



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

A состоит из одинаковых цифр $\Rightarrow$ делится на 1111. В свою очередь 1111
получается из произведений двух простых чисел 11 и 101.

$\&$ Степень включения 11 и 101 в A равна 1, т.к. $1111 \cdot 11 \cdot 5993$

Тогда числа 11 и 101 должны иметь некую степень включения в prime
чисел B и C, т.к. у такого квадрата все делители ~~являются~~ ^{являются} имеют четную

СВ. Число C-звездное $\Rightarrow \nmid 101$. Тогда число B делится на 101. Также

это 3-значное и имеет цифру 6 в разряде. Также число единичное, и
это 606 $\Rightarrow B = 606$. $606 \nmid 11 \Rightarrow C : 11$. C-звездное и имеет
цифру 3 в разряде. $\Rightarrow C = 33$.

Таким образом $A \cdot 606 \cdot 33 = 101 \cdot 11 \cdot \frac{13A}{1111} \cdot 101 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \Rightarrow$ у числа
A/1111 СВ двойки ~~перенос~~ ¹¹ $101^2 \cdot 11^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot A/1111$

Примем $A/1111 < 10 \Rightarrow A/1111$ равно 2 или 3, т.е. $A = 2222$ или 3333

Ответ: $(2222; 606; 33), (3333; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

Приведем к общ. знам.

$$x \cdot y + y + \frac{5}{xy} = \frac{y+2}{x-2} + \frac{x-2}{(x-2)(y+2)} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{5x+y}{xy} = \frac{5x+y}{(x-2)(y+2)}$$

$$5x+y > 0 \Rightarrow xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4 \Rightarrow x = y + 2$$

$$\text{Тогда } K = x^2 + y^2 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6xy = 2(x^2 + y^2 - 2xy) = 2(x-y)^2 = 0$$

Ответ: 0.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin 2x + \sin 2y) \sin 2x = (\cos 2x - \cos 2y) \cos 2x$$

$$\sin^2 2x + \sin 2x \sin 2y = \cos^2 2x - \cos 2x \cos 2y$$

$$\cos^2 2x - \sin^2 2x = -\sin 2x \sin 2y + \cos 2x \cos 2y$$

$$2 \cos 2x = \cos(2x - 2y)$$

$$2x = 2y + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = 2y + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = x - 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = -2(x - 2k) + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x - y = 2k$$

$$y = 2k - 3x, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } (x, x - 2k), k \in \mathbb{Z}; (x, 2k - 3x), k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x, y \in \mathbb{R} \quad \& \quad 2k = 3x - y \Rightarrow x \leq y$$

$$x \in [-6; 6] \quad y \in [-2; 2]$$

$$y = 2: \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin 1 = \arcsin \frac{x}{6} + \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \leq 0$$

$$y = -1: \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin -\frac{1}{2} = \arcsin \frac{x}{6} - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \leq 6$$

$$y = 0: \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin 0 = \arcsin \frac{x}{6} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \leq 6$$

$$y = 1: \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{1}{2} = \arcsin \frac{x}{6} + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \leq 6$$

$$y = -2: \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin -1 = \arcsin \frac{x}{6} - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \leq 6$$

$$y = 1: \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \leq 6$$

$$y = 2: \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin 1 \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \leq 0$$

$$\text{Ответ: } (-6; 2] \cup (-2; 2] \cup (0; 2]$$

$$x \in [-6; 6] \quad y \in [-2; 2]$$

$$y = 2: \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin 1 \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \arcsin \frac{x}{6} < \frac{\pi}{6} \quad 0 < \arcsin \frac{y}{2} < \frac{\pi}{6} \quad \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \frac{\pi}{6} \quad \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \frac{\pi}{6}$$

$$0 < \arcsin \frac{x}{6} < \frac{\pi}{2} \quad \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Остальные пары } x, y \text{ и } x \in [-6; 6] \quad y \in [-2; 2]$$

$$(-6; -2] \quad (-6; 0) \quad (-6; 2] \quad (0; 2] \quad (2; 6]$$

$$(-4; -2] \quad (-4; 0) \quad (-4; 2] \quad (0; 2] \quad (2; 6]$$

$$(-2; -2] \quad (-2; 0) \quad (-2; 2] \quad (0; 2] \quad (2; 6]$$

$$(0; -2] \quad (0; 0) \quad (0; 2] \quad (0; 2] \quad (2; 6]$$

$$(2; -2] \quad (2; 0) \quad (2; 2] \quad (2; 2] \quad (2; 6]$$

$$(4; -2] \quad (4; 0) \quad (4; 2] \quad (4; 2] \quad (4; 6]$$

$$\text{Ответ: } 32$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вариантов раздать 4 билета на n человек = C_n^4
Если при этом уже определенными получили билет: C_{n-2}^{4-2} , т.к. осталось
2 билета на $n-2$ человек. Пусть билетов стало n штук

$$\text{Тогда } \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \cdot 6 = \frac{C_{n-2}^{4-2}}{C_n^4} = \frac{(n-2)(n-3)/2}{n(n-1)(n-2)(n-3)/24} \cdot 6 = \frac{72}{n(n-1)} = \frac{(n-2)(n-3) \dots}{n(n-1)}$$

$$= \frac{(n-2)(n-3) \dots (n-g+1)}{(n-1) \dots (n-g+1)} = \frac{g(g-1)}{n(n-1)} \Rightarrow 72 = g(g-1) =$$

$$= g^2$$

Ответ: 9



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + y^2 \leq 169 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 13^2 \Rightarrow$ это круг с радиусом 13
из ~~решения задачи~~
Условие дано по кругу:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 169 \\ (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \geq 0 \\ x + 5\sqrt{2} \cos \alpha = 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

Заменим, что $x + 5\sqrt{2} \cos \alpha$ и $y + 5\sqrt{2} \sin \alpha$ —

Осевые проекции радиуса, как получится, в
кампон $x + 5\sqrt{2} \cos \alpha$ и $y + 5\sqrt{2} \sin \alpha = 0$.

Тогда радиус имеет координаты
 $(-5\sqrt{2} \cos \alpha; -5\sqrt{2} \sin \alpha)$ — заменим

на ось, руг. $5\sqrt{2}$ тангенс отрезка

нужно найти точку на ось ~~вектора~~

с радиусом в КК и руг. $5\sqrt{2}$ тангенс

с углом α , отмеченном его тангенс

наблюдения, что $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + 45^\circ)$

~~Синус α и косинус α — это проекции радиуса на ось Ox и Oy соответственно.~~

~~Синус α и косинус α — это проекции радиуса на ось Ox и Oy соответственно.~~

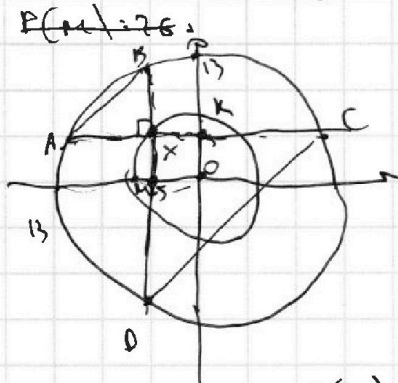
наблюдения, что $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + 45^\circ)$ ~~Синус α и косинус α — это проекции радиуса на ось Ox и Oy соответственно.~~

$$= \text{const} \sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin(\alpha + 45^\circ) \leq 1 \Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 1 - \sin \alpha \leq 2 \Rightarrow \sin \alpha \geq -1 \Rightarrow \alpha \in [0; 2\pi]$$

~~Условие радиуса $5\sqrt{2} \cos \alpha$ и $5\sqrt{2} \sin \alpha$ тангенс отрезка~~

~~радиус $5\sqrt{2}$ тангенс отрезка $d = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}k}{4}$~~



$$P(M) = AC + BD + 7AB \cdot 7CD = AC + BD + 1/2 \cdot 28\pi$$

$$AC + BD = 4AK = 4\sqrt{13^2 - 5^2} = 4 \cdot 12 = 48$$

$$AK = 12$$

$$AO = 13$$

$$\cos \angle AOB = \frac{12}{13}$$

$$P(M) = 48 + 1/2 \cdot 28\pi = 48 + 14\pi$$

$$\text{Ответ: } 48 + 14\pi, d = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}k}{4}$$



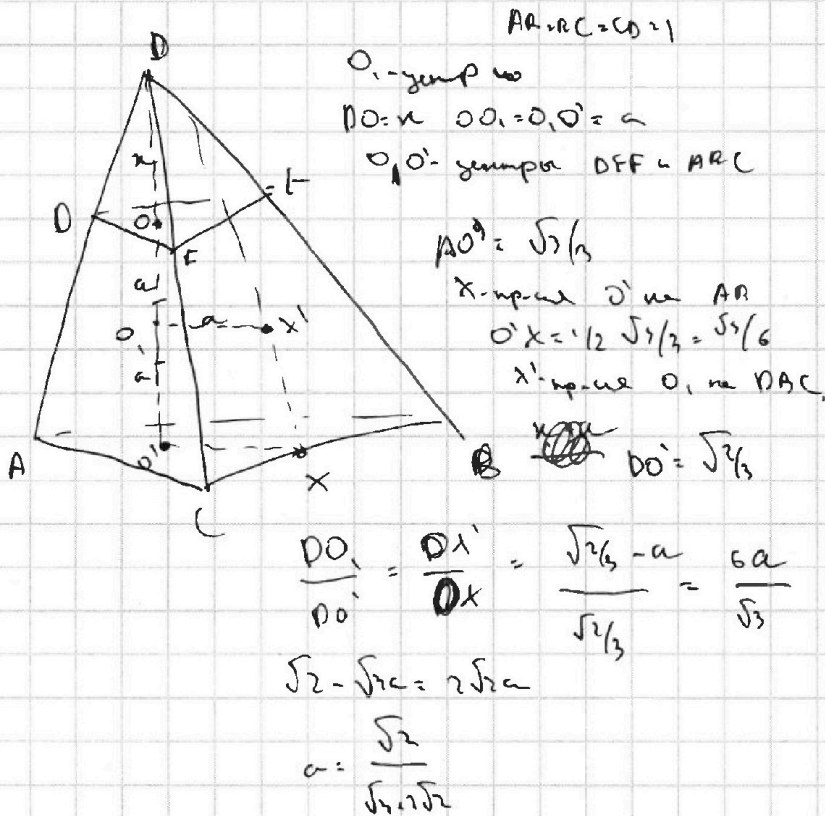
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



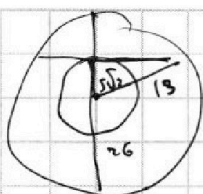


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

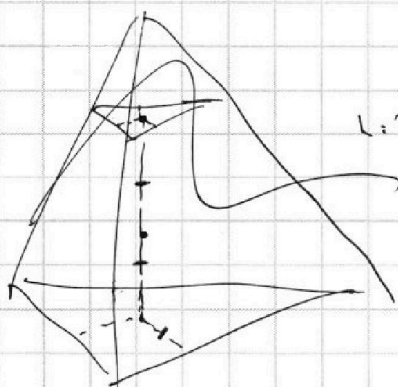
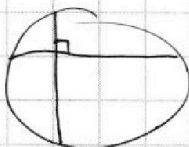
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

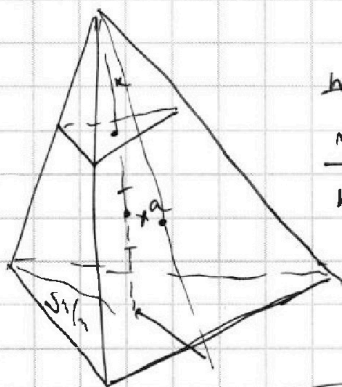
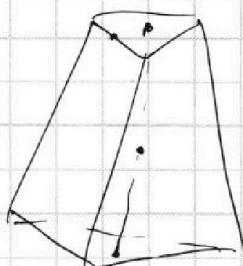
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$13^2 - 56 = \sqrt{125}$$
$$\sqrt{125} = 13 \quad ? \quad 24$$



$$L = 2m$$



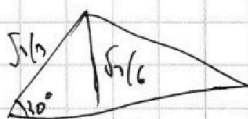
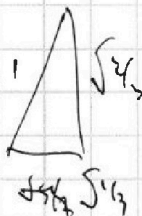
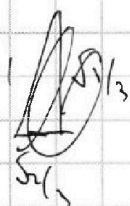
$$\frac{h}{n} = \frac{a}{\sqrt{4/3}}$$

$$\frac{h}{\sqrt{4/3}} = \frac{a}{\sqrt{3/6}}$$

$$\sqrt{1 - 1/3} = \sqrt{2/3}$$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot h}{\sqrt{2}} = \frac{6a}{\sqrt{3}}$$

$$3h = 6\sqrt{2}a$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 169 \end{cases}$$

$$(x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0$$

$$(x+5)(y+5) \leq 0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 169 \\ (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} (x-2)^2 & & & \\ 1 & 1 & ? & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & \\ 2 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 003 \\ 012 \\ 021 \\ 070 \\ 400 \\ 210 \\ 200 \\ 101 \\ 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 111 \\ 003 \\ 020 \\ 200 \\ 111 \\ 210 \\ 120 \\ 012 \\ 011 \\ 102 \\ 201 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 101 \\ 110 \\ 011 \\ 200 \\ 010 \\ 012 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3.4 \\ 2 \end{array}$$

$$\frac{C_2}{2}$$

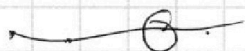
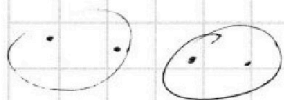


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



0 ! ...

003 → 002

012 → 011

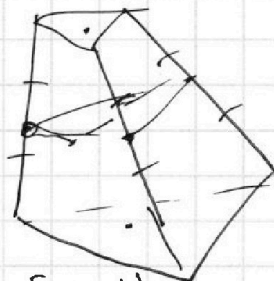
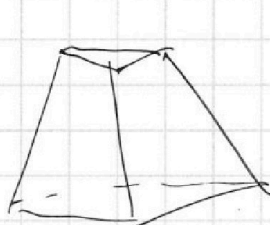
021 → 010

030 210
0400 120

201 → 200

0102 → 101

111 → 110.

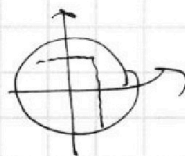


$$(x + \sqrt{2} \cos x)(y + \sqrt{2} \cos y) \leq 0.$$

$$\Gamma_{\text{прим}}: x^2 y^2 = 167$$

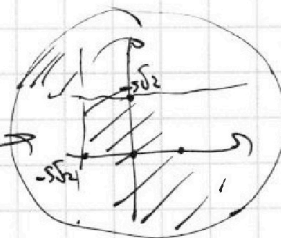
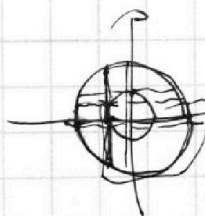
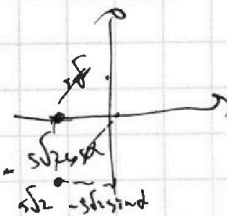
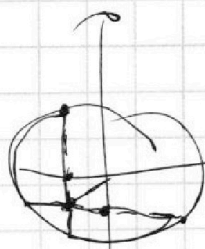
$$y = \frac{0}{2-1}$$

$$p_k^y = p_{n-1}^{y-1} + p_{n-1}^{y+1}$$



$$p_k^y$$

$$p_k^y = p_{n-1}^{y-1} + p_{n-1}^y = p_{n-1}^{y-1} + p_{n-1}^{y-1} + p_{n-1}^{y+2} + p_{n-1}^{y+2}$$



$$C_n^4$$

$$C_n^4$$

$$C_n^4$$

115. 295.

$$3x(n-1) \cdot 24$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$\frac{72}{(n-2)(n-3)} = \frac{C_{n-2}^{5-2}}{C_n^0}$$

$$6 \frac{C_{n-2}^2}{C_{n-2}^4} = \frac{72}{n(n-1)}$$



72 = 3 \cdot 3

$$\frac{7}{C_n^4} = n(n-1) \dots$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. 1. 1.

$$C_{x-1}^{x-3}$$

1 3 C_5^2

⊗ 2-й, 4-й.

3 ~

C_5^2

$$4 \cdot C_4^2 = 10$$

$$C_5^3 = C_5^2 = 10$$

C_5^3

2

$$C_{x-1}^{x-3} = C_{x+3}^4$$

C_y^4

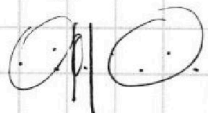


1. 1. 1. 1. 1.



$$C_{x-1}^4 = \frac{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (x-2)}{1 \cdot \dots \cdot (x-2)!}$$

1. 1. 1. 1. 1.



C_{x-1}^{x-1}

C_{n+y}^{x-1}

2 2

4 2

3. 4

C_{x-1}^{x-3}

1. 1. 1. 1. 1.

1. 1. 1. 1. 1.



C_{x-1}^{x-3}

C_{x-1}^{x-3}

$$= \frac{(x-1)(x-2)}{2} \cdot 2(x-2) + 5$$

6.

$$\frac{(x-1)(x-2)}{2} \cdot 2(x-2) + 5$$

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-1)}$$