^2)$$

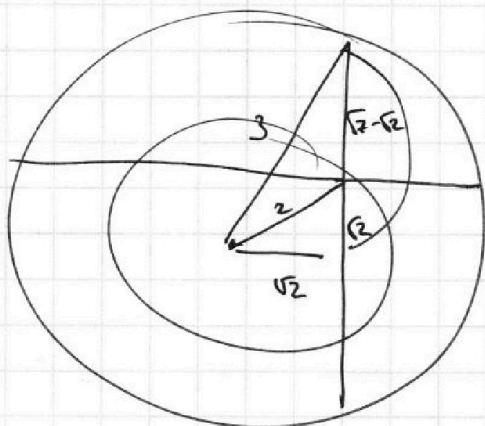
$$\sin_1^2 - \sin_2^2$$

$$\frac{5}{4} R^2 = \cos \beta - \cos \alpha$$

$$\frac{5}{4} R^2 = \frac{13}{5} R$$



$$\sqrt{9-4} = R$$



$$6 + 2\sqrt{5} ? \frac{12\sqrt{2}}{2}$$

$$9-2$$

$$18 + 6\sqrt{5} ? 12$$

$$\begin{array}{r} 2\sqrt{7} \\ + \\ 2\sqrt{7} \\ \hline 4\sqrt{7} + 3\pi \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 7 \\ \hline 112 \\ - 56 \\ \hline 56 \\ \hline 4 \\ \hline 14 \end{array}$$

$$56 + 12\sqrt{2} \approx 112$$

$$12\sqrt{2} \approx 56$$

$$\sqrt{2} \approx 14$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

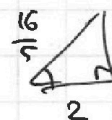
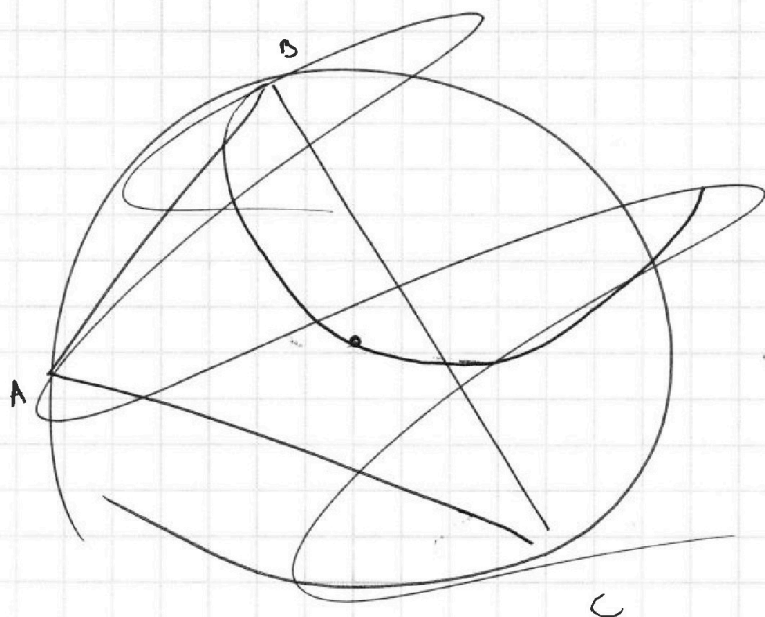
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{13}{10} = \frac{\cos B \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = \frac{(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \cos B}{\sin \alpha} = \cos^2 B + \sin \beta \operatorname{tg} \alpha$$



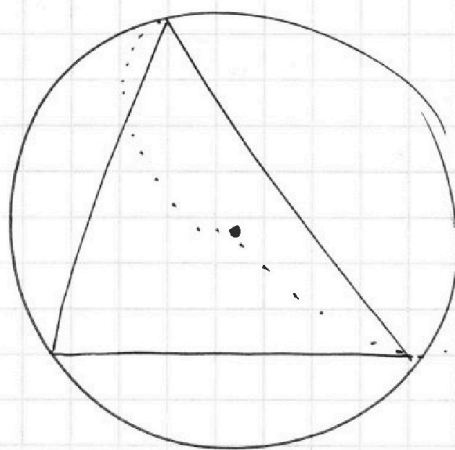
$$\cos = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin = \sqrt{1 - \frac{25}{64}}$$

$$\frac{64 - 25}{64} = \frac{39}{64}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{39}}{20}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

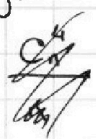
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



n одинаковых шариков.

бума



$$\frac{C_n^2}{C_n^4} = \frac{2! (n-2)!}{n!}$$

$$= \frac{2! (n-2)!}{n!} = \frac{2! (n-2)!}{n!}$$

$$= \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}$$

стала

$$\frac{C_{4+a}^{2+a}}{C_{n+a}^{4+a}} = \frac{(2+a)!}{2! (2+a)!} \cdot \frac{(n-2)!}{(2+a)! (n-4-a)!}$$

$$= \frac{(2+a)!}{2! (2+a)!} \cdot \frac{(n-2)!}{(2+a)! (n-4-a)!}$$

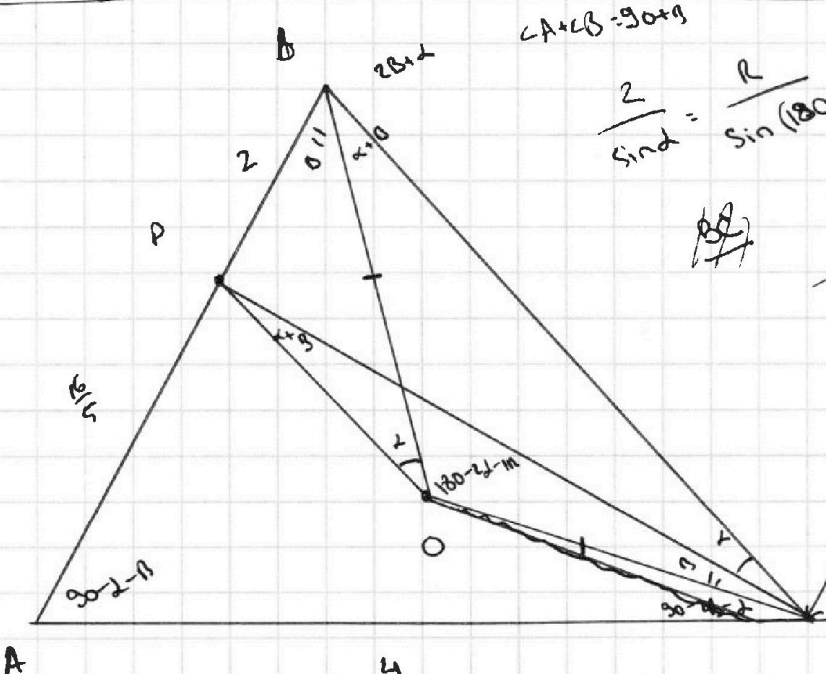
$$= \frac{(3+a)(4+a)}{n(n-1)}$$

$$(3+a)(4+a) = 12 \cdot 3,5 = 42$$

$$12 + 7a + a^2 = 42$$

$$a^2 + 7a - 30 = 0$$

$$(a+10)(a-3) = 0 \quad \begin{cases} a+3 \\ a-10 \end{cases}$$



$$\frac{2}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin(180-\alpha-\theta)} = \frac{R}{\sin(\alpha+\theta)}$$

$$\frac{26}{5} = 2R \quad R = \frac{13}{5} \cos \theta$$

$$\frac{2}{\sin \alpha} = \frac{13}{5 \cos \theta \sin(\alpha+\theta)}$$

$$BC = 2R \cos(\alpha+\theta) = \frac{R}{\sin(\alpha+\theta)}$$

$$4R^2 \cos^2(\alpha+\theta) = 16 + \left(\frac{23}{5}\right)^2 - 2 \cos \alpha \frac{2 \sin(\alpha+\theta)}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{4 \sin(\alpha+\theta) \cos(\alpha+\theta)}{\sin \alpha}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

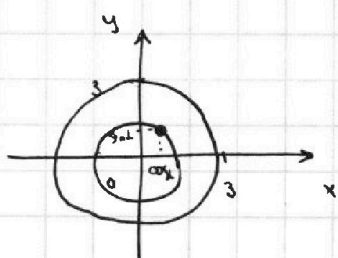
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

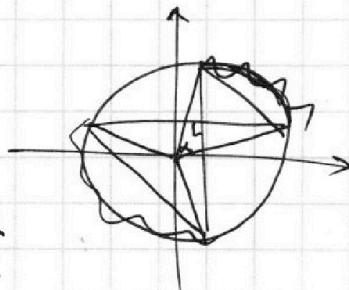
1(2)

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$$

Вспомог. рис. 3.

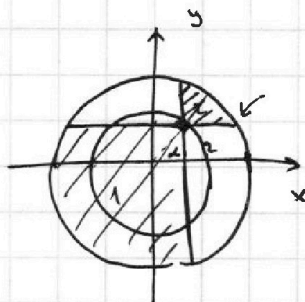


$$\begin{cases} x > 2\cos\alpha \\ y > 2\sin\alpha \\ x < 2\cos\alpha \\ y < 2\sin\alpha \\ x = 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$$

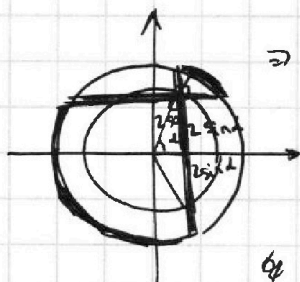


$$6\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

min при $\alpha=45^\circ$

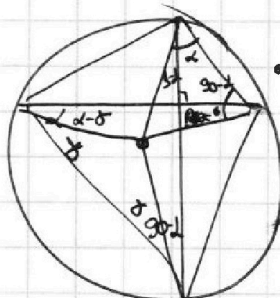
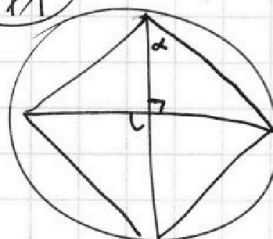
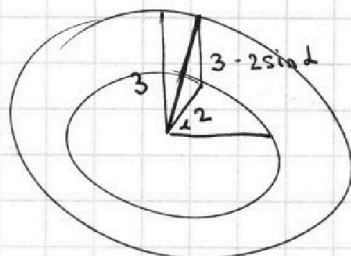
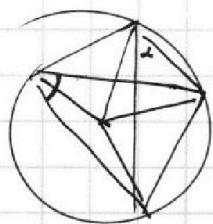
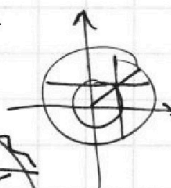


$$P=P_1+P_2$$

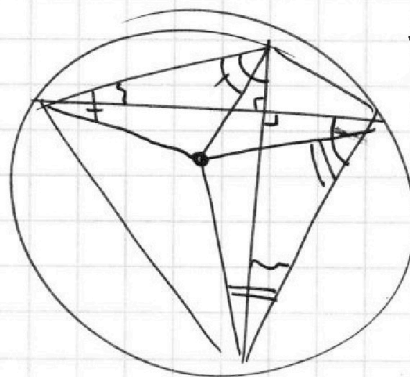


$$\Rightarrow 6\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

min



$$\alpha = 8 - 90 + \alpha$$



$$1+\} = 90$$

$$11+\} + \} + \} + \}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\operatorname{tg} B \sin d = \frac{10}{13}$$

$$\cos B \sin d = \frac{10}{13} \sin B$$

$$\sin(A+B) = \sin B \cos d + \frac{10}{13} \sin B$$

$$\cos B =$$

$$\frac{R}{\cos B} = \frac{13}{5} \quad R \sin B = \frac{13}{5}$$

$$R \cos B = \frac{13}{5}$$

$$R/\sin B = \frac{2}{\sin d} \Rightarrow \cos B \sin B = \frac{2B}{5 \sin d}$$

$$\sin B = \frac{2B}{5 \sin d}$$

Примем $a = 0, 1, 2, \dots, 9$

$$\overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$$

$$\overline{cccc} = c \cdot 1111 = c \cdot 11 \cdot 101$$

$$C = 51, 52, \dots, 59$$

$$15, 25, 35, 45, \dots, 55$$

$$B = 101 \text{ } 0893.$$

$$C = 11 \cdot 5$$

$$a^3 b^3 + c^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + c^3$$

$$(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) + 3abc$$

$$(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) + 3abc$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{xy(x-3)(y+3)} \quad \text{Очев } x = y+3$$

$$\frac{3}{x(x-3)} = \frac{3}{y(y+3)} - \frac{3y-3x+9}{xy(x-3)(y+3)} = 0$$

$$x^3 + (x-3)^3 - 9(x-3)x$$

$$a^3 - b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\frac{1}{x(x-3)} - \frac{1}{y(y+3)} = \frac{y-x+3}{xy(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{(x-3) + (y+3) + 3}{(x-3)(y+3)} = x+y+1$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$3x - 3y - 9 = 0$$

$$x - y - 3 = 0$$

$$\text{либо } x+y+1=0$$

$$\text{т.е. } y = -1-x, \text{ но они не подходят.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$



"

$$\sin \pi x = \frac{x+y}{2}$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$1 - 2\cos^2 \pi x$$

"

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos(\pi x - \pi y)$$

"

$$-\cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(2\pi x - \pi)$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi x - \pi y + \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow \\ 2\pi x = \pi x - \pi y + \pi + 2\pi k \end{cases}$$

$$x = -y + \frac{1}{2} + 2k$$

$$x = -y +$$

$$\textcircled{1} x+y=2k-1$$

$$-4;$$

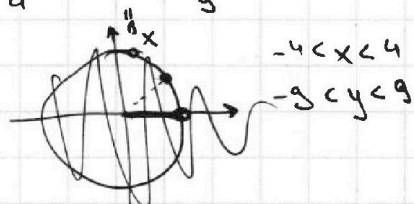
$$\begin{cases} 2\pi x = \pi = \pi x - \pi y + 2\pi k \\ -2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi k \end{cases}$$



$$\pi x = - \begin{cases} x = -y + 1 + 2k \\ x+y=2k-1 \\ y=3x+2k \end{cases}$$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} = 2\pi$$

"



$$\begin{cases} -4 < x < 4 \\ -9 < y < 9 \end{cases}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2\pi \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = 1$$

$$\cos(\arccos \frac{x}{4})$$

$$\alpha = 2\pi - \beta$$

$$\cos \alpha = \cos(-\beta) \Rightarrow \frac{x}{4} = -\frac{y}{9}$$

$$9x = -4y \Rightarrow y = -\frac{9}{4}x$$

$$\cos \cdot \cos - \sin \cdot \sin = 1$$

$$\frac{xy}{36} - \frac{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}}{36} = 1$$

$$x \in -4; 4$$

$$x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 & y = 9 \\ x = 4 & y = -9 \end{cases}$$