

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$
Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a$. ^Q $\overline{1111}$ - цифра

$C < 101$. $A < 101$, т.д $A \cdot B \cdot C$ - квадрат,

то $B \div 101$ ($1 \cdot a \cdot C \div 101$, $a \cdot A \div 101^2$).
 $1 \leq a \leq 9$, $10 \cdot 101 > 10^2$.

т.к $B \div 101$, то $B = 101 \cdot k$ и k в **единице**

В есть $"\pm"$ $\Rightarrow k = 1$. $B \div 11$.

Далее. $C \div 11$ т.д $A \div 11$, но $A \div 11^2$

т.д $a < 11$, $a \neq 11$ - **простое**.

т.д B **единице** C есть 5 , то

$C = 55$.

Следовательно: $A \cdot B \cdot C = (11 \cdot 101)^2 \cdot 5 \cdot a \Rightarrow$

$\Rightarrow 5a$ - квадрат $\Rightarrow a = 5$

Ответ: $A = 5555$

$B = 101$

$C = 55$,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Решение: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3-y}{x(x-3)} + \frac{y+3-x}{y(y+3)} + \frac{xy-3y+3x-9-xy}{xy(x-3)(y+3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \left(\frac{x(x-3) - y(y+3) - xy + x - y}{x(x-3)y(y+3)} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - y^2 - 8y - y + x - 3 = 0 \\ x \neq 3, y \neq -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - y^2 - 8y - 3 = 0. \\ x \neq 3, y \neq -3 \end{cases} \quad \text{реш.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 - y^2 - 4y - 4 = 0 \\ (*) \neq 0 \quad (\vee) \end{cases} \quad \boxed{x \neq 0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = (y+2)^2 \\ (*) \neq 0. \end{cases} \quad \text{Tempo. Если } x < 3, \quad \boxed{x \neq 0}$$

$$\text{т.ч. } \frac{1}{x-3} < 0 \quad \frac{1}{(x-3)(y+3)} < 0 \quad \text{и } \frac{1}{y+3} < \frac{1}{y}$$

$$\text{т.ч. } y < y+3 \quad (y > 0). \quad \Rightarrow 1.2 \text{ класс}$$

For ~~данные~~ имеем $y > 0$. $\Rightarrow x-1 -$ нечетное

$$y - y+2 = \text{нечетное.} \quad \Rightarrow x = y+3.$$

$$M = (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y \Rightarrow M = 27. \quad \text{Ответ: } M = 27.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

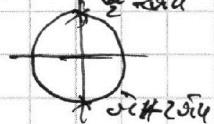


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & a) (\sin \sqrt{2}x - \sin \sqrt{2}y) \cdot \sin \sqrt{2}x = (\cos \sqrt{2}x + \cos \sqrt{2}y) \cdot \cos \sqrt{2}x \\
 \Leftrightarrow & \cos^2 \sqrt{2}x - \sin^2 \sqrt{2}x = -\cos \sqrt{2}x \cdot \cos \sqrt{2}y - \sin \sqrt{2}x \cdot \sin \sqrt{2}y \\
 \Leftrightarrow & \cos(2\sqrt{2}x) + \cos(\sqrt{2}(x+y)) = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2 \cos \frac{2\sqrt{2}x + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y}{2} \cdot \cos \frac{2\sqrt{2}x - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y}{2} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos \frac{3\sqrt{2}x - \sqrt{2}y}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}x + \sqrt{2}y}{2} = 0 \\
 & \cos x = 0 \quad \text{тогда } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\
 \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} \frac{3\sqrt{2}x - \sqrt{2}y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi u, u \in \mathbb{Z} \\ \frac{\sqrt{2}x + \sqrt{2}y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi v, v \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \\
 & \left. \begin{array}{l} 8x - y = 1 + 2k \\ x + y = 1 + 2l \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{или} \\ \text{или} \end{array} \\
 & \left. \begin{array}{l} x + y = 1 + 2c \\ 3x - y = 1 + 2d \end{array} \right. \quad u, l \in \mathbb{Z}, c, d \in \mathbb{Z} \\
 & \text{Ответ на n. a.:} \\
 & \text{если } \arccos m \leq \sqrt{2} \text{ и } \arccos m \geq \sqrt{2} \text{ тогда } m = -1 \\
 \Rightarrow & \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} \leq \sqrt{2} \text{ бывает } x = -4, y = -3
 \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Значит можно на x и y уравн $1+2c$

$$\begin{cases} x+y = 1+2c \\ 3x-y = 1+2c \end{cases} \quad x, y, c \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ y = -y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{3} \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ -3 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

Ислю что если $3x-y = 1+2c$ для какого-то

x, y, c то остальное след. верно что

тогда $\exists k$, что $x+y = 1+2k$, так как

$$3x-y = x+y + 2x-2y = x+y + 2(x-y) = 2c + 1$$

$$\Rightarrow x+y = 2k - (x-y) + 1. \quad \square - (x-y) = c.$$

значит все подагог. пары где $3x-y = 1+2c$

также удовлетворяют $x+y = 1+2k$. А это

значит что можно спокойно брать $x \in \{-4, \dots, 4\}$
 $y \in \{-3, \dots, 3\}$

тогда $x+y$ будет целиком из $(-4, -3)$ - не может. Это нужно показать. x -чет, y -нечет. или

наоборот. Среди $x=52$ чет. Среди $y=92$ и 10 нет

$$\text{тогда общее количество } 5 \cdot 10 + 4 \cdot 9 - 1 = 94 \text{ общ. 94}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P_1 = \frac{4!}{2!} \cdot \frac{1}{K(a-1)}$$

$$P_2 = \frac{m!}{(m-2)!} \cdot \frac{1}{K(a-1)}$$

$$\text{Пренеис } \frac{4}{2} \cdot P_1 = P_2 \Leftrightarrow \frac{4 \cdot 12}{2} \cdot \frac{1}{a(a-1)} = \frac{m(m-1)}{a(a-1)}$$

$$\Rightarrow 2m(m-1) = 4 \cdot 12, \text{ при этом } m > 4.$$

$$2m^2 - 2m - 84 = 0$$

$$D = 4 + 84 \cdot 8 = 646 = 28^2$$

$$m_1 = \frac{2 + 28}{4} = 7 \quad ; \quad m_2 = \frac{2 - 28}{4} < 0$$

$$\Rightarrow \text{так } m = 7. \quad - \text{ не подходит}$$

$$\text{Однако } m = 7.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7 в штурме стало $m > 4$ - ошибки.

А ошибки были K.

Изм. места 4

Вероятность того, что 3 П. и В. ~~одинаковы~~

~~одинаковы~~ это вероятность ~~одинаковы~~
(=) Кол-во способов подбора
или двойной ошибки.

известно, что есть П. и В. ~~одинаковы~~

то вероятность всех ошибок.

$$\text{т.е } P_1 = \frac{\binom{m}{K-2}}{\binom{m}{K}}$$

P_2

Потом ошибок стало m. Тогда вероятность

P_2 это вероятность ошибок П и В в

чтобы из m(²) выбрать или m-2 из $m-2$

то есть вероятность ошибок П и В в

чтобы из m- ошибок. Тогда $\frac{1}{2}P_1 = \frac{1}{2} \cdot P_2$ -

но так. $P_2 = \frac{\binom{m}{K-2}}{\binom{m}{K}}$

$$P_1 = \frac{(K-2)!}{2! \cdot (m-4)!} \cdot \frac{(m-4)! \cdot 4!}{K!}$$

$$P_2 = \frac{(K-2)!}{(m-2)! \cdot (m-2-m+2)!} \cdot \frac{m! \cdot (K-m)!}{K!}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

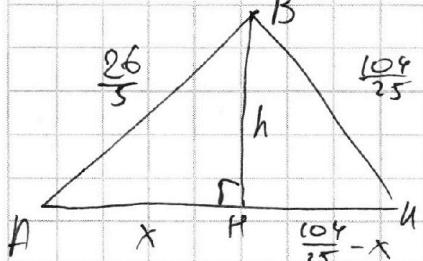
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Опустим высоту BH . Тогда $AH = x$

$HU = \frac{104}{25} - x$. Но т.к. $\angle AHB = \angle BHU$:



$$\left. \begin{array}{l} x^2 + h^2 = \frac{26^2}{5^2} \\ h^2 + \left(\frac{104}{25} - x\right)^2 = \left(\frac{104}{25}\right)^2 \end{array} \right\} \quad \textcircled{1}$$

Вычтем из \textcircled{1} \textcircled{2} от:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{104}{25}\right)^2 - \frac{2 \cdot 104}{25}x + x^2 + h^2 - x^2 - h^2 + \left(\frac{104}{25}\right)^2 - \left(\frac{26}{5}\right)^2 \\ \Leftrightarrow & \frac{208}{25}x = \frac{26^2}{25} \Leftrightarrow x = \frac{26^2}{208} = \frac{13^2 \cdot 2^2}{4^2 \cdot 13} = \frac{13}{4}. \end{aligned}$$

Но тогда $h^2 = \frac{26^2}{25} - \frac{13^2}{4}$ (из \textcircled{1})

$$\Rightarrow h = \frac{13}{20} \sqrt{4 \cdot 16 - 25} = \frac{13}{20} \cdot \sqrt{39}$$

$$\text{Тогда } S_{ABC} = \frac{h \cdot AC}{2} = \frac{13 \sqrt{39} \cdot 4}{2 \cdot 20} = \frac{13 \sqrt{39}}{10}$$

Ответ: $S_{ABC} = \frac{13 \sqrt{39}}{10}$

Замечание. Ось симметрии ABC , т.к. ABC - остроугольный. Но этой же причиной BH будет осью симметрии $ABC \Rightarrow H$ на отрезке AC .

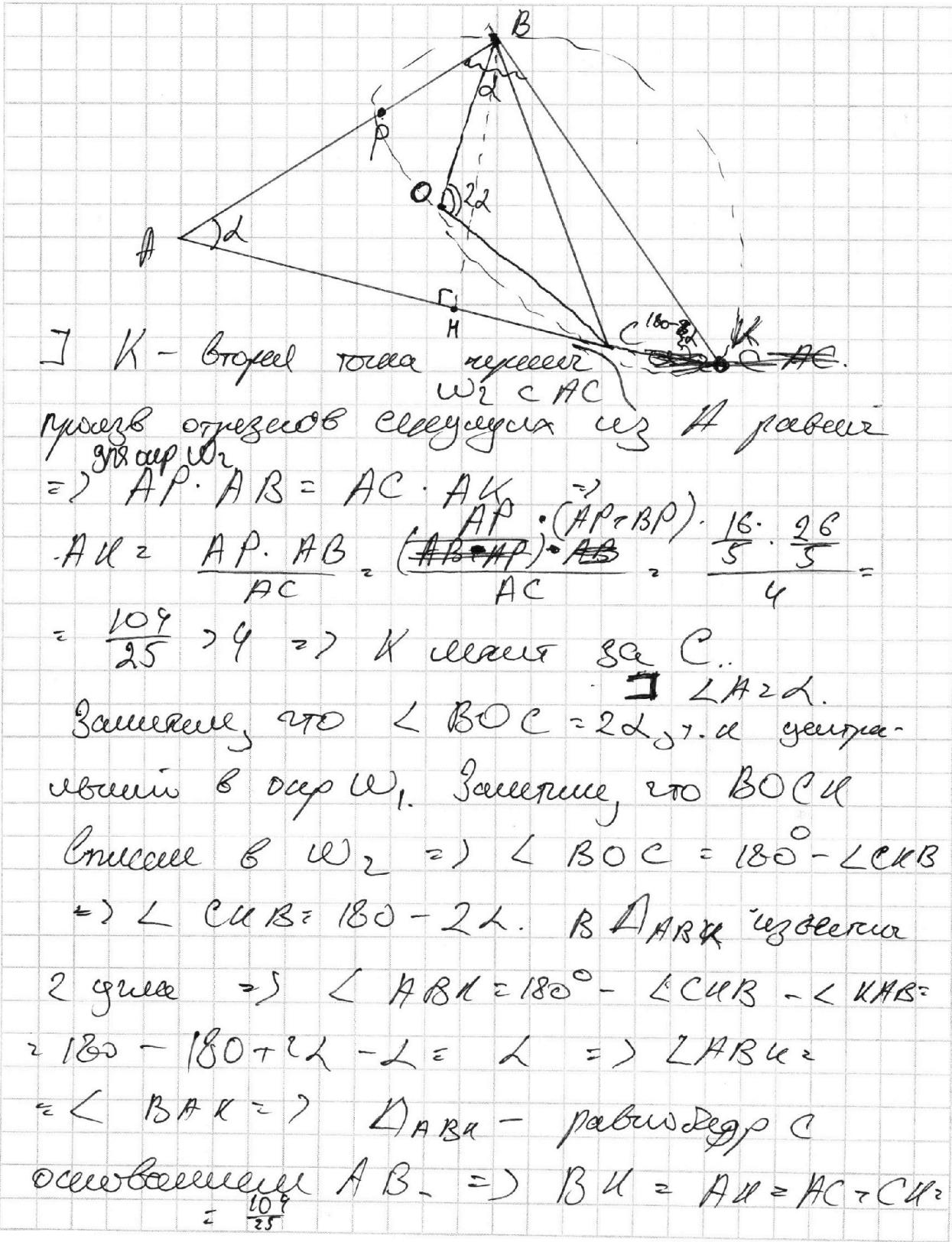


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

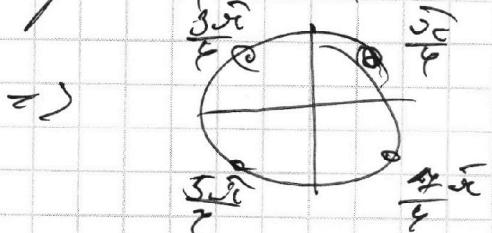
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

То есть для подачи со синим при

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{тогда } S_{\max} = 3\sqrt{c} + 2(\sqrt{2} + \sqrt{2}) \\ = 3\sqrt{c} + 4\sqrt{2}.$$

При $(\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2})$



$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } N = 3\sqrt{c} + 4\sqrt{2}.$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k \quad k \in \mathbb{Z}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Найдем производную:

$$f'(x) = \frac{-8x}{2\sqrt{9-4x^2}} + \frac{8x}{2\sqrt{5+4x^2}}$$

Рассмотрим, что $f(x) = f(-x)$.

Значит можно сказать, что $x^2 \geq 0$.

Также видно, что при $x^2 \rightarrow 1 - x^2$

f — ее производная, значит

может сказать что $x^2 \in [0; \frac{1}{2}]$

$$\Leftrightarrow x \in [-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}]$$

$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \text{ и при } x < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad f'(x) > 0$$

$\Rightarrow f'$ возрастает (здесь это означает что f).

$$\frac{8x}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} \right) > 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5+4x^2}} > \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{9-4x^2} > \sqrt{5+4x^2}, \quad 1 - 4x^2 \leq 1, \quad \text{т.е.}$$

найдем x $\Rightarrow 4 > 8x^2 \Leftrightarrow$

$$x < \frac{\sqrt{2}}{2} - 2, \text{ т.е. } \text{значит } f_{\max} \text{ при } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

~~$$\text{при } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 1 - x^2 = \text{какого же значение}$$~~

$$\Leftrightarrow x_{\max} \text{ при } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ при } x = f_{\max} = 8\sqrt{2} + 2\sqrt{9 - 7 + 5}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

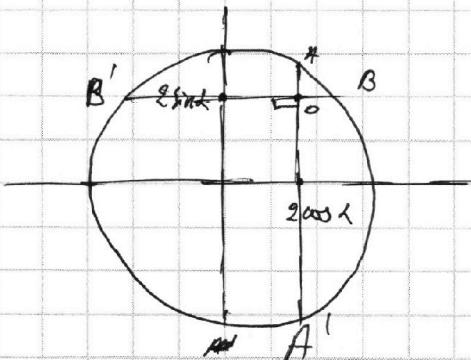
СТРАНИЦА

1 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 3 - \text{окр с ц. } (0,0) \text{ и } R=3. \end{cases}$$

Давайте решим это при
значениях $+2 \cos \alpha \rightarrow -2 \cos \alpha$ и
 $+2 \sin \alpha \rightarrow -2 \sin \alpha$ — P-е не существует.
И тут $\sin \alpha > 0 \quad \cos \alpha > 0$.



$$P = AO$$

то это нам подходит

то есть AB

$A'B'$ и то это

расстояние между точками A и B

и расположение между точками A' и B'.

$$P = \overline{AB} = \overline{A'B'} = \overline{B'O} + \overline{OB} + \overline{AO} = \overline{AB} + \overline{A'B'}$$

$$+ BB' + AA'. \quad \text{т.д.} \quad \angle AOB = \overline{AB} + \overline{A'B'} = \frac{\overline{AB} + \overline{A'B'}}{2}$$

или выражая угол, в другой форме

$$\angle AOB = 90^\circ \Rightarrow \overline{AB} + \overline{A'B'} = \frac{2\sqrt{R^2}}{2} = \sqrt{2}R = \sqrt{2}R = 3\sqrt{2}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдем AA' и BB' .

$\Rightarrow B'(-m; 2\sin \alpha)$ и $B(m; 2\sin \alpha)$.

$\Rightarrow BB' = m - (-m) = 2m$. (т.к. Всегда
правильнее B, B' - это симметричные точки)

$$m^2 + 4\sin^2 \alpha = 9 \Rightarrow m = \sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow BB' = 2\sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha}.$$

Найдем $AA' = 2\sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha}$.

$$\text{т.е. } P = 3\sqrt{9 + 2(\sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha})}$$

~~т.е. Задача, это есть свидетельство~~

~~использования выражения $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$~~

\Rightarrow нужно проверить, что $\sin \alpha \cos \alpha \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

Задача решается чисто аналитически - методом

$$\Rightarrow \text{найдем максимум } \sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha}.$$

Помним, что $x = \sin \alpha$ ($\sin \alpha \leq 1$) $\Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - x^2$

$$\sqrt{9 - 4x^2} + \sqrt{5 + 4x^2} = f(x).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

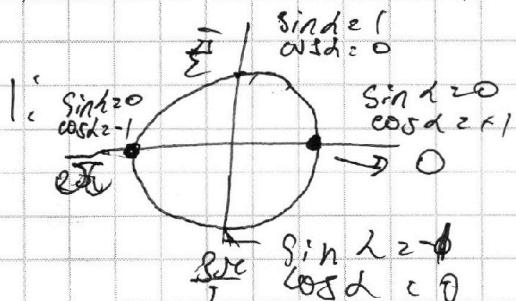
т.е. для ω имеем $\Rightarrow \sin \omega =$

$$= 3\sqrt{5} + 2(3 + \sqrt{5})i.$$

Изображаем на оси $|\sin \omega| = 0$

и $|\cos \omega| = 1$, а также $\sin \omega = 0$

$$|\sin \omega| = 1 \quad \text{и} \quad |\cos \omega| = 0$$



$$= 14 + 3\sqrt{5} + 2(3 + \sqrt{5})i$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } P(P(\omega))_{\max} = 14 + 3\sqrt{5} + 2(3 + \sqrt{5})i$$

$$\omega = \frac{\pi}{2} \cdot k \quad k \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

+2) $5 + \cos^2 \alpha$ / - no g-eig Dec 4 sin² α no x $\sqrt{5 + \cos^2 \alpha}$ = x

APR 2 16

B922

4

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 5 \\ \hline 130 \end{array}$$

1
2
3

27

$$\frac{BO_1}{AB} = \frac{BH}{BY}$$

$$2 \sqrt{5 + \cos^2 x} \quad \sqrt{5 + \sin^2 x} \quad \sqrt{5 - \sin 2x}$$

$$+ \sum_{j=1}^n \beta_j r \cos \alpha_j =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\boxed{9 - 4x^2} + \boxed{5 + x^2}$$

$$-\frac{8x}{259-9x^2} + \frac{8x}{255+6x^2} = 0$$

$$\frac{1}{\sin \lambda^2} = \frac{B H}{R}$$

BTK sink

$$y = 3 - 4x^2$$

11

$$\frac{26}{5} \sin x = 2R$$

$$\sin d = \frac{5R}{10R} = \frac{1}{2}$$

$$\text{BH} = \frac{5\pi}{18}$$

$$2. \quad \left(g - 4 \sin^2 \theta \right) + \left(g - 4 \cos^2 \theta \right)$$

$$\sqrt{9 - 4 \sin^2 x} + \sqrt{9 - 4 \cos^2 x} = \sqrt{5} + \sqrt{5} \sin x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$A \approx 111. \approx 101 \cdot 11$$

$$\cancel{B = 101}$$

~~C 355~~

A · B · C =

~~A₂ K · H · 101~~

~~B = 101~~

$$\bar{A} = 55555 = 5 \cdot 11 \cdot 101$$

$$\beta = 101 \quad q = 8.89 \approx$$

$$C = 55 \approx 5.11 \quad : 642 + 4 = 646.26$$

$$A \cdot B \cdot C = 5^2 \cdot 11^1 \cdot 101^2 = \cancel{155} \cdot 11 \cdot 101$$

$$A = \overline{aaaa} \Rightarrow A = 1000a + 400a + 40a + a = 1111a$$

~~But~~ $\overline{1111}$ a : 101, race was $\overline{1111} = 11 \cdot 101$

=> 270 ogres uz Buree C ; 101

$$A \approx 101^2 \quad (1.4 \cdot 101^2 > 10000).$$

$C \vdash 101, r, a \quad 101 \geq C \Rightarrow B ; 101$

Hlo roza Bi II, r.a 11.101>1000.

Secret C cleared ua 11, and secret

~~$$5 \text{ f} \text{Chen zemna, } r_0 C = 55. \quad B = k \cdot 10^1 \quad A = m \cdot 10^1$$~~

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = \sin \alpha \cdot (\cot \alpha \cdot 1) \Rightarrow \sin \alpha = \text{cos} \alpha \text{ was zuerst}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$1 + xy = y + x - 2xy$$

~~$x \rightarrow y$~~

$$\frac{(x-3)(y+3) - (x-3)(y-3) + 1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{xy}$$

$$xy(x-3)(y-3) + xy = x(x-3)(y+3) + y(x-3)(y+3)$$

$$+ 1 \cdot (x-3)(y+3)$$

~~$xy(x^2 - 3y^2 - 3x^2y + 9) + xy = x^2 - 3y^2 - 3x^2y + 9$~~

~~$x^2y^2 - 3xy^2 - 3x^2y^2 + 9xy + xy = x^2y^2 - 3xy^2 - 3x^2y^2 + 9$~~
 ~~$x^2y^2 - 3y^2 - 8xy + 9y + xy - 3x - 3y + 9$~~

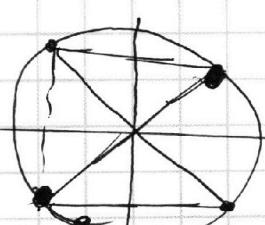
~~$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x-y}{xy} + (y-x) \cdot 2 = -2$~~

~~$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x-y}{xy} + (y-x) \cdot 2 = -2$~~
 ~~$(y-x) \cdot 2 = x \cdot 2 - 2 = -2$~~
 ~~$y-x = -1$~~

~~$\cos \alpha = \cos(\alpha - \beta)$~~
 ~~$\cos \alpha = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$~~

$$(\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha = \overline{\sin \beta} / \sqrt{1 - \overline{\sin^2 \beta}}$$

$$(\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha = \overline{\sin \beta} / \sqrt{1 - \overline{\sin^2 \beta}} = \overline{\sin \beta} / \sqrt{1 - \overline{\sin^2 \alpha}}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{No } \frac{a}{yae}: \sin^2 \sqrt{c}x - \sin \sqrt{c}y \cdot \sin \sqrt{c}x = \cos^2 \sqrt{c}x + \cancel{\sin^2 \sqrt{c}x} + \cos \sqrt{c}x \cdot \cos \sqrt{c}y$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\sqrt{c}x = -\cos(\sqrt{c}(x-y)).$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\sqrt{c}x + \cos(\sqrt{c}(x-y)) \Leftrightarrow 2 \cos \frac{\sqrt{c}x - \sqrt{c}(x-y)}{2}.$$

$$\cancel{\cos} \cdot \cos \frac{2\sqrt{c}x - \sqrt{c}(x-y)}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\sqrt{c}x - \sqrt{c}(x-y)}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{2\sqrt{c}x + \sqrt{c}(x-y)}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right. \\ & \text{или} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y = \pm 1 + 4u, u \in \mathbb{Z} \\ 3x-y = \pm 1 + 4l, l \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

$$\text{t.e. Drei: } \begin{cases} x+y = 4u+1, u \in \mathbb{Z} \\ 3x-y = 4l+1, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

t.e. Все пары (x,y) удовл. доз.

Все 1ому условию могут удовл.

$$\text{Одн. } \cancel{2\sqrt{c}} \cdot 2\sqrt{1} \Rightarrow \sqrt{3} + \sqrt{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Заметим, что $\arccos x \leq 50^\circ$

и равен π только при $x = -1$.

Значит неравенство $x \geq g$, с которого
запись началась

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{4} \neq -1 \\ \frac{y}{g} \neq -1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{g} \leq 1 \end{array} \right. \quad (=)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -4 \leq x \leq 4 \\ -g \leq y \leq g \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -4 \text{ и } y \neq -g \\ -4 \leq x \leq 4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -g \leq y \leq g. \end{array} \right.$$

Далее при всех x мы будем считать
 y неизвестным

~~$x = -4 \text{ и } x + y = 40^\circ \Rightarrow y \in (-\infty, -4)$~~

~~$y = 4(1+1) + 1. \quad \left\{ \begin{array}{l} k=1, u=0, u=-1, u=-2, \\ k=2, u=0, u=-1, u=-2, \\ k=3, u=0, u=-1, u=-2, \end{array} \right.$~~

~~$(-4; -g) \cup (-4; g) \cup (-4; 1) \cup (-4; -3) \cup (-4; -1)$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

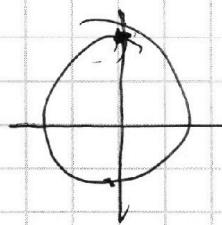
$$\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

~~$\xrightarrow{2}$~~ $\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \beta$

$$\Leftrightarrow \cos 2\alpha = -\cos(\alpha - \beta)$$

$$\frac{3+3}{2} + \frac{4+5+6}{15} \times (\cancel{2})$$

$$2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$$



$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} \alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + m\pi \end{cases}$$

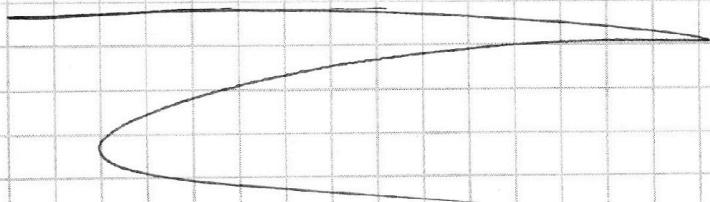
$$3x - y = 1 + 2k$$

$$x + y = 1 + 2l$$

$$\frac{1+2k+y}{3} = 1+2l-y \quad | \cdot 3$$

$$4y = 3l + 3 - 2k - 1 = 6l - 2k - 2$$

$$-2y = 3l - k - 1$$



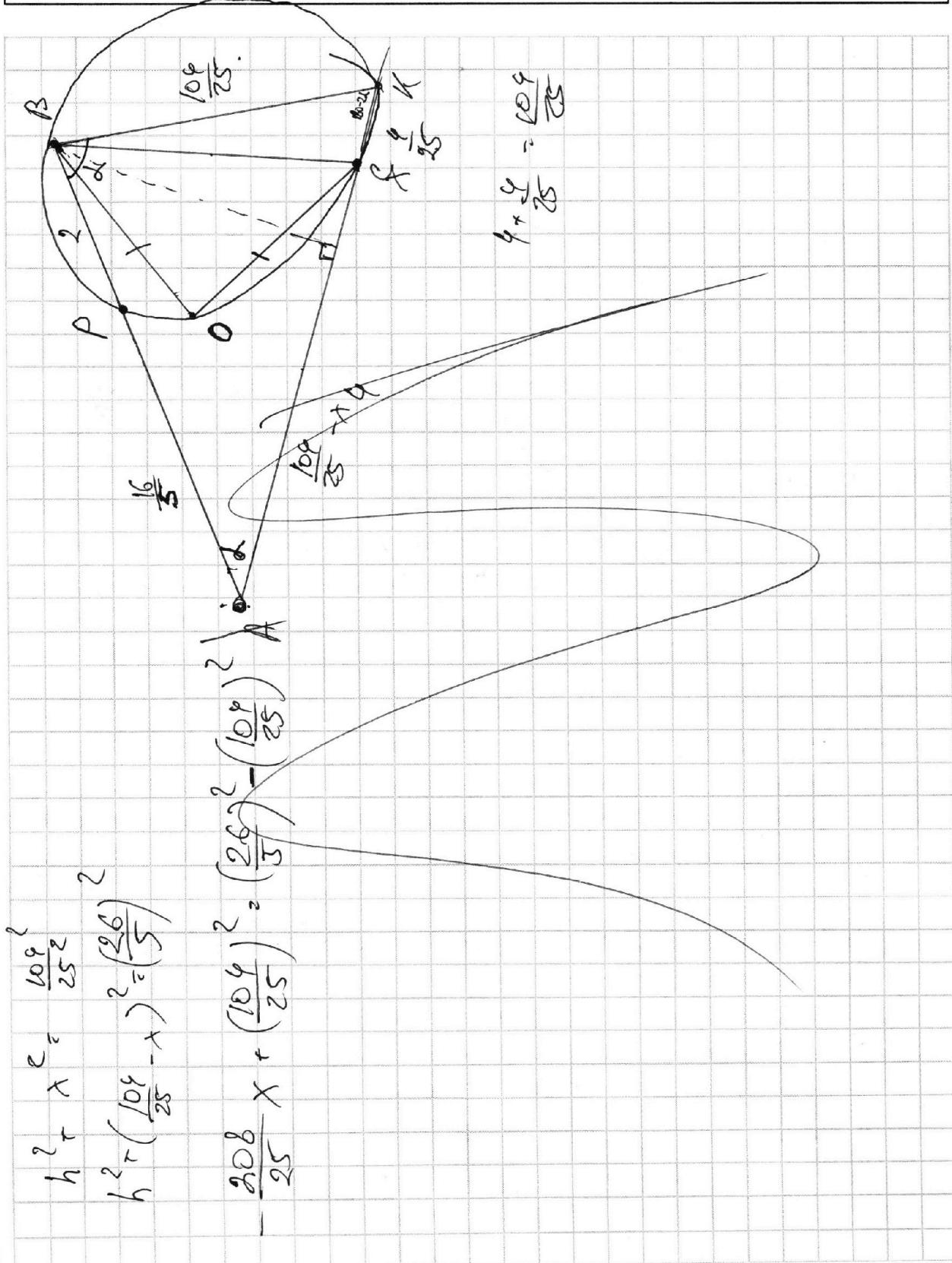


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из ____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Давайте составим тасмушор.

где x и y в соответв. порядке, то

при решении x ~~зависит только от~~ се

ми t , а ~~зависит только от~~ се

\rightarrow эти решаем \uparrow .

x_i	3	2	1	0	-1	-2	-3
1	4	9	5	1	-3	-7	-11
3	10	6	2	-2	-6	-10	
2	11	7	3	-1	-5	-9	
1	12	8	4	0	-4	-8	-12
0	13	9	5	1	-3	-7	-11
-1	14	10	6	2	-2	-6	-10
-2	15	11	7	3	-1	-5	-9
-3	16	12	8	4	0	-4	-6
-4	17	13	9	5	1	-3	-7

$$x = 4k + 1 - y \Rightarrow$$

$$y = 4k + 1 - x$$

Следующее число получает оконч.

$\rightarrow 43$ пары.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

<input checked="" type="checkbox"/> 1	<input checked="" type="checkbox"/> 2	<input checked="" type="checkbox"/> 3	<input checked="" type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 7	СТРАНИЦА
_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____	ИЗ _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 2\tilde{\omega}x = - \cos(\tilde{\omega}(x-y)).$$

~~cos равен произведению из~~
~~2cos~~ ~~из произведения из~~

~~2cos~~ ~~из произведения из~~

$$\cos 2\tilde{\omega}x + \cos(\tilde{\omega}(x-y)) <$$

$$= 2 \cos \frac{2\tilde{\omega}x - \tilde{\omega}x + \tilde{\omega}y}{2} \cdot \cos \frac{2\tilde{\omega}x + \tilde{\omega}x - \tilde{\omega}y}{2} = 0.$$

$$\frac{2\tilde{\omega}x - \tilde{\omega}y}{2} = \frac{\tilde{\omega}}{2} + 2\tilde{\omega}k \quad (=)$$

$$x - y = \pm 1 + 4k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow x = 4k + 1 + y \quad \text{и} \quad x = 4k - 1 + y.$$

$$\frac{3\tilde{\omega}x - \tilde{\omega}y}{2} = \pm \frac{\tilde{\omega}}{2} + 2\tilde{\omega}k \quad (=).$$

$$3x - y = \pm 1 + 4l$$

$$\Rightarrow x = \frac{4l \mp 1 + y}{3}$$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arcsin \frac{y}{3} < 2\pi$$

берега прямые.

$$\frac{x}{4} = -1 \quad ; \quad \frac{y}{3} = -1, \quad l = r$$