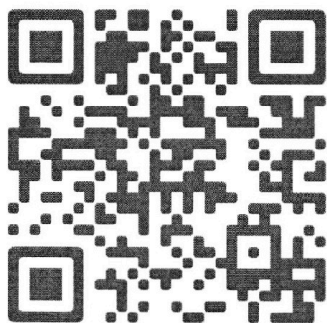




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$A = \overline{aaaa} = IIII \cdot a$. $IIII : 101$ и $IIII : 11$.

$C < 101$. $A < 101^2$, т.е. $A \cdot B \cdot C$ — ивагута,

то $B : 101$ (т.е. $C : 101$, а $A : 101^2$).

т.е. $B : 101$, то $B = 101 \cdot k$, но в записи

B есть "2" $\Rightarrow k = 1$. $B = 11$.

Далее. $C : 11$, т.е. $A : 11$, но $A : 11^2$,

т.е. $a < 11$, а 11 — простое.

т.е. в записи C есть 5, то

$C = 55$.

Итого: $A \cdot B \cdot C = (11 \cdot 101)^2 \cdot 5a \Rightarrow$

$\Rightarrow 5a$ — ивагута $\Rightarrow a = 5$

Ответ: $A = 5555$

$B = 101$

$C = 55$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{По } y_{\text{ал}}: \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$(\Rightarrow) \frac{x-3-x}{x(x-3)} + \frac{y+3-y}{y(y+3)} + \frac{xy-3y+3x-9-xy}{xy(x-3)(y+3)} = 0$$

$$(\Rightarrow) \int \left(\frac{x(x-3) - y(y+3) - 3y + x - 3}{x(x-3)y(y+3)} \right) = 0$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} x^2 - 3x - y^2 - 3y - y + x - 3 = 0 \\ x, x-3, y, y+3 \neq 0 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} x^2 - 2x - y^2 - 4y - 3 = 0 \\ x, x-3, y, y+3 \neq 0 \end{cases}$$

уел.

$$x, y > 0$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} x^2 - 2x + 1 - y^2 - 4y - 4 = 0 \\ (x) \neq 0 \end{cases}$$

$\rightarrow 0,5 \pm 4$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} (x-1)^2 = (y+2)^2 \Leftrightarrow (x-y-3)(x+y+1) = 0 \\ (x) \neq 0 \end{cases}$$

Теперь. Если $x < y+3$, то $x+y+1 < 0$

$$\text{то } \frac{1}{x-3} < 0, \frac{1}{(x-3)(y+3)} < 0 \text{ и } \frac{1}{y+3} < \frac{1}{y}$$

$$\text{т.е. } y < y+3 \text{ (} y > 0 \text{).} \Rightarrow \text{Л. 2 слева}$$

$$\text{для правой части др. 2.} \Rightarrow x-1 - \text{положит.}$$

$$\text{и } y+2 = \text{положит.} \Rightarrow x = y+3$$

$$M = (y+3)^3 - y^3 - 3(y+3)y = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 3y^2 - 9y = 27y + 27 - y^3 - 3y^2 - 9y = 27 - y^3 - 3y^2$$

Ответ: $M = 27$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \text{a)} \quad (\sin^2 x - \sin^2 y) \cdot \sin^2 x = (\cos^2 x + \cos^2 y) \cdot \cos^2 x \\ \Rightarrow & \cos^2 x - \sin^2 x = -\cos^2 x \cdot \cos^2 y - \sin^2 x \cdot \sin^2 y \end{aligned}$$

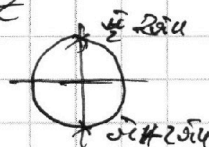
$$\Rightarrow \cos(2x) + \cos(x-y) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{2x+y-x-y}{2} \cdot \cos \frac{2x-x+y-y}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \cos \frac{3x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} = 0$$

$$\cos \alpha = 0 \quad \text{где } \alpha = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}, \alpha \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3x-y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Rightarrow$$



$$\begin{cases} 3x - y = 1 + 2k \\ x + y = 1 + 2l \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

Ответ на п. а):

$$\begin{cases} x + y = 1 + 2l \\ 3x - y = 1 + 2k \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

$$\text{б)} \quad \arccos m \leq \pi \quad \text{и} \quad \arccos m \leq \pi \quad \text{при} \quad m = -1$$

$$\Rightarrow \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{8} < 2\pi \quad \text{всегда, кроме}$$

$$\text{когда } \frac{x}{4} = -1 \quad \text{и} \quad \frac{y}{8} = -1 \quad \Rightarrow x = -4 \quad \text{и} \quad y = -8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Знают пробы x и y удовл. п.э. надо

$$\begin{cases} x+y = 1+2k \\ 3x-y = 1+2l \end{cases} \quad x, y, k, l \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9 \end{cases}$$

Итак, что если $3x-y = 1+2l$ для каких-то

x, y , удовлетворяющих остальным условиям, то

тогда $\exists k$, что $x+y = 1+2k$, так как

$$3x-y = x+y + 2x-2y = x+y + 2(x-y) = 2l+1$$

$$\Leftrightarrow x+y = 2l - (x-y) + 1 \quad | \quad l - (x-y) = k.$$

Значит все пары (x, y) для $3x-y = 1+2l$

также содержатся в $x+y = 1+2k$. А это

усл ($\Rightarrow$) можно споспосов выбрать $x \in \{-4, \dots, 4\}$
 $y \in \{-9, \dots, 9\}$

таких $x+y$ были целыми, но $(-4, -9)$ не
подходит. Это можно посчитать. x - чет, y - чет. или

нечет. Среди x - 52, 4 чет. Среди y - 92 и 10 нечет.

Тогда ответов будет $5 \cdot 10 + 4 \cdot 9 - 1 = 94$ Ответ: 94



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P_1 = \frac{4!}{2!} \cdot \frac{1}{k(k-1)}$$

$$P_2 = \frac{m!}{(m-2)!} \cdot \frac{1}{k(k-1)}$$

$$\text{Приравняем } \frac{4!}{2!} \cdot P_1 = P_2 \Leftrightarrow \frac{4 \cdot 12}{2} \cdot \frac{1}{k(k-1)} = \frac{m(m-1)}{k(k-1)}$$

$$\Leftrightarrow 2m(m-1) = 4 \cdot 12, \text{ придем } m > 4.$$

$$2m^2 - 2m - 84 = 0$$

$$D = 4 + 84 \cdot 8 = 646 = 26^2$$

$$m_1 = \frac{2 + 26}{4} = 4 \quad ; \quad m_2 = \frac{2 - 26}{4} < 0$$

$$\Rightarrow \text{что } m = 4. \quad \text{— не подходит}$$

$$\text{Ответ: } m = 7.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В конце стало $m > 4$ - девочек.

А первоначально было K .

Изнач. числа 4
Вероятность того, что у П. и В. ~~будет равен.~~

~~гла. числа~~ это кол-во способов выбрать ^{(=) кол-во способов выбрать или двух людей.} ~~девочек~~ ^{или двух людей.} где есть П. и В. ^{девочек}

на кол-во всех девочек.

$$T.e \quad P_1 = \frac{C_{K-2}^2}{C_K^4} \quad \frac{P}{1/2} =$$

$$P_2 =$$

Потом девочек стало m . Тогда вероятность

P_2 это кол-во способов выбрать П и В в

группу из $m(=)$ выбрать или $m-2$ из $K-2$

значит на кол-во способов выбрать группу

из m - первонач. K

то же.

$$P_2 = \frac{C_{K-2}^{m-2}}{C_K^m}$$

$$K.e.m. \quad \frac{P}{2} P_1 = \frac{P}{2} \cdot P_2 =$$

$$P_1 = \frac{(K-2)!}{2! \cdot (K-4)!} \cdot \frac{(K-4)! \cdot 4!}{K!}$$

$$P_2 = \frac{(K-2)!}{(m-2)! \cdot (K-2-m+2)!} \cdot \frac{m! \cdot (K-3)!}{K!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☒

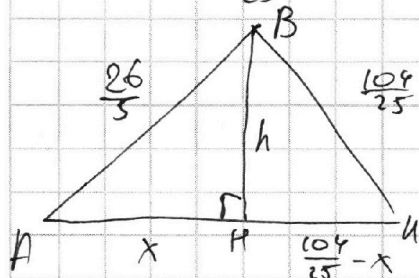
7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Опустим высоту BH . Пусть $AN = x$, тогда

$HN = \frac{104}{25} - x$. По т. Пифагора в $\triangle ANB$ и $\triangle BHN$:



$$\begin{cases} x^2 + h^2 = \left(\frac{26}{5}\right)^2 & (1) \\ h^2 + \left(\frac{104}{25} - x\right)^2 = \left(\frac{104}{25}\right)^2 \end{cases}$$

Вычитаем из (1) (2):

$$\begin{aligned} \left(\frac{104}{25}\right)^2 - \frac{2 \cdot 104}{25}x + x^2 + h^2 - x^2 - h^2 &= \left(\frac{104}{25}\right)^2 - \left(\frac{26}{5}\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{208}{25}x &= \frac{26^2}{25} \Rightarrow x = \frac{26^2}{208} = \frac{13^2 \cdot 2^2}{4^2 \cdot 13} = \frac{13}{4} \end{aligned}$$

Но тогда:

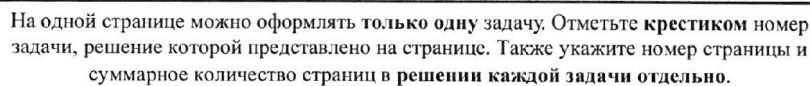
$$h^2 = \frac{26^2}{25} - \frac{13^2}{16} \quad (\text{из (1)})$$

$$\Rightarrow h = \frac{13}{20} \sqrt{4 \cdot 16 - 25} = \frac{13}{20} \sqrt{39}$$

Тогда $S_{ABC} = \frac{h \cdot AC}{2} = \frac{13 \sqrt{39} \cdot 4}{2 \cdot 20} = \frac{13 \sqrt{39}}{10}$

Ответ: $S_{ABC} = \frac{13 \sqrt{39}}{10}$

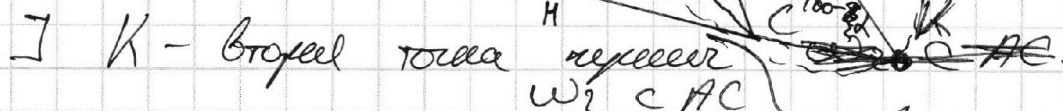
Замечание. Очевидно, что ABC и ABH - остроугольные. По этой же причине BH внутри $\triangle ABC \Rightarrow H$ на отрезке AC .



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



произв отрезков AB и CD из A равна

$$\Rightarrow AP \cdot AB = AC \cdot AU \Rightarrow \frac{AP \cdot (AP + BP)}{AC} = \frac{16 \cdot 26}{5} = \frac{416}{5}$$

$$= \frac{109}{25} > 4 \Rightarrow K \text{ левее } z_a C.$$

 $\angle A = 2\alpha$

Замечание, что $\angle BOC = 2\alpha$, т.е. удвоенный в оср O . Замечание, что $BOC \perp$

Примечание к $\omega_2 \Rightarrow \angle BOC = 180^\circ - \angle PKB$

$\Rightarrow \angle CUB = 180 - 2\angle$. В $\triangle ARK$ известно

2. guess $\Rightarrow \angle ABK = 180^\circ - \angle CUB - \angle KAB =$
 $= 180 - 180 + \angle C - \angle C = \angle C \Rightarrow \angle ABK =$

$$= \langle BAK = \rangle \quad \Delta_{BAK} - \text{pabwdeg } C$$

основанием $AB \Rightarrow BC = AC = AC \cap CH$

$$\begin{array}{r} 109 \\ \times 2 \\ \hline 218 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА

4 ИЗ 4

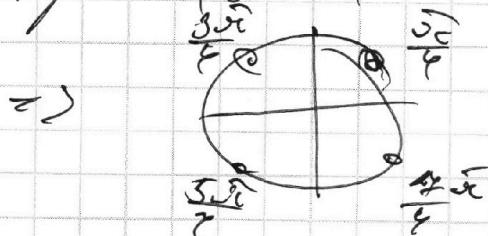
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

То есть мы подиши, что $\sin \alpha$ при

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{тогда } S_{\max} = 3\sqrt{2} + 2(\sqrt{4} + \sqrt{4}) \\ = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{4}.$$

$$\text{при } |\sin \alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } |\cos \alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot k \\ k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $M = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{4}$

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} k, k \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдем производную.

$$f'(x) = \frac{-8x}{2\sqrt{9-4x^2}} + \frac{8x}{2\sqrt{5+4x^2}}$$

Посмотрим, что $f(x) = f(-x)$.

Значит можно считать, что $|x| \geq 0$.

Тогда же ясно, что при $x^2 \rightarrow 1-x^2$

f — не возрастает, значит

можно считать, что $x^2 \in [0; \frac{1}{2}]$

($\Rightarrow$) $x \in [0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$$f'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0, \text{ а при } x < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad f'(x) > 0$$

$\Rightarrow f \uparrow$ (докажем это)

$$\frac{8x}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5+4x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{9-4x^2} > \sqrt{5+4x^2} \quad \text{т.к. } \frac{1}{2} \leq x^2 \leq 1, \text{ то}$$

покажем $9 > 5 + 4x^2 \Leftrightarrow 4 > 4x^2 \Leftrightarrow$

$x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ — т.д. Значит $f_{\max}$ при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

~~и при $x^2 \rightarrow 1-x^2$ — ничего не меняется~~
~~т.е. при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $f_{\max} = 8\sqrt{5} + 2\sqrt{9} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{9}$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

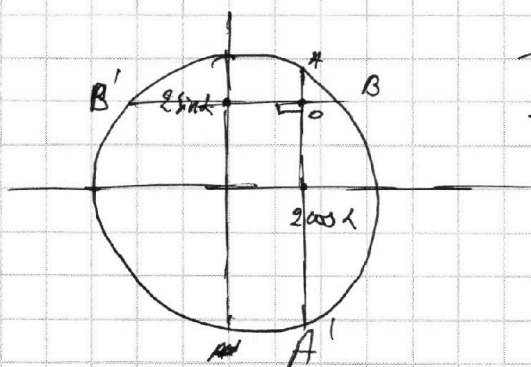
СТРАНИЦА

1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases} \quad - \text{опр} \subset y. (0,0) \text{ и } R=3.$$

Давимте доказательство, что P при
 $3\cos\alpha + 2\cos\alpha \rightarrow -2\cos\alpha$ или
 $+2\sin\alpha \rightarrow -2\sin\alpha$ P -и не изменяется.
 $\downarrow$ или $\sin\alpha > 0, \cos\alpha \geq 0$.



~~$P = AO$~~

то это нам поможет

это дает AB и
 $A'B'$ и то что

правее (или на) AO и левее (или на) OB
 и $A'B'$ и AO и OB и $A'B'$ и AO и OB .

$$P = AB + A'B' + BO + OB + AO + AO = AB + A'B' + BB' + AA'.$$

Т.д. $\angle AOB = \angle A'B'O = \angle AOB + \angle A'B'O$

или $\angle AOB = 90^\circ \Rightarrow AB + A'B' = \frac{2\sqrt{2}R}{2} = \sqrt{2}R = 3\sqrt{2}.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдем AA' и BB' .

$$y \quad B'(-m; 2\sin\alpha) \quad \text{и} \quad y \quad B(m; 2\sin\alpha).$$

$$\Rightarrow BB' = m - (-m) = 2m. \quad (\text{т.к. } B \text{ и } B' \text{ от } OY)$$

найдем BB' - на осей $\Rightarrow$

$$m^2 + 4\sin^2\alpha = 9 \Rightarrow m = \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow BB' = 2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$$

$$\text{Найдем } AA' = 2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$$

$$\text{т.е. } P = 3\sqrt{5} + 2(\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\cos^2\alpha})$$

$\Rightarrow$ Заметим, что для любых α $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ являются значениями $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$

$$\Rightarrow \text{можно считать, что } \sin\alpha, \cos\alpha \in [0, 1]$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

Значит осталось найти $P_{\max}$. $3\sqrt{5}$ - константа

$$\Rightarrow \text{надо найти } \max \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$$

$$\text{Положим } x = \sin\alpha \quad (0 \leq x \leq 1) \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - x^2$$

$$\sqrt{9 - 4x^2} + \sqrt{5 + 4x^2} = f(x)$$

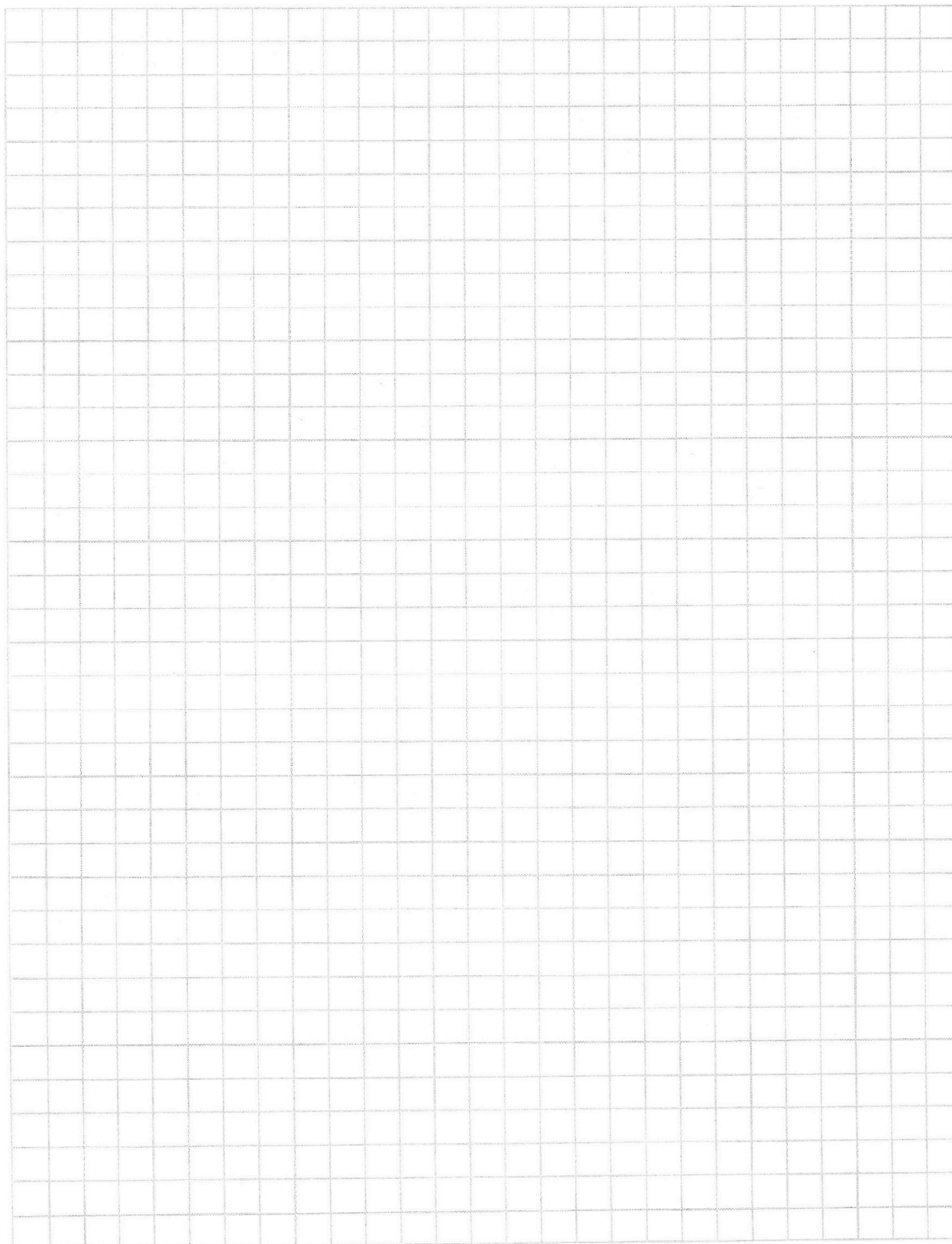


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

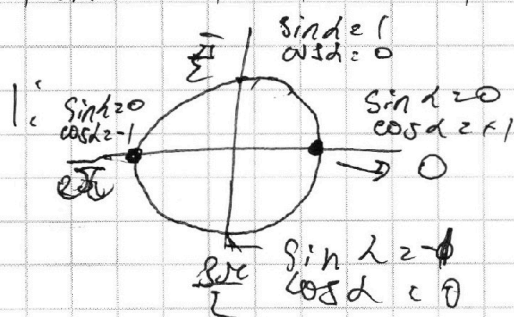
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.е. при $\omega = 1$, то $f_{\max} =$
 $= 3\sqrt{5} + 2(3 + \sqrt{5})$.

А достигается оно при $|\sin \alpha| = 0$

и $|\cos \alpha| = 1$, а точнее при

$$|\sin \alpha| = 1 \text{ и } |\cos \alpha| = 0$$



$\Rightarrow$ Ответ: $P(P(\alpha))_{\max} = 14 = 3\sqrt{5} + 2(3 + \sqrt{5})$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot k \quad k \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$A \approx IIII \approx 101 \cdot 11$~~
 ~~$B \approx 101$~~
 ~~$C \approx 55$~~
 ~~$A \cdot B \cdot C =$~~
 ~~$A \approx K \cdot 11 \cdot 101$~~
 ~~$B \approx 101$~~ Ответ:

$A \approx 5555 \approx 5 \cdot 11 \cdot 101$
 $B \approx 101$
 $C \approx 55 \approx 5 \cdot 11$
 $A \cdot B \cdot C = 5^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \approx 155 \cdot 11 \cdot 101$
 $A = \overline{aaaa} \Rightarrow A \approx 1000a + 100a + 10a + a \approx 1111a$
 $B \approx IIIIa : 101$, так как $IIII \approx 11 \cdot 101$
 $\Rightarrow$ что одно из B или $C : 101$, т.к.
 $A : 101^2$ (т.к. $101^2 > 10000$),
 $C : 101$, т.к. $101 > C \Rightarrow B : 101$.
 Но тогда $B : 11$, т.к. $11 \cdot 101 > 1000$.
 Значит C делится на 11, а т.к. имеет
 5 своих делителей, то $C = 55$. $B = K \cdot 101$ $A = M \cdot 101$
 ~~$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = 5M \cdot K \cdot (101 \cdot 11)^2 \Rightarrow 5M \cdot K$ сд. ч. не имеет~~

Ответ = K .
 Сумма делов 4 делителя.
 Тогда всего $m \geq 4$.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x+3}$$

$$\frac{x(x+3) - (x-3)(x+3) + (x-5)(x+3)}{x(x-3)(x+3)} = \frac{(x-5)(x+3)}{x(x-3)(x+3)}$$

$$x(x+3) - (x-3)(x+3) + (x-5)(x+3) = (x-5)(x+3)$$

$$x^2 + 3x - (x^2 - 9) + x^2 - 2x - 15 = x^2 - 2x - 15$$

$$x^2 + 3x - x^2 + 9 + x^2 - 2x - 15 = x^2 - 2x - 15$$

$$x^2 + x - 6 = x^2 - 2x - 15$$

$$3x + 9 = 0$$

$$x = -3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$x \geq 3$$

$$1 + \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)} + \frac{1}{(y+3)} = \frac{x+y+1}{xy}$$

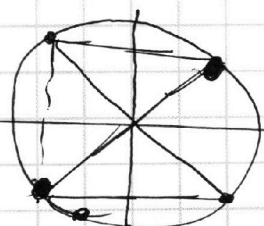
$$\frac{(x-3)(y+3)}{(x-3)(y+3)} - \frac{(x-3)(y-3)+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{xy}$$

$$xy(x-3)(y+3) + xy = x(x-3)(y+3) + y(x-3)(y+3) + 1 \cdot (x-3)(y+3)$$

$$xy(xy - 3y - 3x + 9) + xy = x \dots$$

$$xy^2 - 3xy - 3x^2y + 9xy + xy = x^2y - 3xy - 3x^2y + 9x$$

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} = \frac{x-3}{x-3}$$



$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$(\sin \alpha - \sin \beta \sin \alpha) = (\cos \alpha + \cos \beta \cos \alpha)$$

$$(\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \sin \alpha) = (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \cos \alpha)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По угу: $\sin^2 \sqrt{c}x - \sin \sqrt{c}y \cdot \sin \sqrt{c}x = \cos^2 \sqrt{c}x + \cos \sqrt{c}x \cdot \cos \sqrt{c}y$

$\Leftrightarrow \cos 2\sqrt{c}x = -\cos(\sqrt{c}(x-y))$

$\Leftrightarrow \cos 2\sqrt{c}x + \cos(\sqrt{c}(x-y)) = 2 \cos \frac{2\sqrt{c}x + \sqrt{c}(x-y)}{2} \cdot \cos \frac{2\sqrt{c}x - \sqrt{c}(x-y)}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \cos \frac{2\sqrt{c}x + \sqrt{c}(x-y)}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{c}x + \sqrt{c}(x-y)}{2} = \pm \frac{\sqrt{c}}{2} + 2\sqrt{c}k, k \in \mathbb{Z}$

$\frac{2\sqrt{c}x + \sqrt{c}(x-y)}{2} = \pm \frac{\sqrt{c}}{2} + 2\sqrt{c}l, l \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pm 1 + 4k & k \in \mathbb{Z} \\ 3x-y = \pm 1 + 4l & l \in \mathbb{Z} \end{cases}$

т.е. Ответ: $\begin{cases} x+y = 4k \pm 1, k \in \mathbb{Z} \\ 3x-y = \pm 1 + 4l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$

т.е. все пары (x, y) удовлетворяют

одной из условий выше.

~~Всего 2~~ $2\sqrt{4} > \sqrt{3} + \sqrt{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

б) Заметим, что $\arccos x \leq \pi$
и равен π только при $x = -1$.

Значит подходят все x, y , удовлетворяющие

$$\begin{cases} \begin{cases} \frac{x}{4} \neq -1 \\ \frac{y}{9} \neq -1 \end{cases} & (=) \\ \begin{cases} -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 \text{ и } y \neq -9 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9. \end{cases}$$

Даваяте для всех x найдем соответствующий y в перес.

~~$$x \in [-4; 4] \text{ и } x+y \in [-4; 4] \text{ и } x \in (-1; 1)$$~~

~~$$y \in \frac{4}{x+1} + 1. \quad \text{и } x \neq -1, x \neq 0, x \neq -2$$~~

~~$$\Rightarrow x \neq -1, x \neq 0, x \neq -1, x \neq -2,$$~~

~~$$x \neq -3 \text{ т.е.}$$~~

~~$$(-4; 9) \cup (-4; 5) \cup (-4; 1) \cup (-4; -3) \cup (-4; -9)$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

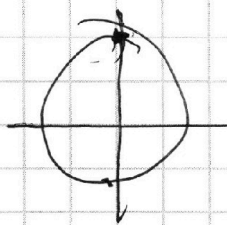
$$\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\xrightarrow{\times 2} \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = -\cos(\alpha - \beta)$$

$$\frac{3+3}{21} + \frac{4+5+6}{15} + \dots$$

$$2 \cos \frac{3\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$$



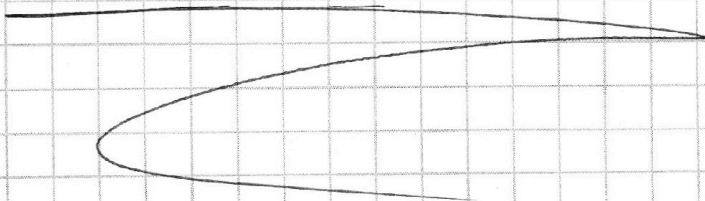
$$\begin{cases} \frac{3\alpha - \beta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}k \\ \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}l \end{cases}$$

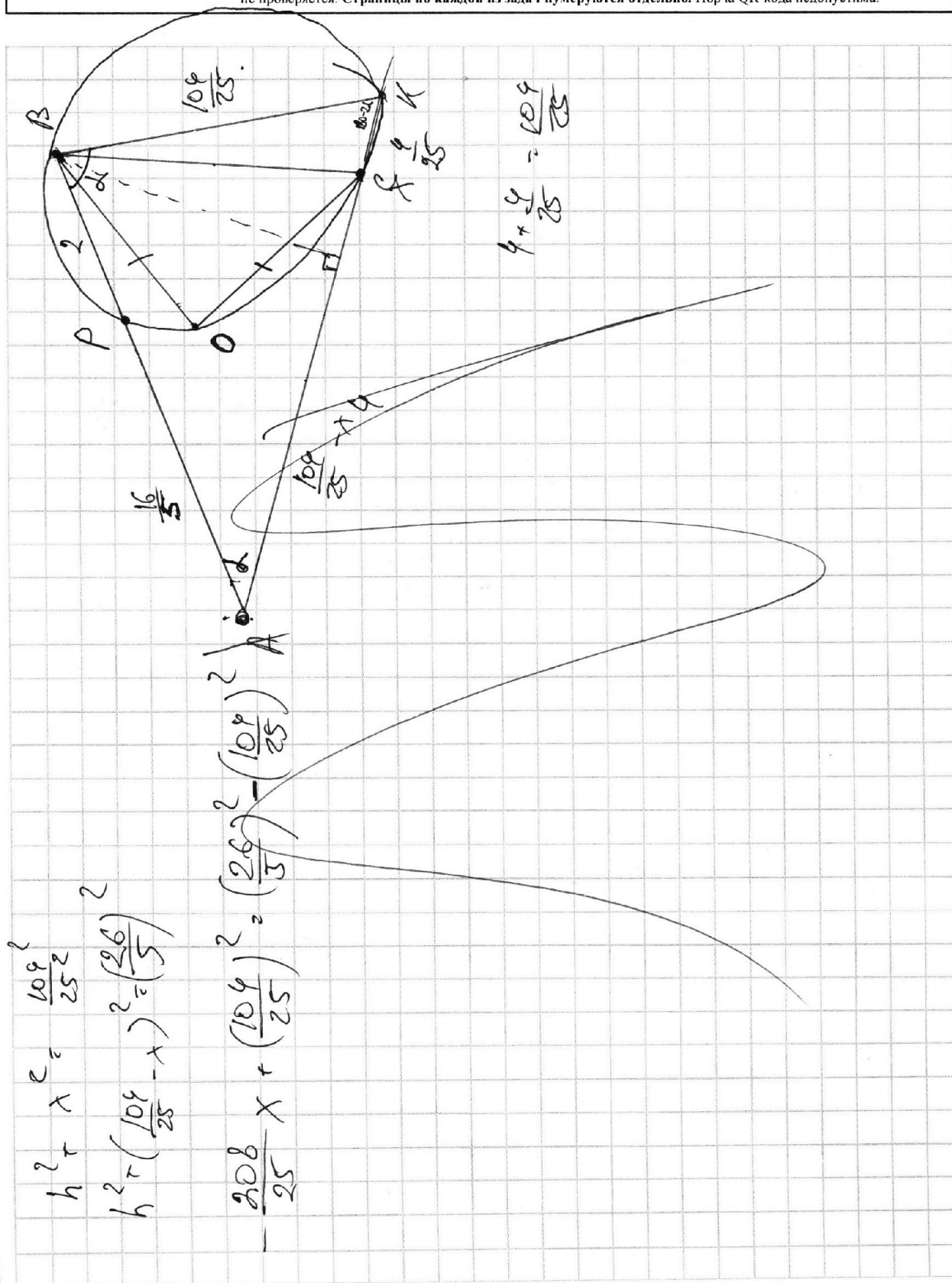
$$\begin{aligned} 3x - y &= 1 + 2k \\ x + y &= 1 + 2l \end{aligned}$$

$$\frac{1 + 2k + y}{3} = 1 + 2l - y \quad | \cdot 3 ?$$

$$4y = 3l + 3 - 2k - 1 = 3l - 2k - 2$$

$$2y = 3l - k - 1$$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☒	☒	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Давайте составим таблицу.

где x и y в соотв. понятие, что

при этом x и y зависят только от a

или b , а у них может быть, сколько

$\rightarrow$ эти значения $\uparrow$.

x_i	3	2	1	0	-1	-2	-3
4	9	5	1	-3	-7	-11	5
3	10	6	2	-2	-6	-10	4
2	11	7	3	-1	-5	-9	5
1	12	8	4	0	-4	-8	5
0	13	9	5	1	-3	-7	5
-1	14	10	6	2	-2	-6	4
-2	15	11	7	3	-1	-5	5
-3	16	12	8	4	0	-4	5
-4	17	13	9	5	1	-3	5

$$x = 4k + 1 - y \rightarrow$$

$$y = 4k + 1 - x$$

Всего чисел получится 43.

$\rightarrow$ 43 пары.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА
☒ ☒ ☒ ☒ ☐ ☐ ☐ ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 2\sqrt{c}x = -\cos(\sqrt{c}(x-y)).$$

~~cos равен, когда отменяется все~~
~~2\sqrt{c}x~~ cos противоположны, когда.

$$\cos 2\sqrt{c}x + \cos(\sqrt{c}(x-y)) =$$

$$= 2 \cos \frac{2\sqrt{c}x - \sqrt{c}x + \sqrt{c}y}{2} \cdot \cos \frac{2\sqrt{c}x + \sqrt{c}x - \sqrt{c}y}{2} = 0.$$

$$\frac{\sqrt{c}x - \sqrt{c}y}{2} = \pm \frac{\sqrt{c}}{2} + 2\sqrt{c}k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x - y = \pm 1 + 4k. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow x = 4k + 1 + y \quad \text{и} \quad x = 4k - 1 + y.$$

$$\text{и} \quad \frac{3\sqrt{c}x - \sqrt{c}y}{2} = \pm \frac{\sqrt{c}}{2} + 2\sqrt{c}l \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

$$3x - y = \pm 1 + 4l$$

$$\Rightarrow x = \frac{4l \pm 1 + y}{3}$$

$\arccos \frac{x}{4} + \arcsin \frac{y}{3} = 2\pi$
 берете целое.

$$\frac{x}{4} = -1 \quad ; \quad \frac{y}{3} = -1 \quad c=1$$