



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- $C$  — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 2, а  $y$  — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 6xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 25$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 35$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) ~~найдите натуральное~~ Аналишко, чтобы выполнялось равенство к делению делилось на 2

т.к.  $15k59$ , то

$$\left. \begin{array}{l} k=2 \\ k=4 \\ k=6 \\ k=8 \end{array} \right\}$$

при этом к должно иметь вид

$$k = 2t^2, t \in \mathbb{N}$$

Подходит лишь  $k=2$  и  $k=8$

$$101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot k = n^2$$

$$k=2 : A=2222$$

$$k=8 : A=8888$$

$$n^2 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2$$

$$n^2 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2$$

$$n = 101 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 2 \in \mathbb{N} \checkmark$$

$$n = 101 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 4 \in \mathbb{N} \checkmark$$

Ответ:  $(2222; 606; 33)$ ;  $(8888; 606; 33)$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(x-y)(x+y) - 2(x+y) + 5(x-y-2) = 0$$

$$(x+y)(x-y-2) + 5(x-y-2) = 0$$

$$(x-y-2)(x+y+5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y-2=0 \\ x+y+5=0 \end{cases}$$

$x+y+5=0 \rightarrow x+y=-5$  — невозможно,  
так как  $x > 0, y > 0$

$$\Rightarrow x-y-2=0$$

$$M-8 = \underbrace{(x-y-2)}_0 (x^2+y^2+4+xy-2y+2x)$$

$$\Rightarrow M-8=0$$

$$M=8$$

~~Доказательство~~

Докажем, что значение расщеплено

рассмотрим  $x=3, y=1 \Rightarrow x'=3-2=1, y'=1+2=3$

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{5}{3 \cdot 1} = \frac{6}{3} + 1 = 3 \\ k_2 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{5}{3 \cdot 1} = 3 \end{aligned} \quad | \Rightarrow k_1 = k_2 \vee$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = 27 - 1 - 6 \cdot 3 = 27 - 18 - 1 = 8 \quad \checkmark$$

Ответ:  $M=8$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$x > 0, y > 0$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy$$

$$\Rightarrow M - 8 = x^3 - y^3 - 8 - 6xy$$

$$M - 8 = (x)^3 + (-y)^3 + (-2)^3 - 3 \cdot (x) \cdot (-y) \cdot (-2)$$

$$\text{пусть } a = x, b = -y, c = -2$$

$$\text{тогда } M - 8 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

$$\Rightarrow M - 8 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

$$M - 8 = (x - y - 2)(x^2 + y^2 + 4 + xy - 2y + 2x)$$

2) Вернёмся к K

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+2} + 5 \cdot \left( \frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-2)(y+2)} \right) = 0$$

$$\frac{x-2-x}{x(x-2)} + \frac{y+2-y}{y(y+2)} + 5 \cdot \left( \frac{(x-2)(y+2) - xy}{xy(x-2)(y+2)} \right) = 0$$

$$-\frac{2}{x(x-2)} + \frac{2}{y(y+2)} + 5 \cdot \frac{xy + 2x - 2y - 4 - xy}{xy(x-2)(y+2)} = 0$$

$$-\frac{1}{x(x-2)} + \frac{1}{y(y+2)} + 5 \cdot \frac{x-y-2}{xy(x-2)(y+2)} = 0$$

получено, что  $x \neq 0, x \neq 2, y \neq 0, y \neq -2$

(т.к. тогда  $K$  было бы определено)  $\Rightarrow$

можно делить на  $x(x-2)y(y+2)$  обе части

$$-y(y+2) + x(x-2) + 5(x-y-2) = 0$$

$$x^2 - 2x - y^2 - 2y + 5(x-y-2) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит, I и II случаи удовлетворяют одни и те же пары ( $x, y$ ) (такие, что  $x+y$  одной четности)

Значит, что обозначение ~~типа~~ — 24 ~~варианта~~ варианта (ровно столько, сколько ~~вариантов~~ в I)

Ответ: 24 пары

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

проверим  $(x,y)$  на удовлетворение данного уравнения

$$\begin{cases} x = -y + 2k \\ x = \frac{4}{3} + \frac{2k}{3} \end{cases} \quad | k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{I} \begin{cases} x+y=2k \\ 3x-y=2k \end{cases} \quad | k \in \mathbb{Z}$$

I случай

$$x+y=2k \quad | k \in \mathbb{Z} \quad (\Leftrightarrow x \text{ и } y \text{ одной четности})$$

$$1. y = -2 \Rightarrow x-2=2k$$

$$x=2k+2$$

$x=2(k+1)$  — подходит любой чётный  $x$   
( $-6; -4; -2; 0; 2; 4$  — 6 вариантов)

$$2. y = -1$$

$$x-1=2k$$

$x=2k+1$  — подходит любой нечётный  $x$

( $-5; -3; -1; 1; 3; 5$  — 6 вариантов)

$$3. y=0$$

$x=2k$  (Аналогично, 6 вариантов)

$$4. y=1$$
 (Аналогично, 6 вариантов)

$$x=2k-1$$

Всего 6 I случая  $6 \cdot 4 = 24$  варианта

II случай

$$3x-y=2k \quad | k \in \mathbb{Z}$$

~~$2x-(x+y)=2k$~~

~~$x+y=2x-2k$~~

~~$x+y=2(x-k)$~~

~~$x+y=2n$~~

~~$x+y=2n$~~

~~$x+y=2n$~~

~~$x+y=2(k-x)$~~

~~$x-y=2(k-x)$~~

~~$x-k=n$~~

~~$\Rightarrow k=x-n$~~

~~$n=k-x$~~

~~$n=k-x$~~

~~$n=k-x$~~

~~$n=k-x$~~

Покажем, что  $k-x \in \mathbb{Z}$  и может принимать любые значения  $n=k-x$ . Достаточно выделить  $k=n+x$ .

$$\Rightarrow x-y=2n \quad | n \in \mathbb{Z} \quad (\Leftrightarrow x \text{ и } y \text{ одной четности})$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

a) Все пары  $(x:y)$ , для

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x - \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y$$

$$\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi k & |k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = -\pi x + \pi y + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = x - y + 2k \\ 2x = -x + y + 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y + 2k \\ 3x = y + 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y + 2k \\ x = \frac{y}{3} + \frac{2k}{3} \end{cases} |k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $(-y + 2k : y) ; \left(\frac{y}{3} + \frac{2k}{3} : y\right) | y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

b) Все пары  $(x:y)$ ,  $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi \Rightarrow \left| \frac{x}{6} \right| \leq 1, \left| \frac{y}{2} \right| \leq 1$$

так как  $\arcsin t \leq \frac{\pi}{2}$ , то

-1,5  $\leq t \leq 1$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \leq \pi$$

равенство выполняется лишь в случае

$$\begin{cases} \arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{6} = 1 \\ \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$$

при  $(x:y) = (6:2)$  неравенство не выполняется, при оставшихся допустимых  $(x:y)$  — выполняется

$$\left| \frac{x}{6} \right| \leq 1$$

$$|x| \leq 6$$

$$x \in \mathbb{Z}, x \neq 6$$

$$\Rightarrow x \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$\left| \frac{y}{2} \right| \leq 1$$

$$|y| \leq 2, y \in \mathbb{Z}, y \neq 2 \Rightarrow y \in \{-2; -1; 0; 1\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k = 9 \text{ (билетов)} \quad k > 4 \vee$$

Значит, в конце месяца было выдано 9 билетов

Ответ: 9 билетов

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
**1 из 2**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$N^4$

Пусть в классе  $N$  человек. (Понятно, что  $N > 4$ , иначе вероятность в начале и конце месяца была бы 100%)

1) Количество способов раздать 4 билета среди  $N$  людей равно  $C_N^4 = \frac{N!}{(N-4)! 4!} = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$

Количество способов, что у Вася и Тимы есть билеты равно  $C_{N-2}^2$  (количество способов раздать оставшимся 2 билета остальным одноклассникам)

$$C_{N-2}^2 = \frac{(N-2)!}{(N-4)! 2!} = \frac{(N-2)(N-3)}{2}$$

тогда искомая вероятность (в начале месяца) равна

$$P_0 = \frac{C_{N-2}^2}{C_N^4} = \frac{(N-2)(N-3) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot N(N-1)(N-2)(N-3)} = \frac{12}{N(N-1)}$$

$$P_0 = \frac{12}{N(N-1)}$$

2) Пусть билетов станет  $k$ ,  $k > 4$

Аналогично, количество всех способов (раздать  $k$  билетов среди  $N$  людей) равно  $C_N^k$

Количество удовлетворяющих способов (что Тима и Вася получат билеты) равно  $C_{N-2}^{k-2}$  (раздать оставшиеся  $k-2$  билета  $N-2$  людям)

Искомая вероятность в конце месяца будет

$$P = \frac{C_{N-2}^{k-2}}{C_N^k} = \frac{N!(k-2)!(N-k)!}{k!(N-k)!(N-2)!} = \frac{N(N-1)}{k(k-1)}$$

$$P = \frac{C_{N-2}^{k-2}}{C_N^k} = \frac{(N-2)! k!(N-k)!}{(k-2)!(N-k)! \cdot N!} = \frac{k(k-1)}{N(N-1)}$$

3) Это условие  $P = 6P_0$

$$\frac{k(k-1)}{N(N-1)} = 6 \cdot \frac{12}{N(N-1)}$$

$$k(k-1) = 6 \cdot 12$$

$$k^2 - k - 6 \cdot 12 = 0 \quad k^2 - k - 72 = 0$$

$$(k+8)(k-9) = 0 \quad \begin{cases} k = -8 \\ k = 9 \end{cases} \quad (k > 4)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$H. 25. \frac{85 - 84 \cos \alpha}{\frac{16 \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{4}} \left( \cos^2 \alpha - 1 + \frac{\cancel{225} \cdot 9}{H. 25. \frac{85 - 84 \cos \alpha}{\frac{16 \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{4}} \cancel{225}} \right) = 125$$

$$25. \frac{85 - 84 \cos \alpha}{4 \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)} \left( \cos^2 \alpha - 1 + \frac{9 \cdot 4 (1 - \cos^2 \alpha)}{85 - 84 \cos \alpha} \right) = 125$$

$$25. \frac{85 - 84 \cos \alpha}{4 (1 - \cos^2 \alpha)} - 25. \frac{85 - 84 \cos \alpha}{4 \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)} + \frac{9 \cdot 4 \cdot 125}{4 \cos^2 \alpha} = 125$$

$$25. \frac{\cos \alpha = x}{\frac{85 - 84x}{4(1-x^2)}} - 25. \frac{85 - 84x}{4x^2(1-x^2)} + \frac{9 \cdot 25}{x^2} = 125 \quad | \cdot x^2(1-x^2)$$

$$\frac{25 \cdot (85 - 84x)x^2}{4} - \frac{25(85 - 84x)}{4} + 9 \cdot 25(1-x^2) = 125x^2(1-x^2)$$

$$\cancel{25} \cdot \cancel{85} \cancel{x^2} - 25 \cdot 84x^3 - 25 \cdot 85 + 25 \cdot 84x + 9 \cdot 25(1-x^2) = 500x^2(1-x^2)$$

$$\cancel{25} \cdot \cancel{x^2} - \cancel{2100} \cancel{x^3} - \cancel{2125} + \cancel{2100} \cancel{x}$$

$$\cancel{85} \cancel{x^2} - \cancel{84} \cancel{x^3} - 85 + 84x + \cancel{36} - \cancel{36} \cancel{x^2} = 20x^2 - 20x^4$$

$$20x^4 - 84x^3 + 29x^2 + 84x - 49 = 0$$

$$\frac{7}{10} \quad 20 \quad -84 \quad 29 \quad 84 \quad -49 \\ 20 \quad 20 \quad -70 \quad -20 \quad 70 \quad 0$$

$$(x - \frac{7}{10})(20x^3 - 70x^2 - 20x + 70) = 0$$

$$(x - \frac{7}{10})(2x^3 - 7x^2 - 2x + 7) = 0$$

$$(x - \frac{7}{10})(2(x^3 - x) - 7(x^2 - 1)) = 0$$

$$(x - \frac{7}{10})(2x(x^2 - 1) - 7(x^2 - 1)) = 0$$

$$(x - \frac{7}{10})(2x - 7)(x^2 - 1) = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{7}{10} & \checkmark \\ x = \frac{7}{2} & \times \\ x^2 = 1 & \times \end{cases}$$

$$x = \cos \alpha, \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ \quad (\text{т.к. } \Delta ABC \text{ - острый})$$

$$\rightarrow |x| < 1$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{7}{10}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \sqrt{\frac{51}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$S_{\Delta ABC} = AB \cdot AC \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} = 30 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

$$\text{Ответ: } S_{\Delta ABC} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{15}{2} = \cos \alpha \cos \beta \cdot r \Rightarrow \cos \beta = \frac{\frac{15}{2}}{r \cos \alpha}$$

Тю м. касиев саб  $\triangle BOP$

$$OP^2 = OB^2 + BP^2 - 2 \cdot OB \cdot BP \cdot \cos \beta$$

$$4r^2 \sin^2 \beta = 4r^2 \cos^2 \alpha + 25 - 2 \cdot 2r \cos \alpha \cdot 5 \cdot \cos \beta$$

$$4r^2 \sin^2 \beta = 4r^2 \cos^2 \alpha + 25 - 20 \cdot r \cos \alpha \cos \beta$$

$$4r^2 \sin^2 \beta = 4r^2 \cos^2 \alpha + 25 - 20 \cdot \frac{15}{2}$$

$$4r^2 \sin^2 \beta = 4r^2 \cos^2 \alpha - 125$$

$$4r^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta) = 125$$

$$4r^2 \cos^2 \alpha - 4r^2 \sin^2 \beta = 125 \quad (1)$$

$$= 1 - \frac{225}{4r^2 \cos^2 \alpha}$$

$$4r^2 (\cos^2 \alpha - 1 + \frac{225}{4r^2 \cos^2 \alpha}) = 125 \quad (1)$$

~~5.  $\angle AOC = 360^\circ - \angle BOP - \angle BOA = 360^\circ - 180^\circ + 2\beta - 2\alpha =$~~ 
 ~~$= 180^\circ + 2\beta - 2\alpha = 180^\circ - (2\alpha - 2\beta)$~~

~~$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = 90^\circ - (\alpha - \beta)$~~

(биссектриса)

Тю м. касиев саб

5. Тю м. касиев саб  $\triangle ABC$ :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

$$(2r \sin \alpha)^2 = 30^2 + 35^2 - 2 \cdot 30 \cdot 35 \cos \alpha \quad (R = 2r \cos \alpha)$$

$$4r^2 \sin^2 \alpha \cdot 4r^2 \cos^2 \alpha = 2125 - 2100 \cos \alpha$$

~~$16r^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 2125 - 2100 \cos \alpha$~~

$$16r^2 \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = 2125 - 2100 \cos \alpha$$

$$r^2 = \frac{2125 - 2100 \cos \alpha}{16 \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}$$

$$r^2 = 25 \cdot \frac{85 - 84 \cos \alpha}{16 \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}$$

нодс табиим б (2)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

Дано:

$O$  - центр опис.  $\triangle ABC$   
 $AP = 25$ ;  $BP = 5$ ;  $AC = 35$   
 $S_{\triangle ABC} = ?$

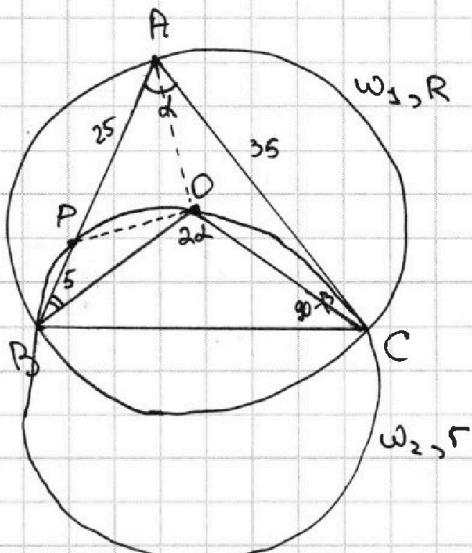
1. Пусть радиусы  $w_1$  и  $w_2$ ,  
 соответственно равны  
 $R$  и  $r$

2. Т.к.  $\angle BAC = \alpha$   
 по т. синусов  $\triangle ABC$   
 $\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$   
 $BC = 2R \sin \alpha$

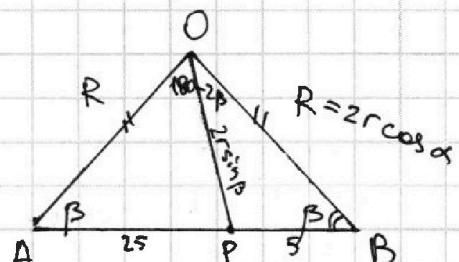
по т. синусов  $\triangle BOC$  ( $\angle BOC = 2 \angle BAC = 2\alpha$ , т.к.  $O$  - центр  
 опис. окружности  $\triangle ABC$ )  
 $\frac{BC}{2 \sin \alpha} = 2r$

$$\frac{2R \sin \alpha}{2 \sin \alpha} = 2r$$

$$R = 2r \cos \alpha$$



3. Т.к.  $\angle OAB = \beta$   
 тогда  $\angle OBA = \beta$  ( $\triangle AOB - \rho/\delta$ )



4. По т. синусов  $\triangle BPO$

$$\frac{PO}{\sin \beta} = 2r$$

$$PO = 2r \sin \beta$$

~~По т. косинусов  $\triangle BOP$~~   
 $PO^2 = OB^2 + PB^2 - 2OB \cdot PB \cos \beta$

$$4r^2 \sin^2 \beta = 4r^2 \cos^2 \alpha$$

По т. синусов  $\triangle ABC$  ( $\angle BCA = \frac{1}{2} \angle BAO = \frac{1}{2} \angle BOA = \frac{1}{2}(180 - 2\alpha) = 90 - \alpha$ )

$$\frac{AB}{\sin \angle BCA} = 2R$$

$$AB = 2 \cdot (2r \cos \alpha) \cdot \sin(90 - \alpha)$$

$$AB = 4 \cos \alpha \sin \beta r$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

максим обрачугом

$$P(\alpha) = 2\left(\sqrt{119 + \sin^2 \alpha} + \sqrt{119 + \cos^2 \alpha}\right) + 13\pi$$

~~$$\sqrt{119 + \sin^2 \alpha} = a$$~~

$$\sqrt{119 + \cos^2 \alpha} = b$$

то кв-р-By о средних

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \text{ равенство выполняется если } a=b$$

$$a+b \leq 2\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

$$P(\alpha) = 2(a+b) + 13\pi \leq 4 \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + 13\pi =$$

$$= 4 \sqrt{\frac{119 + \sin^2 \alpha + 119 + \cos^2 \alpha}{2}} + 13\pi = 4\sqrt{119 + \frac{1}{2}} + 13\pi$$

$$P(\alpha) \leq 4\sqrt{119 + \frac{1}{2}} + 13\pi$$

равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$a=b$$

$$\sqrt{119 + \sin^2 \alpha} = \sqrt{119 + \cos^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k / k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k / k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k / k \in \mathbb{Z}$$

проверим  $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

~~$\sqrt{119 + \sin^2 \alpha} + \sqrt{119 + \cos^2 \alpha}$~~

$$P(\alpha) = 2\left(\sqrt{119 + \frac{1}{2}} + \sqrt{119 + \frac{1}{2}}\right) + 13\pi = 4\sqrt{119 + \frac{1}{2}} + 13\pi$$

✓ достигается при данном  $\alpha$

$$P(\alpha) \leq 4\sqrt{119 + \frac{1}{2}} + 13\pi$$

$$\Rightarrow \max P(\alpha) = 4\sqrt{119 + \frac{1}{2}} + 13\pi$$

$$M = 4\sqrt{119 + \frac{1}{2}} + 13\pi = 4\sqrt{\frac{239}{2}} + 13\pi = 2\sqrt{478} + 13\pi$$

$$M = 2\sqrt{478} + 13\pi$$

достигается при  $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k / k \in \mathbb{Z}$

Ответ:  $M = 2\sqrt{478} + 13\pi$

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k / k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что  $\angle l_1, l_2 = 90^\circ$ .

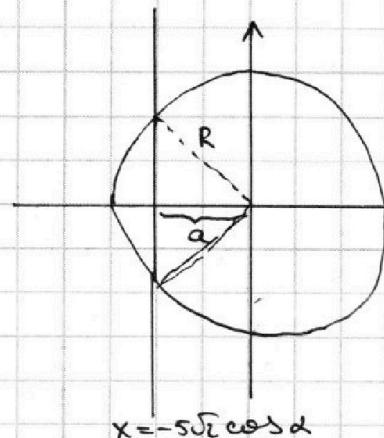
$$90^\circ = \angle l_1, l_2 = \frac{1}{2} \overline{l_1} + \frac{1}{2} \overline{l_2} = \frac{1}{2} (\overline{l_1} + \overline{l_2}) = \text{const}$$

Так как градусная мера дуг не изменяется, ~~и радиусы~~ то сумма длин дуг тоже постоянна

т.к.  $\frac{1}{2} \overline{l_1} + \frac{1}{2} \overline{l_2} = 180^\circ$ , то сумма длин дуг равна половине дуги окружности

$$\overline{l_1} + \overline{l_2} = \frac{2\pi R}{2} = \pi R = 13\pi$$

Найдём  $h_1, h_2$



$$a = |-5\sqrt{2} \cos \alpha|$$

По теореме Пифагора

$$\frac{h_1}{2} = \sqrt{R^2 - a^2}$$

$$h_1 = 2\sqrt{169 - (5\sqrt{2} \cos \alpha)^2}$$

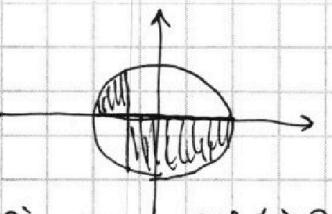
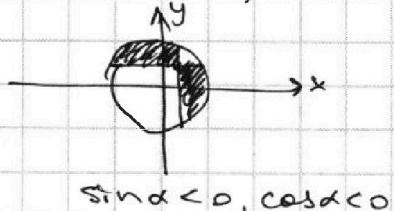
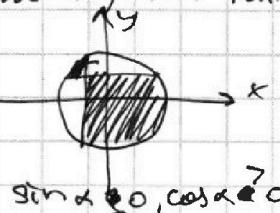
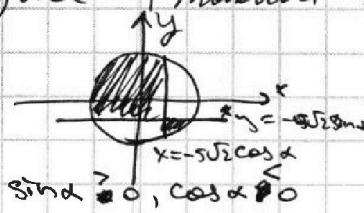
$$h_1 = 2\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$$

$$h_1 = 2\sqrt{119 + \sin^2 \alpha}$$

Аналогично получим,  $h_2 = 2\sqrt{R^2 - |5\sqrt{2} \sin \alpha|^2} =$   
 $= 2\sqrt{119 + \cos^2 \alpha}$

$$P = 2(\sqrt{119 + \sin^2 \alpha} + \sqrt{119 + \cos^2 \alpha}) + 13\pi$$

Заметим, что данное равенство справедливо и в общем случае (так как не нужно находить первоначально)



и т.д. (справедливо во всех случаях)

$$\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6  $g_2(\alpha)$ :

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) \cdot (y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

$$(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0$$

$$\begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0 \end{cases}$$

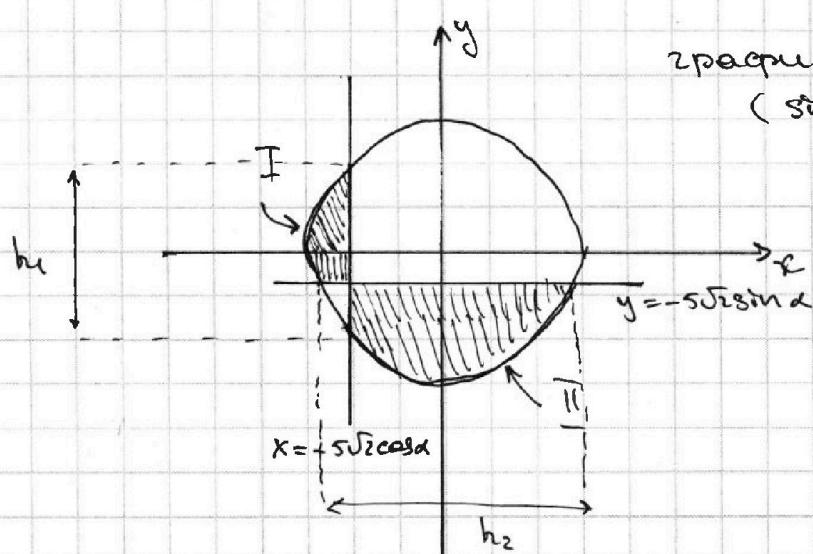
$$\begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0 \\ x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 \leq 169$$

- круг с центром  $(0;0)$  и  $R = 13$



$2\pi k < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$   
 $1 \leq k \leq 7$   
график дяди ~~Федорова~~  
( $\sin \alpha > 0$ ,  $\cos \alpha > 0$ )

1)

$l_1: x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$  - прямая  $\perp$  ox

$l_2: y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$  - прямая  $\perp$  oy

~~если~~  $x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$

~~$y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$~~

~~$x^2 + y^2 = 169$~~

~~$169 = 50 + 100 \cos^2 \alpha + 100 \sin^2 \alpha$~~

~~$169 = 50 + 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~

~~$119 = 100$~~



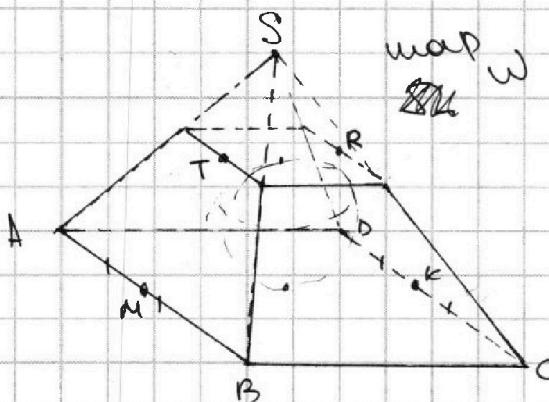
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

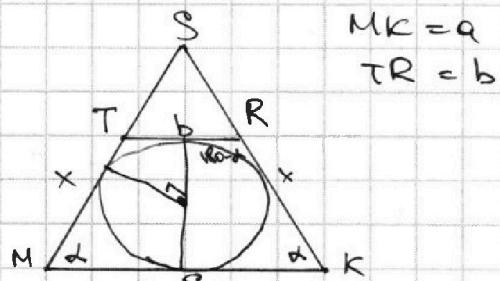
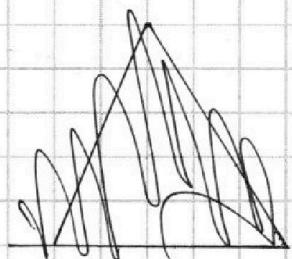
СТРАНИЦА  
1 из \_\_\_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7



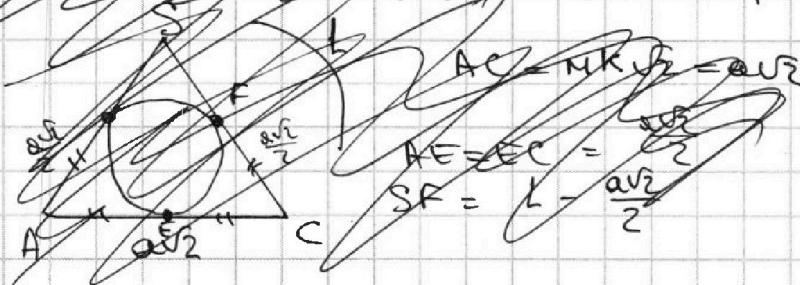
Рассмотрим сечение  
(MSK)



окружность вписанной в треугольник  
 $\Rightarrow a+b=2x$

шар ~~к~~  $\cap \Delta$  касается рёбер в точках M, T, R, K...

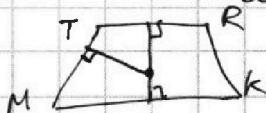
~~Рассмотрим сечение (ASR)~~ и других  
(~~и к.т.м.к.~~)



(так как  $SR$  касается прямой линии, касающейся окружности в её середине)

$\Rightarrow MTRK$  — ~~односторонний~~ трапеция, от четырех  $\Delta$

$\Rightarrow MTRK$  — описанная четырьмя



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BC = 2R \sin \alpha$$

$$\frac{BC}{\sin 2\alpha} = 2r$$

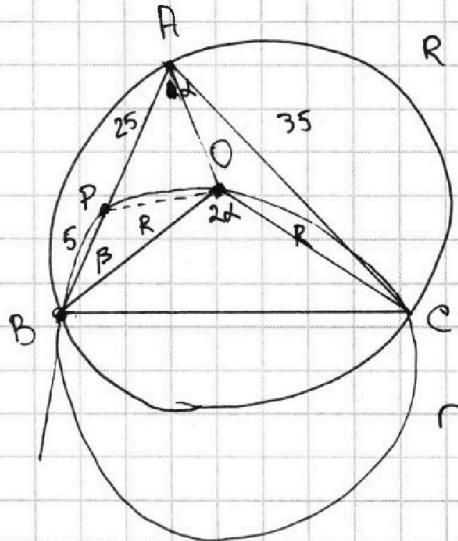
~~$$BC = 2r \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha$$~~

$$\frac{2R \sin \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = 2r$$

$$R = 2r \cos \alpha$$

$$\frac{PO}{\sin \beta} = 2r$$

$$PO = 2r \sin \beta$$



$$2r \sin \beta = 2R \sin(90 - \alpha)$$

$$2r \sin \beta = 2 \cdot 2r \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\tan \beta = 2 \cos \alpha$$

$$R = 2r \cos \alpha = 2r \tan \beta$$

~~$$4r^2 \sin^2 \beta = 25 + r^2 \tan^2 \beta - 2r \sin \beta \cdot r \tan \beta \cdot \cos \beta$$~~

$$4r^2 \sin^2 \beta = 25 - r^2 \tan^2 \beta$$

$$r^2 (4 \sin^2 \beta + \tan^2 \beta) = 25$$

~~$$\angle AOC = 180 - 2\alpha$$~~

$$\frac{AB}{\sin(90 - \alpha)} = 2r$$

$$30 = 4r \cos \alpha \cdot \cos \beta = 2r \cos \beta \cdot \tan \beta = 2r \sin \beta$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$BC = 35^2 + 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 35 \cdot \cos \alpha$$

~~$$BC = 2R \sin \alpha$$~~

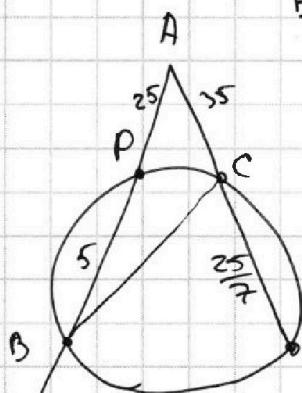
$$\frac{BC}{2R \sin \alpha} = 2$$

$$4R^2 \sin^2 \alpha = 25^2 + 35^2 - 2 \cdot 25 \cdot 35 \cos \alpha$$

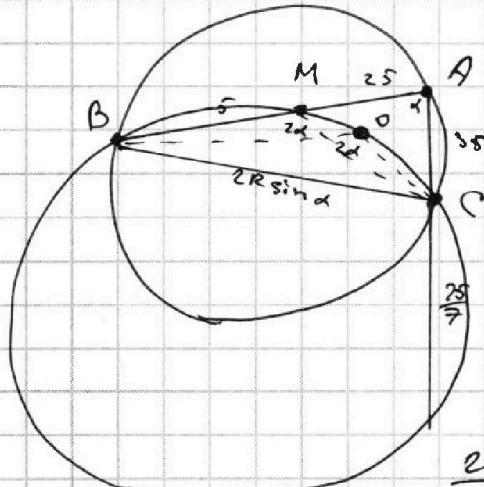
$$\frac{2125 + 25}{200} = \frac{25}{125}$$

$$2100 f^{25}$$

$$21 \cdot 4$$

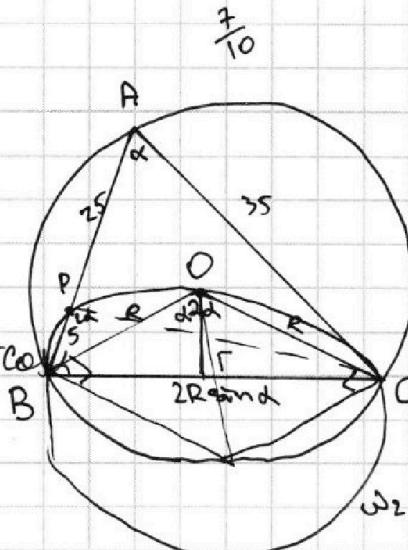


$$84 + 1 - \cos \alpha$$



$$MC = 2r$$

$$2 \cdot 2r \cos \alpha \cdot \cos \beta = 30$$



$$\begin{array}{r} 2 \\ 35 \\ \times 95 \\ \hline 175 \\ 1225 \\ \hline 2125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 70 \cdot 30 \\ 2100 \end{array}$$

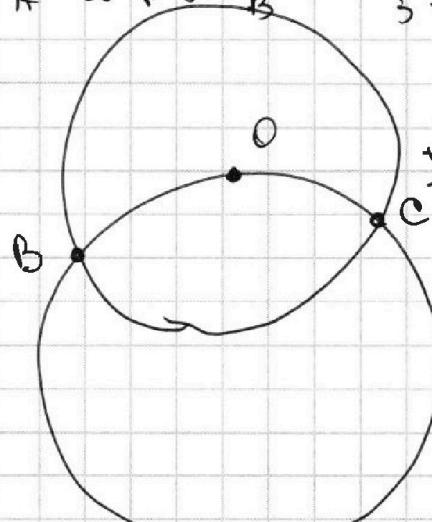
$$25 \cdot x = 35 \cdot x$$

$$x = \frac{25}{2}$$

$$\frac{25}{\sin \beta} = \frac{5}{\sin \alpha}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 85 \\ \times 25 \\ \hline 425 \\ + 170 \\ \hline 2125 \\ 25 \\ - 25 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 - 150 \\ - 125 \end{array}$$



$$\frac{2r \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = r$$

$$\frac{2R}{2 \cos \alpha} = r$$

$$\frac{R}{\cos \alpha} = r \quad | R = r \cos \alpha$$

$$\frac{R}{r} = \cos \alpha$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = (x)^3 + (-y)^3 - \cancel{3}(x)(-y)(-2)$$

$$M + (-2)^3 = x^3 + (-y)^3 + (-2)^3 - 3x(-y)(-2) \quad \begin{matrix} x=1 \\ y=-2 \\ z=-y \end{matrix} \quad \frac{x^{11}y^9}{23^8}$$

$$M - 8 = (x - y - 2)(x^2 + y^2 + 4 + xy - 2y + 2x)$$

$$\begin{aligned} & (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) = \\ & = a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - abc - \cancel{a^2c} + \\ & + b^2a + b^3 + b^2c - ab^2 - b^2c - abc + \\ & + c^2a + cb^2 + c^3 - abc - \cancel{bc^2} - \cancel{ac^2} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \end{aligned}$$

$$6 \cdot 12 = 6 \cdot 6 \cdot 2 \quad \frac{x^{23}y^9}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} \quad \frac{2}{478}$$

$$M - 8 = (x - y - 2)(x^2 + y^2 + 4 + xy - 2y + 2x)$$

$$\begin{aligned} 5(x-y-2) &= y(y+2) - x(x-2) = y^2 + 2y - x^2 + 2x = \\ &= (y-x)(y+x) + 2(y+x) = (y+x)(y-x+2) = \\ &= -(x+y)(x-y-2) \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{l} x-y-2=0 \\ 5=-(x+y) \end{array} \right] \quad \frac{k(k-1)}{N(N-1)} = 6 \cdot \frac{12}{N(N-1)} \quad C_N^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\begin{aligned} (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x &= (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x \\ \sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y &= \cos^2 \pi x - \cos \pi x \cos \pi y \\ \cancel{\cos^2 \pi x} - \sin^2 \pi x &= \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y \end{aligned}$$

$$\cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y) \quad 3 \cdot \frac{6 \cdot 12^3}{8} = 9$$

4 способа № 4

Всего способы раздать  $C_N^4 = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$   
При способы, 2го 2 способа у  $\pi_{1,2,3}$

$$C_{N-2}^2 = \frac{(N-2)(N-3)}{2}$$

$$P = \frac{(N-2)(N-3) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot N(N-1)(N-2)(N-3)} = \frac{12}{N(N-1)} \quad k \text{ способ.}$$

$$P = \frac{C_2^2}{C_N^2} \cdot \frac{C_{N-2}^{k-2}}{C_N^k} = \frac{(N-2)!}{(k-2)!(N-k)!} \cdot \frac{k!(N-k)!}{N!(N-1)!} = \frac{k(k-1)}{N(N-1)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N<sup>1</sup>

(A; B; C)

A - четырёхзначное число из одинаковых цифр  
 $\frac{9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{\uparrow}$  = 9 чисел (1111, 2222, ... 9999)

Нельзя о  
оставшиеся цифры можно

B - трёхзначное число, хотя бы одна из цифр 6  
 Находим количество противоположного события - нет цифр 6

$$\frac{8 \cdot 9 \cdot 9}{\uparrow \uparrow \uparrow} = 8 \cdot 9 \cdot 9 = 8 \cdot 81 =$$

↑ 9 цифр подходят (все кроме 6)

8 цифр ( $\emptyset$ , 8)

$$A = 1111k, k \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ \underline{-11} \end{array} \quad \begin{array}{r} 111 \\ \underline{101} \end{array} \quad A = 101 \cdot 11 \cdot k, 1 \leq k \leq 9$$

$$A \cdot B \cdot C = n^2$$

$$101 \cdot 11 \cdot k \cdot B \cdot C = n^2 \Rightarrow B = 101 \cdot m^2$$

$$x, y > 0$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+2} + \frac{5}{xy} - \frac{5}{(x-2)(y+2)} = 0$$

$$\frac{x-2-y}{x(x-2)} + \frac{y+2-x}{y(y+2)} + 5 \cdot \frac{xy + 2x - 2y + 4 - xy}{xy(x-2)(y+2)} = 0$$

$$-\frac{2}{x(x-2)} + \frac{2}{y(y+2)} + 10 \cdot \frac{x-y+2}{xy(x-2)(y+2)} = 0$$

~~$$-2y(y+2) + 2x(x-2) + 10(x-y+2) = 0$$~~

$$-y(y+2) + x(x-2) + 5(x-y+2) = 0$$

$$x^2 - 2x - y^2 - 2y + 5(x-y) + 10 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

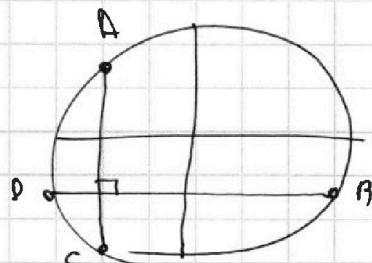
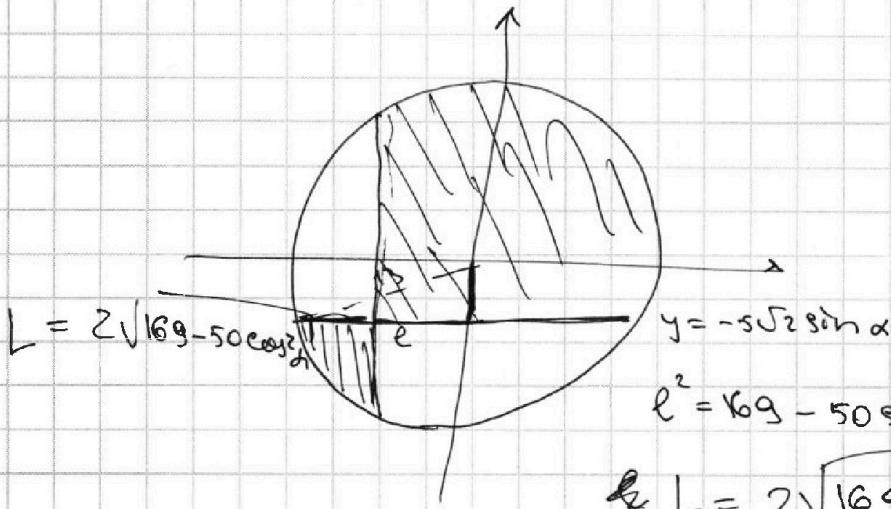
6

7

СТРАНИЦА

\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$90^\circ = \frac{1}{2} \overarc{AB} + \frac{1}{2} \overarc{DC} = \frac{2\pi R}{2} = \pi R = 13\pi$$

$$L = 2\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} + \sqrt{119 + 50 \cos^2 \alpha} + 13\pi$$

$$\frac{L}{2} = \frac{50 \cdot 2}{2\sqrt{119 + 50 \sin^2 \alpha}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

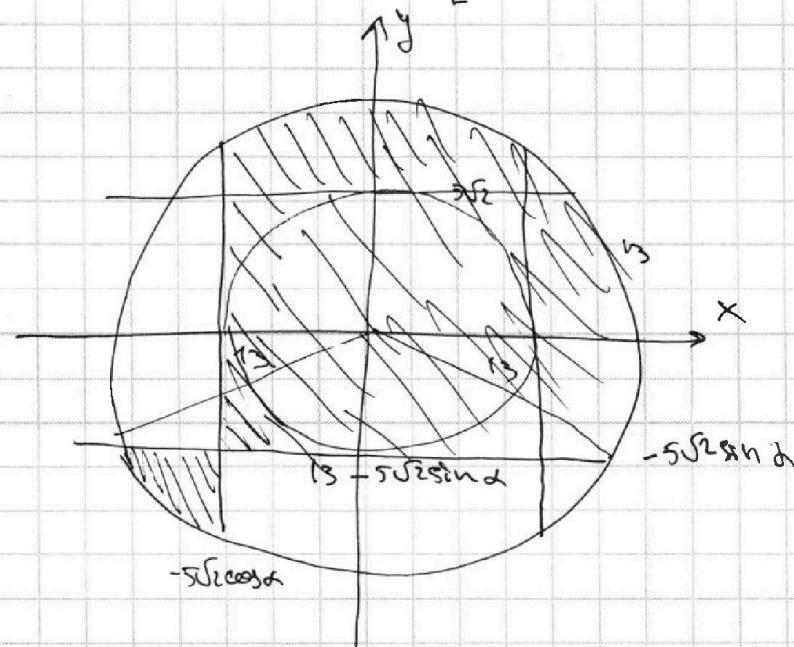
$$\begin{array}{ccccccc} 20 & -84 & 29 & 84 & -49 & 5\sqrt{2} & ? \\ \frac{2}{10} & 20 & -40 & -20 & 70 & 0 & 50 \leftarrow 169 \end{array}$$

$$2x^3 - 7x^2 - 2x + 7 = 2(x^3 - x) - 7(x^2 - 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{array} \right\} (5\sqrt{2})^2 = 50$$

$$\begin{array}{l} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \geq -5\sqrt{2} \sin \alpha \\ x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{array} \right\}$$



$$S =$$