



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1:

Н.к. число A - четырехзначное, составленное из одинаковых цифр, т.е. $A = k \cdot 1111$, где $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leq k \leq 9$

$$1111 = 11 \cdot 101, \text{ т.к. } 1 \leq k \leq 9, \text{ т.о. } A \mid 11^2 \text{ и } A \mid 101^2$$

т.к. $A \cdot B \cdot C$ - полный квадрат, делящийся на 101 , т.о

$A \cdot B \cdot C$ должно делиться на 101^2

$A \mid 101^2$, т.к. C - двузначное, т.о C ~~не~~ делится просто с 101

Значит, $B \mid 101$; т.к. B - трехзначное и содержит 6

записи цифры 2, т.о $B = 202$

т.к. $A \cdot B \cdot C$ - полный квадрат, делящийся на 11 , т.о

$A \cdot B \cdot C$ должно делиться на 11^2 , т.к. $A \mid 11^2$ и $B \mid 11$
(т.к. $202 \mid 11$), т.о $C \mid 11$

т.к. C - двузначное число, содержит кроме 6 своей записи цифру 3,
то $C = 33$

$$A \cdot B \cdot C = k \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = 6k \cdot 11^2 \cdot 101^2$$

Значит, $6k$ - должно быть полным квадратом
т.к. $1 \leq k \leq 9$, то $k = 6$.

$$\text{тогда } A = 6666.$$

Ответ: $(6666, 202, 33)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2:

$$\text{по условию: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{y+x+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\text{т.к. } x > 0 \text{ и } y > 0, \text{ то } (y+x+2) > 0$$

$$\text{т.к. } y+x+2 = y+x+2 \stackrel{> 0}{\text{и}} \frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+x+2}{(x-1)(y+1)}, \text{ то}$$

$$xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = xy + x - y - 1 \Rightarrow x = y + 1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

Ответ: $M = 1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3:

$$\textcircled{a} \quad (\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\therefore \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 2 \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\left[\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \quad (1) \right]$$

$$(1) \quad \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0$$

$$\left[\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \pi x \quad (2) \right]$$

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \pi x = 0 \quad (3) \\ \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \end{array} \right. \quad \text{(если } \cos \pi x = 0, \text{ то } \sin \pi x \neq 0 \Rightarrow \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0)$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z} \\ x = y + 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \quad (4) \\ \sin \pi x = 0 \end{array} \right. \quad \text{(если } \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0, \text{ то } \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \neq 0 \Rightarrow \sin \pi x = 0)$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \pi x = 0 \\ \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{x+y}{2} = n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \\ \sin \pi x = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z} \\ x = n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2k, k \in \mathbb{Z} \\ y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \\ y = 2n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{3}{2} + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{1}{2} + 2n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

$$(5) \quad \tan \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \tan \pi x = 1$$

$$\tan \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{1}{\tan \pi x} \cdot \cot \pi x = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \pi x \right)$$

$$\tan x \text{ - чёткая } \leftarrow \text{ периодом } \pi \Rightarrow \left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - \pi x + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}; \quad \boxed{3x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

~~0) Реш: дополнем равенству уравнение обеими членами, все пары будут~~

$$(x; x-1+2k \mid k \in \mathbb{Z}) \times (x; 1-3x+2n \mid n \in \mathbb{Z}), \text{ а также пары}$$

$$\begin{aligned} &\text{беск} (2k; 1+2n \mid k, n \in \mathbb{Z}), (2k+1; 2n \mid k, n \in \mathbb{Z}), (\frac{1}{2}+2k; \frac{3}{2}+2n \mid k, n \in \mathbb{Z}), \\ &(\frac{3}{2}+2k; \frac{1}{2}+2n \mid k, n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

5) $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$

~~Реш: дополнем равенству уравнение обеими членами, пары будут:~~

$$(2k; 1+2n \mid k, n \in \mathbb{Z}) \times (2k+1; 2n \mid k, n \in \mathbb{Z}) (\frac{1}{2}+2k; \frac{3}{2}+2n \mid k, n \in \mathbb{Z}),$$

$$(\frac{3}{2}+2k; \frac{1}{2}+2n \mid k, n \in \mathbb{Z}) \text{ и при остальных } x \text{ такие}$$

$$\text{пары будут } (x; x-1+2k \mid k \in \mathbb{Z}) \cup (x; 1-3x+$$

О реш: $(x; x-1+2k \mid k \in \mathbb{Z}) \cup (x; 1-3x+2n \mid n \in \mathbb{Z})$

⑤ $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$

no O.D.3: $\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$

~~хххххх~~

$\forall x \in [-1, 1] \arcsin x \in [0, \pi]$

$\forall x \in [-1, 1] \arccos x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

Значит, $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \geq \frac{3\pi}{2}$ тогда и только тогда, когда

$\forall x \in [-1, 1] \quad \begin{cases} \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \\ \arccos x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ Значит, для всех x, y уравнение

и О.Д.З неравенство будет верно.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \\ x, y \in \mathbb{Z} \\ y = x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ y = 1 - 3x + 2n | n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Выпишем все пары, удовлетворяющие системе

$$(-5, 4), (-5, -2), (-5, 0), (-5, 2); (-5, 4)$$

Для всех четных x от -5 до 5

подходит четные y от -4 до 4

четных чисел от -5 до 5 - 6 $6 \cdot 5 = 30$
четных чисел от -4 до 4 - 5

Для всех четных x от -5 до 5 подходит все четные y от -4 до 4 , то есть $5 \cdot 4 = 20$ пар

Всего $30 + 20 = 50$ пар

Ответ: 50 пар.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего k билетов и x одиннадцатиклассников.

Тогда вероятность, что Вася и Петя оба получат билеты равна

$$\frac{C_x^{k-2}}{C_x^k} = \frac{\frac{(k-2)!}{(x-1)!} \cdot (x-k+1)!}{\frac{k!}{(x-1)!} \cdot (x-k+1)!} = \frac{k(k-1)}{(x-k+1)(x-k+2)}$$

↙ способом выбрать $k-2$ учеников из x ,
весьма x билетов уже у лени и Васи

↘ способом выбрать k учеников с
билетами из x

Значит, когда в начале месяца было только 4 билета вероятность билета равна $\frac{4 \cdot 3}{(x-3)(x-2)}$

В конце месяца вероятность выбора β 2,5 раза, то есть $2,5 \cdot \frac{12}{(x-3)(x-2)} = \frac{30}{(x-3)(x-2)}$

Если билетов в конце месяца стало хотя бы 6, то

$$\text{вероятность} \geq \text{бываю} \geq \frac{6 \cdot 5}{(x-5)(x-4)} = \frac{30}{(x-5)(x-4)} > \frac{30}{(x-3)(x-2)}$$

(т.к. $(x-5)(x-4) < (x-3)(x-2)$)

значит, билетов стало не менее 5

$$\text{Проверка: } \frac{30}{(x-3)(x-2)} = \frac{5 \cdot 4}{(x-4)(x-3)} \quad 3x^2 - 21x + 36 = 2x^2 - 10x + 12$$

значит, 5 билетов —
подходит

$$\begin{aligned} x^2 - 11x + 24 &= 0 \\ (x-8)(x-3) &= 0 \\ \text{т.к. учеников хотят} &\geq 4, \text{то} \\ x = 8 &- \text{подходит} \end{aligned}$$

Ответ: 5 билетов

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

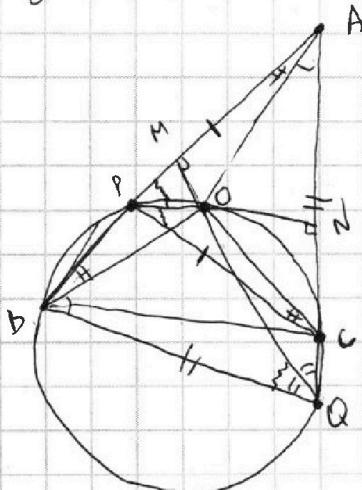


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5:



Пусть Q -вторая точка пересечения прямой AC с ω_2 . $* \tau.k. AQ > AC$, Δ не существует

$$\angle OBQ = \angle OCA (\tau.k. BO \subset \omega_2 - \text{внеш.})$$

$$\angle OCA = \angle OAC (\tau.k. OA = OC - \text{радиусы})$$

$$\Rightarrow \angle OBQ = \angle OAC$$

$$BO = OC, \tau.k. BO = OC \text{ как радиусы}$$

$$\angle BQO = \angle CAO$$

$\triangle BQO \sim \triangle ACO$ по 2 углам, но $\tau.k. QO$ -биссектриса

$$\angle BQO = \angle ACO$$

тогда $BQ = AQ$; $\Rightarrow BQA$ -равнобедренный, QO -биссектриса
 QO -серединник перпендикульр к AB

$$\angle OCP = \frac{1}{2} \angle OP = \angle OBP = \angle OAB$$

$$\begin{matrix} \text{из равенства} \\ AO = BO \end{matrix}$$

$$\angle OPA = 180^\circ - \angle OPB = \angle OQB = \angle OQC = \frac{1}{2} \angle OC = \angle OPC$$

из вписанных

тогда по 2 углам $\triangle APO \sim \triangle CPO$, так как PO -биссектриса, то $\angle APO = \angle CPO$

$AP = PC$; PO -биссектриса в рд $\Rightarrow PO$ -сер.пер. к AC .

Пусть $\text{pow}(A, \omega_2)$ -степень $\tau.k$ отн. ω_2 \Rightarrow

$$\text{pow}(A, \omega_2) = AP \cdot AB = AC \cdot AQ \Rightarrow AQ = \frac{AP \cdot AB}{AC} = \frac{\frac{15}{2} \left(\frac{15+5}{2} \right)}{9} = \frac{375}{36} = \frac{125}{12}$$

Пусть M -середина AB , N -середина AC

$$AM = \frac{AB}{2} = \frac{\frac{15}{2} + 5}{2} = \frac{25}{4} \quad AN = \frac{AC}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\text{по Т.Пифагора } \text{где } \triangle APN: PN = \sqrt{AP^2 - AN^2} = \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{81}{4}} = 6.$$

$$\text{по Т.Пифагора где } \triangle QM: QM = \sqrt{PQ^2 - AM^2} = \sqrt{\frac{5^2}{144} - \frac{25}{16}} = \sqrt{\frac{5^2(15-9)}{144}} = \frac{25}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5)

$$\text{Пусть } \angle APC = 2\alpha; \text{ тогда } \sin \alpha = \frac{AN}{AP} = \frac{\sqrt{2}}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{PN}{AP} = \frac{6}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{24}{25}$$

$$\angle BPC = 180 - 2\alpha \Rightarrow \sin \angle BPC = \sin 2\alpha = \frac{24}{25}$$

$$S_{\triangle BPC} = \frac{1}{2} BP \cdot PC \cdot \sin \angle BPC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{24}{25} = 18$$

$$S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} PN \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BPC} + S_{\triangle APC} = 27 + 18 = 45$$

$$\text{Ответ: } S_{\triangle ABC} = 45$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6:

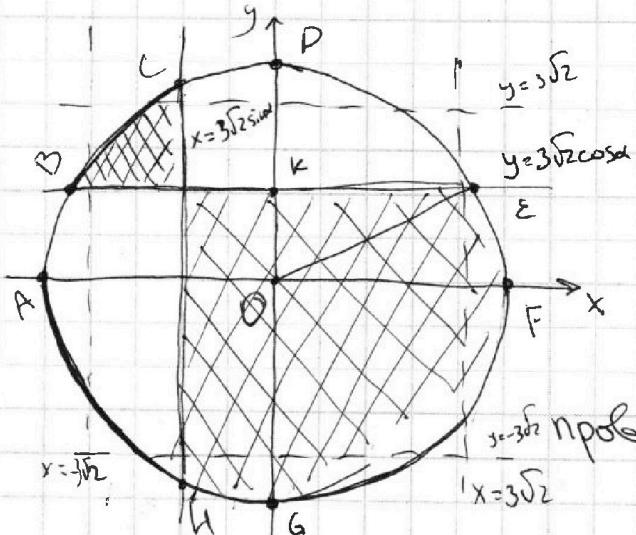
$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

1-ое первенство
2-ое первенство на плоскости
задаёт круг с центром
в точке $(0;0)$ и радиусом

1 первенство равносильно
шокуности:

$$\begin{cases} x \geq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha \\ x \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \geq 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$$

из-за проведённой прямой $x = 3\sqrt{2}\sin\alpha$
 $y = 3\sqrt{2}\cos\alpha$



Тогда начальной системе будет удовлетворять
все заштрихованые области

найдем периметр фигуры

длины дуги BC и AD равны длине дуги CD , длины

дуги EF равны длине дуги AB \rightarrow длина дуги

BC и EF равна сумме дуг AD и FG , т.е. наименьшие длины окружности, т.е. если $\frac{2\pi r}{2} = \pi r = 5\pi$

периметр всей фигуры равен $5\pi + CD + BE$

k -середине BE ; $BE = 2Bk$; но т. Пифагора для $\triangle OKE$

$$KE = \sqrt{OE^2 - OK^2} = \sqrt{25 - 18\cos^2\alpha}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BE = 2 \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}$$

$$\text{Аналогично } CH = 2 \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}$$

Периодичность $\Phi(\alpha)$ равен $5\pi + 2(\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha})$

Все ~~эти~~ надо найти максимум

$$\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}$$

a b

$$a^2 + b^2 = 50 - 18(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 32$$

$$ab \quad a+b = \sqrt{32+2ab}$$

$a \cdot b$ будет макс. по нер-ву Коши, когда

$$a=b \quad \text{тогда } |\sin \alpha| = |\cos \alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ т.е. } \begin{cases} \alpha = 45^\circ + 2\pi k \\ \alpha = 135^\circ + 2\pi k \\ \alpha = 225^\circ + 2\pi k \\ \alpha = 315^\circ + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{25 - 18 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} = \sqrt{16} = 4$$

Тогда период равен $5\pi + 2(4+4) = 16 + 5\pi$

и достигается этот максимум при $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Ответ: $M_{\max} = 5\pi + 16$; достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4}$

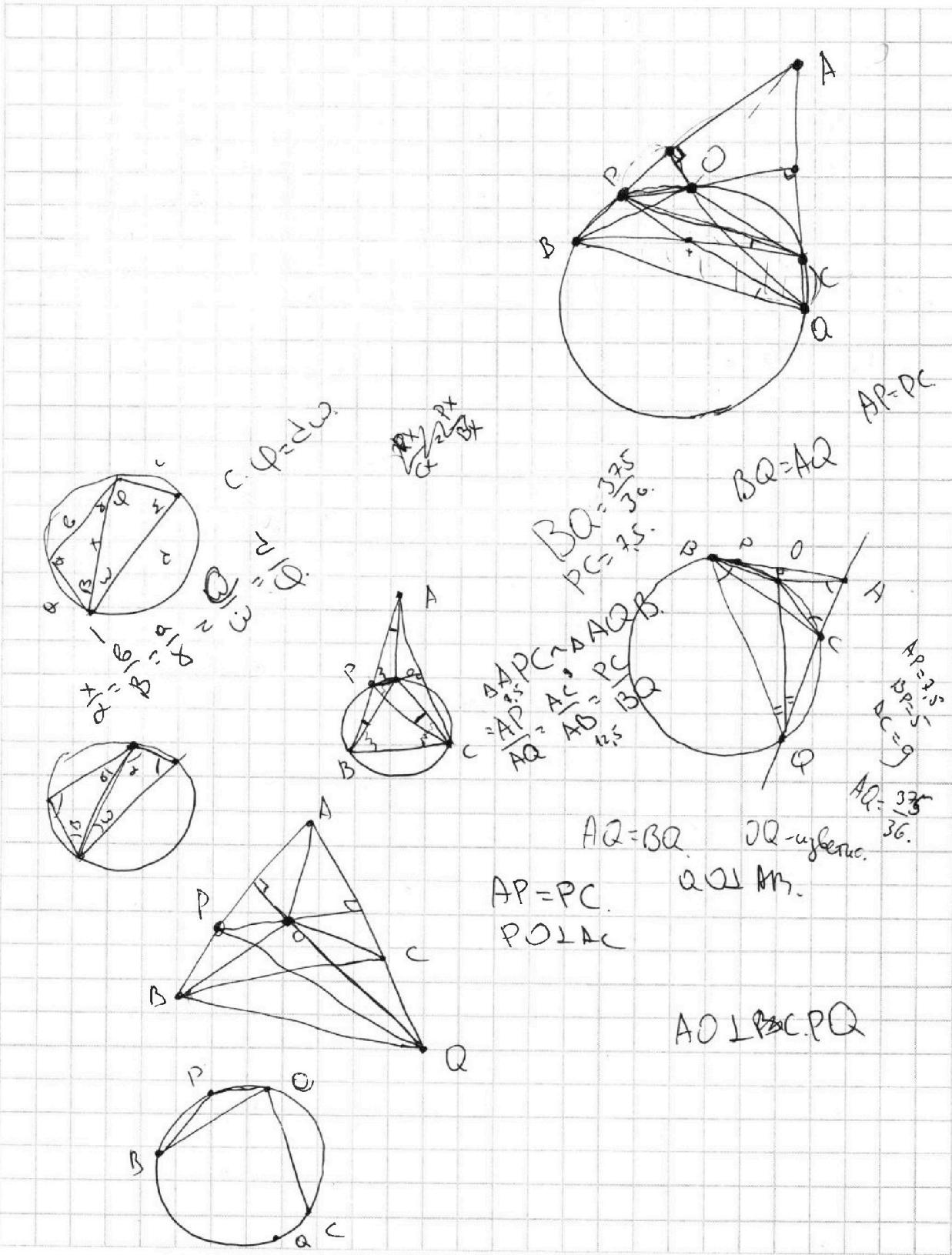


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

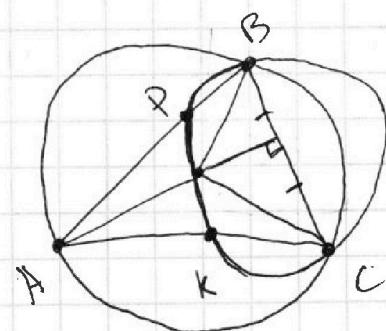
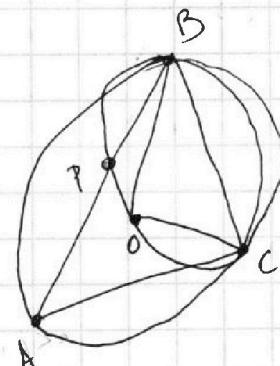


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\rho(A) \text{ on. } \omega_2$$

$$AP \cdot AB =$$

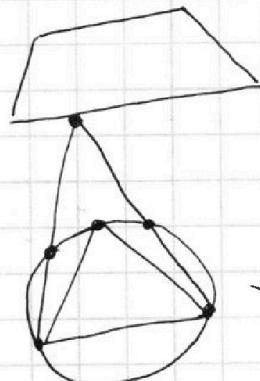
$$\frac{15}{2} \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right) = AK_{AC}$$

от $\Omega \text{ do } \pi$

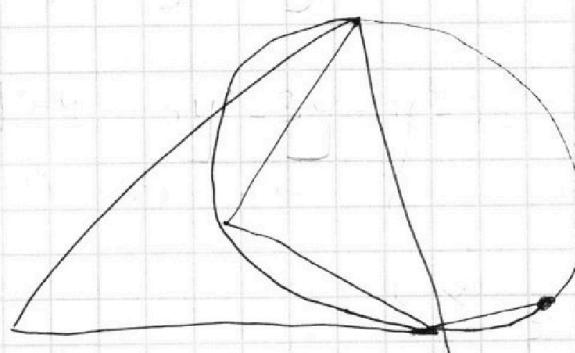
circsin Ω $\angle 18^\circ = \frac{15 \cdot 15}{36} = \frac{375}{36}$

$$12,5 \cdot 7,5 = 9 \dots$$

$$> 81.$$



$$\frac{\pi \cdot k}{R^3}$$



$$\arccos -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{x-1+2k}{4}$$

$$-5; 5$$

$$-6; 4$$

$$-1,5; 1.$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{C_x^{k-2}}{C_x^k} = \frac{\frac{x(x-1)\dots(x-k+2+1)}{(k-2)!}}{\frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}} = \frac{k(k-1)}{(x-k+2)(x-k+1)}$$

при $k=4$

$$\frac{12 \cdot 25}{(x-2)(x-3)} = \frac{k(k-1)}{(x-k+2)(x-k+1)} = \frac{(4+n)(3+n)}{(x-n-2)(x-n-3)}$$

$$(4+n)(3+n)(x-2)(x-3) = 30(x-n-2)(x-n-3)$$

$$(12 + 7n + n^2)(x^2 - 5x + 6) = 30(x^2 - x - 3x^2 - x^2 + 3n^2 - 2x + 2n + 6)$$

$$12x^2 - 60x + 72 + 7nx^2 - 35x^3 + 42x^2 + n^2x^2 - 5n^2x + 6n^2 = 36x^2 - 60x^3 + 30x^2 - 180x$$

$$7nx^2 + n^2x^2 - 5n^2x = 18x^2 - 25x^3 + 24n^2 - 90x + 108n + 108$$

$$30(x-k+2)(x-k+1) = (k^2 - k)(x-2)(x-3) + (k^2 - k)(x^2 - 5x + 6)$$

$$30x^2 - 60kx + 90x + 30k^2 - 30k + 60 = k^3x^2 - k^2x^2 + 6k^2 - kx^2 + 5kx^2 - 6k$$

$$x^2(30 - k^2 + k) + x(-60k + 90 + 5k^2 - 5k) + 30k^2 - 90k + 60 - 6k^2 + 6k = 0$$

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{\frac{n!}{(n-k+1)! (k+1)!}}{\frac{n!}{k! (n-k)!}} = \frac{n-k}{k+1}$$

$$k=6$$

$$\frac{30}{(x-3)(x-2)} = \frac{20}{(x-3)(x-4)}$$

$$20x^2 - 100x + 120 = 30x^2 - 210x + 360$$

$$10x^2 - 110x + 240 = 0$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0 \quad x=8$$

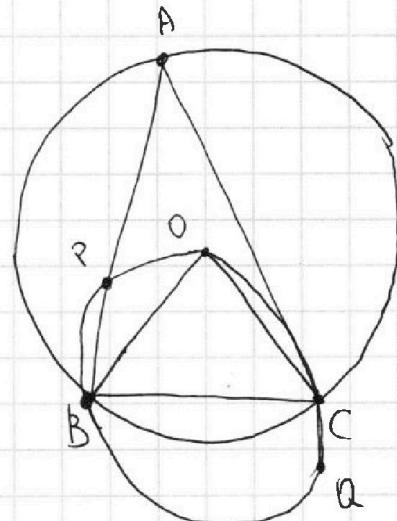
$$(x-8)(x-3)=0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

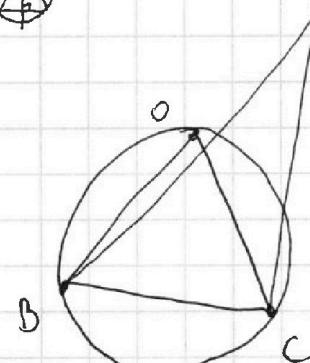
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



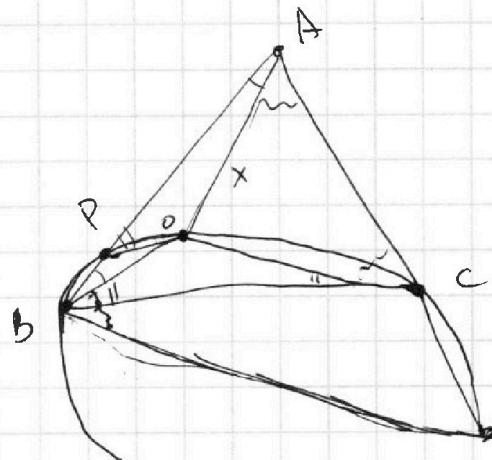
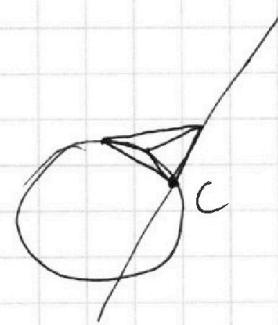
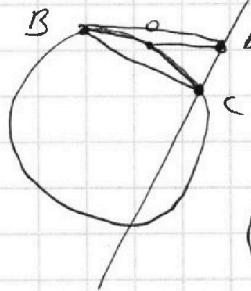
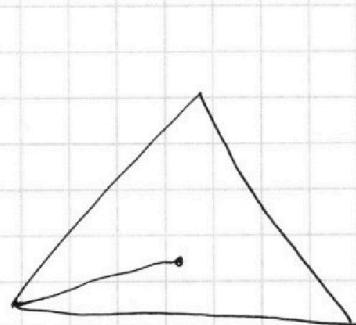
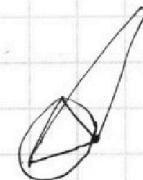
$$AP = 7,5 \quad BP = 5 \quad \Delta C = 5$$



O - вне грч A.



$$3,5 \cdot 12,5 = \frac{375}{25} \text{ см}^2$$



$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{7,5}{\sin 90^\circ} \quad BC = x \cdot 2 \cos \alpha$$

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{7,5}{\sin 90^\circ} \quad BC = \frac{7,5}{\sin 90^\circ} \cdot 2x \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{7,5}{1} \quad BC = 7,5 \cdot 2 \cos \alpha$$

$$\frac{x}{\sin \alpha} = 7,5 \quad BC = 15 \cos \alpha$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

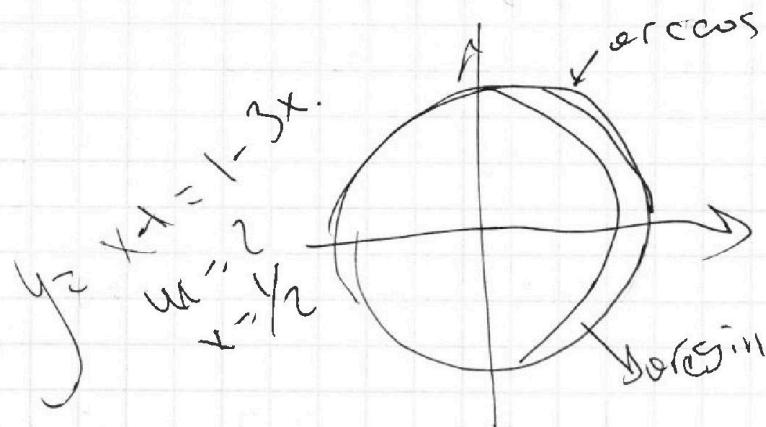
6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y = x - 1 + 2k$$
$$y \approx 1 - 3x + 2k.$$



$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\left(\frac{17\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y = x + 1,$$