



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① ?(A; B; C):

$$\begin{cases} A = a \cdot \overline{1111}, & a < 10 \\ B = \overline{xy2}, & x=1 \vee y=1 \vee z=1 \\ C = \overline{p5}, & p=5 \vee q=1 \\ ABC = n^2, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Рассмотрим A: A: 1111, а $1111 = 11 \cdot 101$,
Таким образом $n: 11$ и $n: 101$
(оба этих числа простые)

1. $101^2 > 1000$ тогда либо B, либо C: 101,
но $C < 100$, тогда B: 101, но
единственное число содержащее удовлетв.
условия на B и $101 - \geq 101$
 $B = 101$

2. либо B, либо C: 11, но $B = 101$,
тогда C: 11 и содержит 5, откуда
 $C = 55$, получается $n: 5$, значит
A должно делиться на 5, берем B и
с фиксированной, откуда $A = 5555$

Ответ: (5555; 101; 55)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

② $K(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$
 $x, y > 0: K(x, y) = K(x-3, y+3)$

$M = x^3 - y^3 - 9xy$
 $M = ?$

Распишем $K(x, y) = K(x-3, y+3)$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$ / $\cdot xy(x-3)(y+3)$,
~~дадим~~ при $x=3$
 не имеет
 смысла условие

$y(x-3)(y+3) + x(x-3)(y+3) + (x-3)(y+3) = xy(y+3) + xy(x-3) + xy$

$(x-3)(y+3)(x+y+1) = xy(x+y+1)$, $x+y+1 \neq 0$, т.к. $x > 0, y > 0$

$(x-3)(y+3) = xy$

$xy - 3y + 3x - 9 = xy \Rightarrow x = y + 3$, подставим в

$M = (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y = 3(y+3)^2 + (y+3)y + y^3 - 9y^2 - 27y =$
 $= 3(y^2 + 6y + 9 + y^2 + 3y + y^2) - 9y^2 - 27y = 3(3y^2 + 9y + 9) - 9y^2 - 27y =$
 $= 9y^2 + 27y + 27 - 9y^2 - 27y = 27$

может выполняться при, например, $x=4, y=1$

$K(4, 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4 \cdot 1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = K(1, 4) = K(4-3, 1+3)$

$M(4, 1) = 4^3 - 1^3 - 9 \cdot 4 \cdot 1 = 64 - 1 - 36 = 27$

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③ а) $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$

Положим $\alpha = \pi x$, $\beta = \pi y$

$$(\sin \alpha - \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos 2\alpha = -\cos(\alpha - \beta)$$

$$\cos(\pi - 2\alpha) = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\begin{cases} \pi - 2\alpha = \alpha - \beta + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ \pi - 2\alpha = -(\alpha - \beta) + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha = \pi + \beta + 2\pi k, & (k \in \mathbb{Z}, \text{поэтому знамен не важен}) \\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi k \end{cases}$$

Убедимся в корректности подстановки:

1. $\beta = 3\alpha - \pi$

$$(\sin \alpha - \sin(3\alpha - \pi)) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos(3\alpha - \pi)) \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin 3\alpha = \cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos 3\alpha$$

$$-\cos 2\alpha + \cos(3\alpha - \alpha) = 0 \quad 0 = 0$$

2. $\alpha = \pi - \beta$

$$(\sin \pi - \sin \beta) \sin(\pi - \beta) = (\cos \pi - \cos \beta) \cos(\pi - \beta)$$

$$(\sin \beta - \sin \beta) \sin \beta = -(-\cos \beta + \cos \beta) \cos \beta, \quad 0 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом подходит все (x, y)

также, что

$$3x = y + 1 + 2k \quad \text{или} \quad x = 1 - y + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\{(x, y) \mid 3x = y + 1 + 2k \vee x = 1 - y + 2m, \quad k, m \in \mathbb{Z}\}$$

б) $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$

ОДЗ:

$$x \in [-4; 4]$$

$$y \in [-9; 9]$$

Вспомним, что $\arccos t \in [0; \pi]$
при это $\arccos t = \pi \Leftrightarrow t = -1$,
тогда $x \neq -4$ или $y \neq -9$.

Таким образом на Oxy имеем
прямоугольник с вершиной $(-4; -9)$
и сторонами $x = -4, x = 4$ $y = 9, y = -9$

Далее заметим, что решения уравнения
из пункта а образуют бесконечное кол-во
паралл. ~~ли~~ прямых, а также, что

целочисл. решения $3x = y + 1 + 2k$ будут

и решениями $x = 1 - y + 2m$. И правда,

пусть $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ решение $3x_0 = y_0 + 1 + 2k_0$,
при $k = k_0$, тогда $x_0 = 1 - y_0 + 2m$ будет
верно при рассмотрении $x_0 = 1 - y_0 + 2m$ и
каждой m . Сложим равенства

$$3x_0 = 2 + 2k_0 + 2m \Leftrightarrow m = 2x_0 - 1 - k_0, \quad \text{то есть}$$

для каждой целой точки $3x = 2y + 1 + 2k$



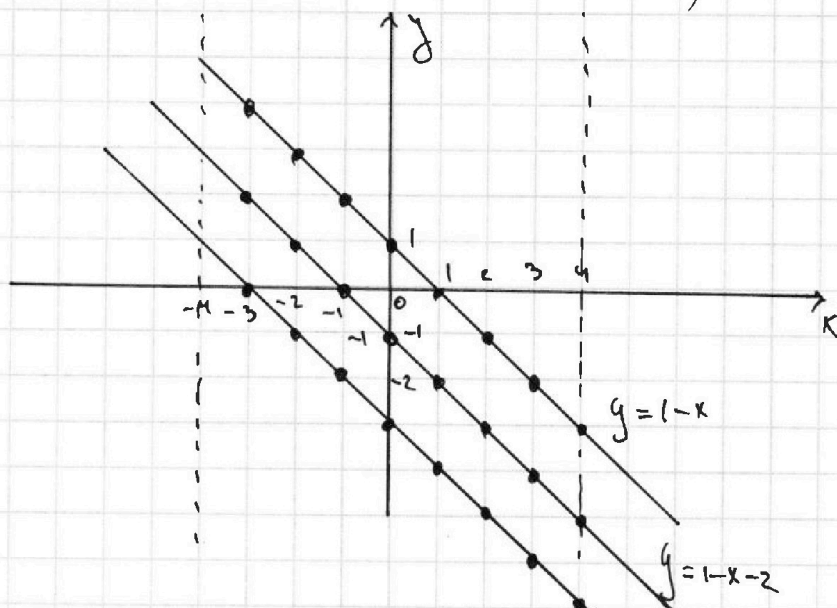
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдётся m , такое, что эта
Точка будет удовлетворять ~~ВК-у~~
 $x = 1 - y + 2m$



Заметим, что в линиях с ~~клетки~~ ^{с шагом} абсцисс ~~оригинал~~

10 целочисл точек $(-5; -4; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9)$
это ординаты (горизонт)

а с клетки. 3 целочисл точек $(-8; -6; 4; -2; 0; 2; 4; 6; 8)$

Того имеем $5 \cdot 10 + 4 \cdot 9 = 50 + 36 = 86$ точек

НО! Како вместе $(-4; -3)$, те у нее нети.
ис, значит она ухлина походить, того
85 точек

Ответ: 85



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

④ Будем считать вероятности, как кол-во способов выбрать серверы с Петей и Васей ко всем серверам.

Тогда в первом случае:

$$P_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$$

Во втором:

$$P_2 = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m}$$

, где

n - учителей в школе, m - кол-во билетов с выборами

Тогда имеем:

$$3.5 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m}$$

$$3.5 \cdot \frac{(n-2)(n-3) \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(n-2)(n-3) \dots (n-m+1) \cdot m!}{n(n-1) \dots (n-m+1) \cdot (n-2)!}$$

$$4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{m \cdot (m-1)}{n \cdot (n-1)}$$

$$4 \cdot 6 = m(m-1), \text{ тогда } m = 4 \text{ } (-6 \text{ не подходит})$$

Ответ: 4



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

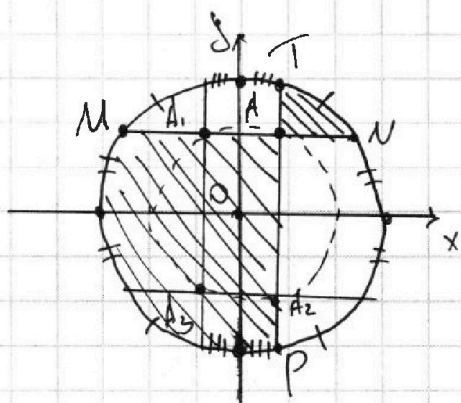
СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⑥

$$\text{CP}(x): \begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

В первом уравнении задаётся точка A , которая ездит по окружности радиуса 2 в зависимости от α . Правый верхний и нижний левый квадранты относительно A подходит. Второе уравнение это



Заметим, что та часть периметра Φ , что лежит на оер. равна 3π (половине периметра круга):

Отметим A_1, A_2, A_3 симметрично Oy, Ox и O . И заметим, что

каждой "закрашенной" дуге приходится незакрашенная, находящаяся либо симметрично Ox , либо Oy ,

таким образом половина дуг закрашена, то есть их длина $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 3 = 3\pi$.

Далее рассмотрим длины хорд



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вспомним теорему о степени точки,

тогда $TA \cdot AD = MA \cdot AN = 3^2 - 2^2 = 5$

Запишем сумму длин хорд ($\alpha \in (0, 90^\circ)$)

$$S(\alpha) = (2 \sin \alpha + 2 \cos \alpha + \frac{5}{2 \sin \alpha} + \frac{5}{2 \cos \alpha})^2$$

$$S'(\alpha) (2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{5}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{5}{2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha})^2 =$$

$$= (2(\cos \alpha - \sin \alpha) + \frac{5}{2} (\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha) \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha})^2 =$$

$$= 2(\cos \alpha - \sin \alpha) \left(\frac{2}{2} + \frac{5}{2} (\cos^2 \alpha + \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha) \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \right) =$$

$$= 2(\cos \alpha - \sin \alpha) \left(2 + \frac{5}{2} + \frac{1 + \cos \alpha \sin \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \right)$$

Максимум достигается при $\sin \alpha = \cos \alpha$
 $\alpha = 45^\circ + \frac{\pi}{2}k$, так
 правая сторона всегда ≥ 0 .

Отдельно рассмотрим $\alpha = \frac{\pi}{2}k$, т.е. тогда $S(\alpha)$
 неар. Сумма хорд будет равна $2 \cdot 3 + 2\sqrt{5}$

При $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$ $S(\alpha) = (2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}})^2 =$

$$= (2\sqrt{2} + 2,5\sqrt{2})^2 = \frac{9}{2} \sqrt{2} \cdot 2 = 9\sqrt{2}$$

Сравним $9\sqrt{2}$ и $2 \cdot 3 + 2\sqrt{5}$

$$16,2 < 36 + 20 + 24\sqrt{5}$$

$$10,6 < 24\sqrt{5}$$

$$5,3 < 12\sqrt{5}$$

Всё так $5,3^2 > 2500 > 144,5$, получаем, что при $\alpha = 45^\circ$
 максимум, а не минимум



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

S было определено для $\alpha \in (0; 90^\circ)$, но это никак не ограничивает решение, ведь для $\alpha \in (0 + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ можно перейти в определённый рассматриваемый сектор, используя симметрии с Ox или Oy , чтобы перенести точку A в первую четверть. Тогда могут стать раскрашены другие области, но на периметр это не влияет.

Ответ: $\max M = 3\pi + 5\sqrt{2}$, при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$

Формула для S неверна, правильная

$$S = 2(2\sin\alpha + (-\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + 5})) + 2(2\cos\alpha + (-\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 5})) = 2(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + 5} + \cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 5})$$

Очевидно M $\max$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$

$$\max M = \sqrt{2} + \sqrt{\sqrt{2} + 5} + \sqrt{2} + \sqrt{\sqrt{2} + 5} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{2} + 5}$$

Ответ: $\max M = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{2} + 5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

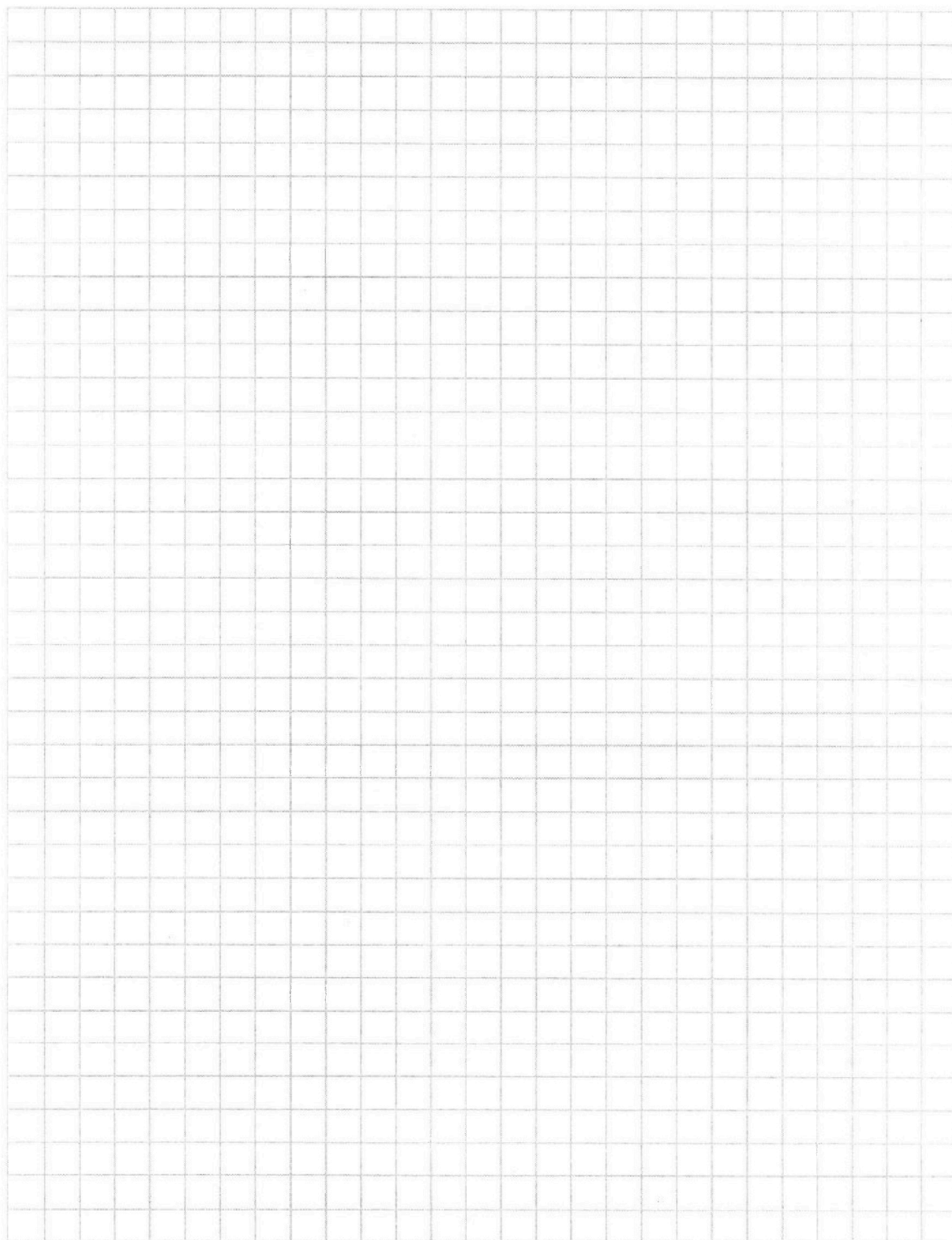
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad \left| \cdot xy \right.$$

$$y(x-3)(y+3) + x(x-3)(y+3) + (x-3)(y+3) = xy(y+3) + xy(x-3) + xy$$

$$\begin{aligned} & y(xy-3y+3x-9) + x(xy-3y+3x-9) + xy-3y+3x+9 = \\ & = xy^2 + 3xy + x^2y - 3xy + xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & xy^2 - 3y^2 + 3xy - 9y + x^2y - 3xy + 3x^2 - 9x - 3y + 3x + 9 = \\ & = xy^2 + x^2y \end{aligned}$$

$$3x^2 - 3y^2 - 6x - 12y + 9 = 0$$

$$x^2 - y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - y^2 - 4y + 2 = 0$$

$$(x-1)^2 - (y+2)^2 + 6 = 0$$

$$(x-3)(y+3)(x+y+1) = xy(x+y+1)$$

$$xy-3y+3x-9 = xy$$

$$x = y+3$$

$$(y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y =$$

$$= 3 \cdot (y^2 + 6y + 9 + y^2 + 3y + y^2) - 9y^2 - 27y =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① ? (A, B, C) : $A = a \cdot 1111 \quad \checkmark$

$\begin{cases} B = \overline{xyz} \\ x=1 \vee y=1, \vee z=1 \end{cases} \quad \checkmark$

$\begin{cases} C = \overline{pq} \\ p=5 \vee q=5 \end{cases} \quad \checkmark$

$ABC = n^2$

$n : 101, \text{ тогда}$

$\checkmark \underline{B = 101} \Leftarrow B = 101 \cdot f \quad f < 10$

$\begin{array}{r} 1111 \\ 101 \overline{) 11} \\ \hline \end{array} \quad \text{— простое}$

$a \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot \overline{pq} = n^2$ $C : 11 \Rightarrow 55 \cdot \checkmark \Rightarrow 205 \cdot \checkmark 10^2 + 1$

$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array}$

$C = 11 \cdot d$

$a \cdot d = x^2$

a - квадрат

d - квадрат

a ... d куб

① 2 3 4 ⑤ 6 7

⑧ 9 10

A B C

$2222 \cdot 101 \cdot 88$

$4444 \cdot 101 \cdot 44$

$9999 \cdot 101 \cdot 99$

$1111 \cdot 101 \cdot 44$

$1111 \cdot 101 \cdot 99$

$5555 \cdot 101 \cdot 55$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & 3(3y^2 + 5y + 2) - 5y^2 - 27y = \\ & = 9y^2 + 27y + 27 - 5y^2 - 27y = 27 \end{aligned}$$

При $y = 4 \quad x = 1$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}$$

$$64 - 1 - 36 = 27$$

$$\textcircled{3} \text{ а) } (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\alpha = \pi x \quad \beta = \pi y, \quad (\sin \alpha - \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$-\cos 2\alpha = \cos(\alpha - \beta), \quad \cos(\alpha - \beta) + \cos 2\alpha = 0$$

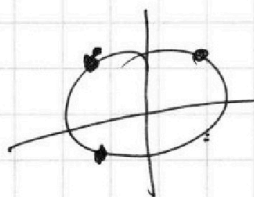
$$\cos(\pi - 2\alpha) = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = \pi - 2\alpha + 2\pi k \\ \beta - \alpha = \pi - 2\alpha + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha = \beta + \pi + 2\pi k \\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi k \end{cases}$$

$$\beta = 3\alpha - \pi \quad (\sin \alpha -$$

$$\left. \begin{aligned} & \alpha = \pi - \beta \\ & (\sin(\pi - \beta) - \sin \beta) \sin(\pi - \beta) = 0 \cos \pi \quad \checkmark \end{aligned} \right\}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\beta = 3\alpha - \pi$$

$$(\sin \alpha - \sin 3\alpha - \pi) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos 3\alpha - \pi) \cos \alpha$$

$$(\sin \alpha + \sin 3\alpha) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos 3\alpha) \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin 3\alpha = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos 3\alpha$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cos \alpha \cos 3\alpha - \sin \alpha \sin 3\alpha$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos \alpha \cos 3\alpha - \sin \alpha \sin 3\alpha = 0$$

$$\cos 2\alpha - \cos 2\alpha = 0 \quad 0 = 0$$

$$3\alpha = \beta + \pi + 2\pi k$$

$$\alpha = \frac{\pi - \beta}{2} + \pi k$$

$$\begin{cases} x = y + 1 + 2k \\ y = 3x - 1 - 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - y + 2k \\ y = 1 - x + 2k \end{cases}$$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} \leq 2\pi$$

$$x \in [-4, 4] \quad y \in [-3, 3]$$

$$x \neq -4$$

$$y \neq -3$$

$$\begin{cases} y = 3x - 1 - 2k \\ y = 1 - x + 2k \end{cases}$$

$$3x - 1 - 2k = 1 - x + 2k$$

$$4x = 2 + 2m + 2k$$

$$2x = 1 + m + k$$

$$\begin{array}{ccccccc} -8 & -6 & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -9 & -7 & -5 & -3 & -1 & 1 & 3 \end{array}$$

22.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

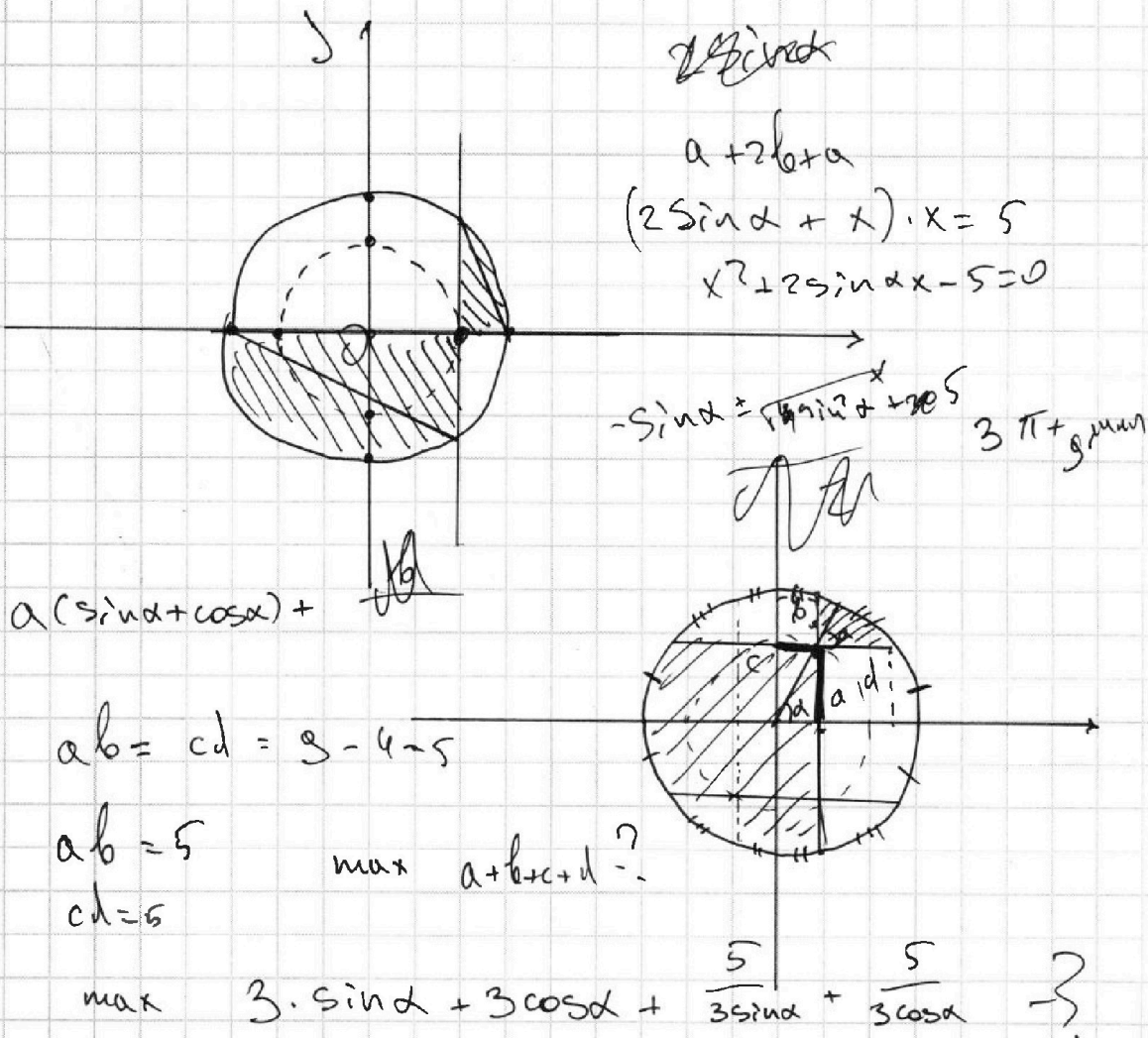
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

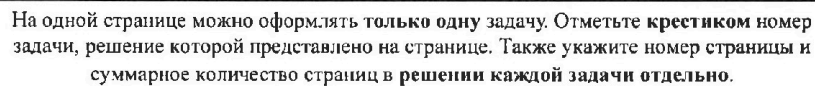
$$CP(\alpha): \begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$



$$3 \cdot \cos\alpha - 3 \sin\alpha + \frac{5}{3} \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{5}{3} \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 0$$

$$3(\cos\alpha - \sin\alpha) + \frac{5}{3} \frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{\sin^2\alpha \cos^2\alpha} = 0$$

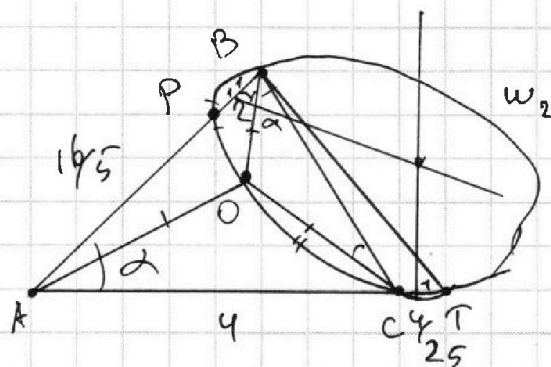
$$\cos\alpha = \sin\alpha$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \deg_{w_2} A &= \frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5} \\ AC \cdot AT &= \frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5} \\ G \cdot HT &= \frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5} \\ AT &= \frac{104}{25} \\ CT &= \frac{4}{25} \end{aligned}$$

$$BC^\wedge O = O^\wedge BC$$

$$B \overset{\wedge}{\perp} A = 2 \quad O \hat{B} C$$

$$\hat{A} \hat{B} C + \hat{A} C B = \hat{A} \hat{B} T + \hat{B} T A$$

$$\cancel{APSO} + \cancel{\alpha} + \cancel{\alpha} + \hat{OCH} = \cancel{APSO} + \alpha + \hat{CPT} + 2\alpha$$

$$\hat{C}_A = \alpha + \hat{C}_{BT}$$

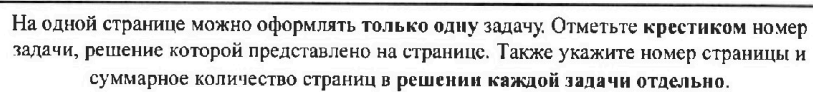
$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

$$(4-x_0)^2 + y_0^2 = R^2$$

$(\frac{104}{25} \times 2) \times 2$

$$\left(\frac{2}{25}\right)^2 + y_0^2 = R^2$$

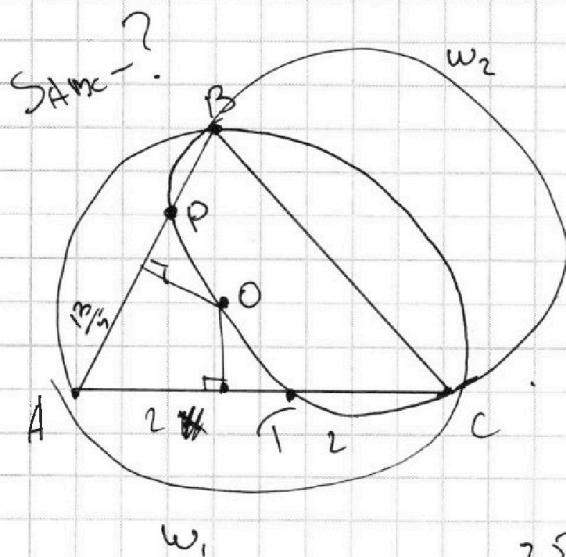
$$X_0 = \frac{102}{25}$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AP = \frac{16}{5}$$

$$BP = 2$$

$$AC = 4$$

$$\deg w_2 \quad A = \cancel{26} \cdot A \cdot B =$$

$$= \frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5} \neq$$

$$4 \times (\cancel{4} \cancel{4} \cancel{4}) = \frac{16.25}{25}$$

$$25x^2 - 100x + 16 = 0$$
$$(5x)^2 - 20(5x) + 16 = 0$$
$$10 \pm \sqrt{100 - 16}$$
$$5x = \frac{10 \pm \sqrt{84}}{2}$$
$$x = \frac{10 \pm \sqrt{84}}{10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n

$3,5 \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} = \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n-1}$

$21 = m^2 - m$

$m^2 - m - 21 = 0$

$m = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 84}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2}$

$m = 5$

$C_{n-2}^2 \cdot C_{n-2}^4$

$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$

C_n^4

$|\Omega| = C_n^4$

$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$

$1 - \frac{C_{n-2}^4}{C_n^4} =$

$C_n^2 \cdot C_{n-2}^2 = 1 - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

C_n^4 - всего

$= 1 - \frac{n^2 - n - n^2 + 9n - 20}{n(n-1)}$

$= \frac{8n - 20}{n(n-1)}$

$3,5 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m}$

$3,5 \cdot \frac{(n-2)(n-3) \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(n-2)(n-3) \dots (n-m+1) \cdot m!}{n(n-1) \dots (n-m+1) \cdot (m-2)!}$

$7 \cdot 8 =$

$42 = m \cdot (m-1)$

$7 \cdot 8 \cdot 3 = m \cdot (m-1) \cdot (m-2)$