



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1:

П.к. число A - четырехзначное, составленное из одинаковых цифр, т.е. $A = k \cdot 1111$, где $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leq k \leq 9$

$$1111 = 11 \cdot 101, \text{ т.к. } 1 \leq k \leq 9, \text{ то } A/11^2 \text{ и } A/101^2$$

т.к. $A \cdot B \cdot C$ - полный квадрат, делящийся на 101 , то

$A \cdot B \cdot C$ должно делиться на 101^2

$A/101^2$, т.к. C - двузначное, то C взявши просто с 101

значит, $B:101$; т.к. B - трехзначное и содержит в

записи цифру 2, то $B = 202$

т.к. $A \cdot B \cdot C$ - полный квадрат, делящийся на 11 , то

$A \cdot B \cdot C$ должно делиться на 11^2 , т.к. $A/11^2$ и $B/11$ (т.к. $202/11$), то $C:11$

т.к. C - двузначное число, содержащее в своей записи цифру 3, то $C = 33$

$$A \cdot B \cdot C = k \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = 6k \cdot 11^2 \cdot 101^2$$

значит, $6k$ - должно быть полным квадратом

т.к. $1 \leq k \leq 9$, то $k = 6$.

тогда $A = 6666$.

Ответ: (6666, 202, 33)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2:

по условию: $\frac{1^1}{x} + \frac{1^4}{y} + \frac{2^1}{xy} = \frac{1^{1+1}}{x-1} + \frac{1^{4+1}}{y+1} + \frac{2^1}{(x-1)(y+1)}$

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{y+x+2}{(x-1)(y+1)}$$

данное
выражение
по условию
существует,
значит, $x \neq 1$

т.к. $x > 0$ и $y > 0$, то $(y+x+2) > 0$

т.к. $y+x+2 = y+x+2$ и $\frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+x+2}{(x-1)(y+1)}$, то

$$xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = xy + x - y - 1 \Rightarrow x = y + 1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1.$$

Ответ: $M = 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3:

(a) $(\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cancel{2} \cdot \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = \cancel{2} \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \quad (1)$$

$$(1) \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0$$

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x - y}{2} = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = y + 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

(2) $\begin{cases} \cos \pi x = 0 & (3) \\ \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{если } \cos \pi x = 0, \text{ то } \sin \pi x \neq 0 \Rightarrow \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$

$\begin{cases} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 & (4) \\ \sin \pi x = 0 \end{cases} \quad \text{если } \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0, \text{ то } \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \neq 0 \Rightarrow \sin \pi x = 0$

$$\frac{\sin \frac{\pi x + \pi y}{2}}{\cos \frac{\pi x + \pi y}{2}} \cdot \frac{\sin \pi x}{\cos \pi x} = 1 \quad (5)$$

(3) $\begin{cases} \cos \pi x = 0 \\ \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{x + y}{2} = n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(4) $\begin{cases} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \\ \sin \pi x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x + y}{2} = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z} \\ x = n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2k, k \in \mathbb{Z} \\ y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \\ y = 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{3}{2} + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{1}{2} + 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



(5) $\operatorname{tg} \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \operatorname{tg} \pi x = 1$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \pi x} = \operatorname{ctg} \pi x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \pi x \right)$$

$\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ равны в первом периоде $\pi \Rightarrow \left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - \pi x + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{3}{2}x + \frac{y}{2} = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}; \quad 3x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Ответ: данному равенству удовлетворяют все пары вида $(x; x-1+2k | k \in \mathbb{Z})$ и $(x; 1-3x+2n | n \in \mathbb{Z})$, а также пары вида $(2k; 1+2n | k, n \in \mathbb{Z})$, $(2k+1; 2n | k, n \in \mathbb{Z})$, $(\frac{1}{2}+2k; \frac{3}{2}+2n | k, n \in \mathbb{Z})$, $(\frac{3}{2}+2k; \frac{1}{2}+2n | k, n \in \mathbb{Z})$~~

б) $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$

~~Ответ: данному равенству удовлетворяют пары вида: $(2k; 1+2n | k, n \in \mathbb{Z})$, $(2k+1; 2n | k, n \in \mathbb{Z})$, $(\frac{1}{2}+2k; \frac{3}{2}+2n | k, n \in \mathbb{Z})$, $(\frac{3}{2}+2k; \frac{1}{2}+2n | k, n \in \mathbb{Z})$ и при остальных x также пары вида $(x; x-1+2k | k \in \mathbb{Z})$ и $(x; 1-3x+2n | n \in \mathbb{Z})$~~

Ответ: $(x; x-1+2k | k \in \mathbb{Z})$ и $(x; 1-3x+2n | n \in \mathbb{Z})$

б) $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$

по О.Д.З: $\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -4 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$

~~НУЖНО~~

$\forall x \in [-1; 1] \arcsin x \in [0; \pi]$

$\forall x \in [-1; 1] \arccos x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

~~Значит, $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \geq \frac{3\pi}{2}$ тогда и только тогда, когда~~

$\forall x \in [-1; 1] \begin{cases} \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \\ \arccos x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ Значит, для всех x, y удовл. равенству и О.Д.З неравенство будет верно.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Выпишем все пары, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \\ x, y \in \mathbb{Z} \\ y = x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ y = 1 - 3x + 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

~~$(-5, -4), (-5, -2), (-5, 0), (-5, 2), (-5, 4)$~~

Для всех нечетных x от -5 до 5 подходит четные y от -4 до 4

нечетных чисел от -5 до 5 - 6 $6 \cdot 5 = 30$
четных чисел от -4 до 4 - 5

Для всех четных x от -5 до 5 подходят все нечетные y от -4 до 4 , то есть $5 \cdot 4 = 20$ пар

Всего $30 + 20 = 50$ пар

Ответ: 50 пар.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☒5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего k билетов и x учащихся 4-го класса.

Тогда вероятно, что Вика и Петя оба получат

билеты равно

$$\frac{C_{x-2}^{k-2}}{C_x^k} = \frac{\frac{(k-2)!}{(x-2)!(k-2-x+2)!}}{\frac{k!}{x!(k-x)!}} = \frac{k(k-1)}{(x-1)(x-2)}$$

← способ выбрать $k-2$ учеников из x ,
ведь 2 билета уже у Вики и Васи
→ способ выбрать k учеников с билетами из x

Значит, когда в начале месяца было только

4 билета вероятность биле равно $\frac{4 \cdot 3}{(x-3)(x-2)}$

В конце месяца вероятность выросла в 2,5 раза,

то есть $2,5 \cdot \frac{12}{(x-3)(x-2)} = \frac{30}{(x-3)(x-2)}$

Если билетов в конце месяца стало хотя бы 6, то

вероятность биле был $\frac{6 \cdot 5}{(x-5)(x-4)} = \frac{30}{(x-5)(x-4)} > \frac{30}{(x-3)(x-2)}$

(т.к. $(x-5)(x-4) < (x-3)(x-2)$)

Значит, билетов стало не более 5

Проверим: $\frac{30}{(x-3)(x-2)} = \frac{5 \cdot 4}{(x-4)(x-3)}$

$$3x^2 - 21x + 36 = 2x^2 - 10x + 12$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$(x-8)(x-3) = 0$$

т.к. учеников хотя бы 4, то

$x=8$ — подходит

Ответ: 5 билетов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

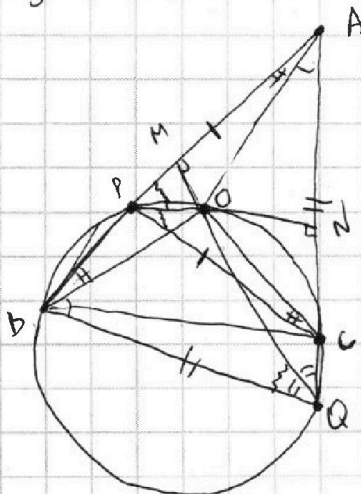
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5:



Пусть Q - вторая точка пересечения прямой AC с ω_2 *т.к. AQ > AC, лежит за т.с.

$\angle OBQ = \angle OCA$ (т.к. BOCQ - впис.)

$\angle OCA = \angle OAC$ (т.к. OA = OC - как радиусы)

$\Rightarrow \angle OBQ = \angle OAC$

$\widehat{BO} = \widehat{OC}$, т.к. BO = OC как радиусы

$\Downarrow$

$\angle BQO = \angle AQO$

$\triangle BQO \sim \triangle AQO$ по 2 углам, но т.к. QO - общий
 $\triangle BQO = \triangle AQO$

тогда $BQ = AQ$; $\triangle BQA$ - равнобедренный и QO - биссектриса
QO - серединный перпендикуляр к AB

$\angle OCP = \frac{1}{2} \angle OP = \angle OBP = \angle OAB$

из равенства
AO = BO

$\angle OPA = \angle 180^\circ - \angle OPB = \angle OQB = \angle OQC = \frac{1}{2} \widehat{OC} = \angle OPC$
из вписанности

тогда по 2 углам $\triangle APO \sim \triangle CPO$, так как PO - общий, то $\triangle APO = \triangle CPO$

$AP = PC$; PO - биссектриса в $\triangle ABC \Rightarrow$ PO - сер. пер. к AC.

пусть $\text{pow}(A, \omega_2)$ - степень т. A отн. $\omega_2 \Rightarrow$

$\text{pow}(A, \omega_2) = AP \cdot AB = AC \cdot AQ \Rightarrow AQ = \frac{AP \cdot AB}{AC} = \frac{\frac{15}{2} \cdot (\frac{15}{2} + 5)}{9} = \frac{375}{36} = \frac{125}{12}$

Пусть M - середина AB, N - середина AC

$AM = \frac{AB}{2} = \frac{15+5}{2} = \frac{25}{2}$ $AN = \frac{AC}{2} = \frac{9}{2}$

по т. Пифагора для $\triangle APN$: $PN = \sqrt{AP^2 - AN^2} = \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{81}{4}} = 6$

по т. Пифагора для $\triangle AQM$: $QM = \sqrt{AQ^2 - AM^2} = \sqrt{\frac{5^6}{144} - \frac{5^4}{16}} = \sqrt{\frac{5^4(25-9)}{144}} = \frac{25}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☒☐☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5:

$$\text{Пусть } \angle APC = 2\alpha; \text{ тогда } \sin \alpha = \frac{AN}{AP} = \frac{9/2}{15/2} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{PN}{AP} = \frac{6}{15/2} = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{24}{25}$$

$$\angle BPC = 180 - 2\alpha \Rightarrow \sin \angle BPC = \sin 2\alpha = \frac{24}{25}$$

$$S_{\triangle BPC} = \frac{1}{2} BP \cdot PC \cdot \sin \angle BPC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{24}{25} = 18$$

$$S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} PN \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BPC} + S_{\triangle APC} = 27 + 18 = 45$$

$$\text{Ответ: } S_{\triangle ABC} = 45$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

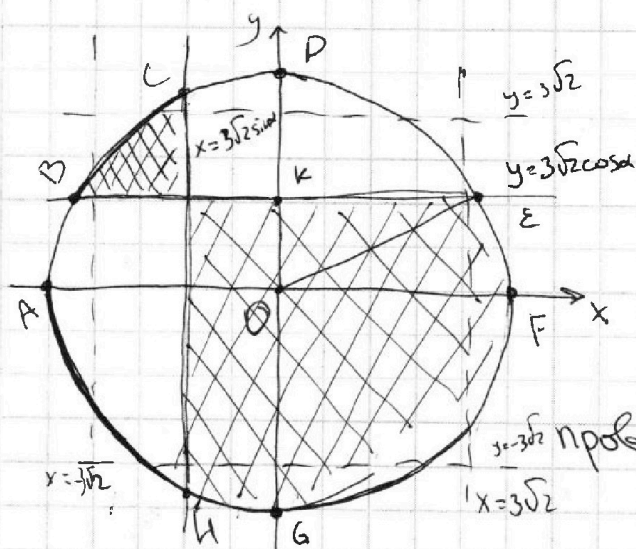
Задача 6:

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

2-ое уравнение на плоскости задаёт круг с центром в точке $(0;0)$ и радиусом 5

1 неравенство равносильно совокупности:

$$\begin{cases} x \geq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha \\ x \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \geq 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$$



1-е неравенство равносильно совокупности:
проведём прямые $x = 3\sqrt{2}\sin\alpha$
 $y = 3\sqrt{2}\cos\alpha$

Тогда начальной системе будет удовлетворять вся заштрихованная область

найдем периметр этой фигуры

длина дуги BH равна длине дуги CD, длина дуги EF равна длине дуги AB $\Rightarrow$ длина дуг

BC и EH равна сумме дуг AD и FG, т.е. половине длины окружности, то есть $\frac{2\pi r}{2} = \pi r = 5\pi$

периметр всей фигуры равен $5\pi + CH + BE$

K - середина BE; BE = 2BK; по т. Пифагора для $\triangle OKB$

$$KB = \sqrt{OB^2 - OK^2} = \sqrt{25 - 18\cos^2\alpha}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BE = 2\sqrt{25 - 18\cos^2\alpha}$$

$$\text{Аналогично } CH = 2\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha}$$

$$\text{Периметр } P(\alpha) \text{ равен } 5\pi + 2(\sqrt{25 - 18\cos^2\alpha} + \sqrt{25 - 18\sin^2\alpha})$$

Вн ~~вн~~ надо найти максимум

$$\sqrt{25 - 18\cos^2\alpha} + \sqrt{25 - 18\sin^2\alpha}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_a \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_b$

$$a^2 + b^2 = 50 - 18(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 32$$

по пер-ву косин

$$ab \quad a + b = \sqrt{32 + 2ab}$$

т.к. равенство достигается при $a=b$, то $\times$ аб-макс. при $a=b$.

$a=b$ будет макс. по пер-ву косин, когда

$a=b$ тогда $|\sin\alpha| = |\cos\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е.

$$\begin{cases} \alpha = 45^\circ + 2\pi k \\ \alpha = 135^\circ + 2\pi k \\ \alpha = 225^\circ + 2\pi k \\ \alpha = 315^\circ + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{25 - 18 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$$

Тогда периметр равен $5\pi + 2(4 + 4) = 16 + 5\pi$
и достигается этот максимум при $\alpha = \frac{\pi k}{4}$

Ответ: $M_{\max} = 5\pi + 16$; достигается при $\alpha = \frac{\pi k}{4}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

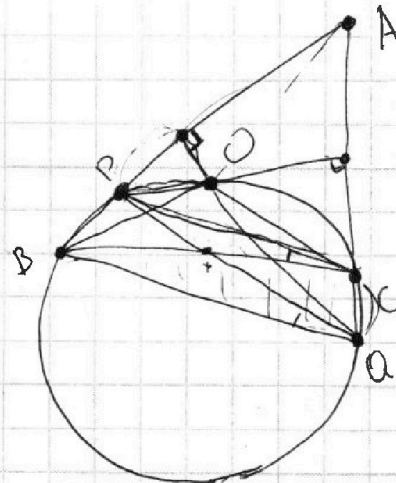
5
☐

6
☐

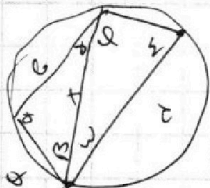
7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AP=PC$$



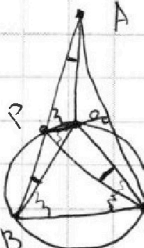
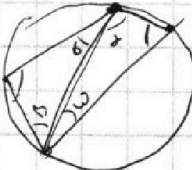
$$CQ = \frac{1}{2} \cdot \omega$$

$$\frac{1}{2} \cdot \omega = \frac{1}{2} \cdot \omega$$

$$BQ = \frac{375}{36}$$
$$PC = 75$$

$$BQ=AQ$$

$$\triangle APC \sim \triangle AQB$$
$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AC}{AB} = \frac{PC}{BQ}$$
$$\frac{AP}{AQ} = \frac{1}{2.5}$$
$$\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2.5}$$
$$\frac{PC}{BQ} = \frac{1}{2.5}$$



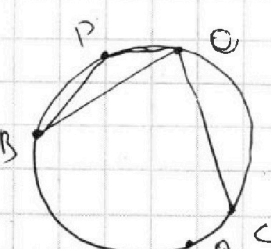
$$AQ=BQ$$

$$OQ \perp AC$$

$$AQ = \frac{375}{36}$$

$$AP=PC$$
$$PO \perp AC$$

$$AO \perp PC$$





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

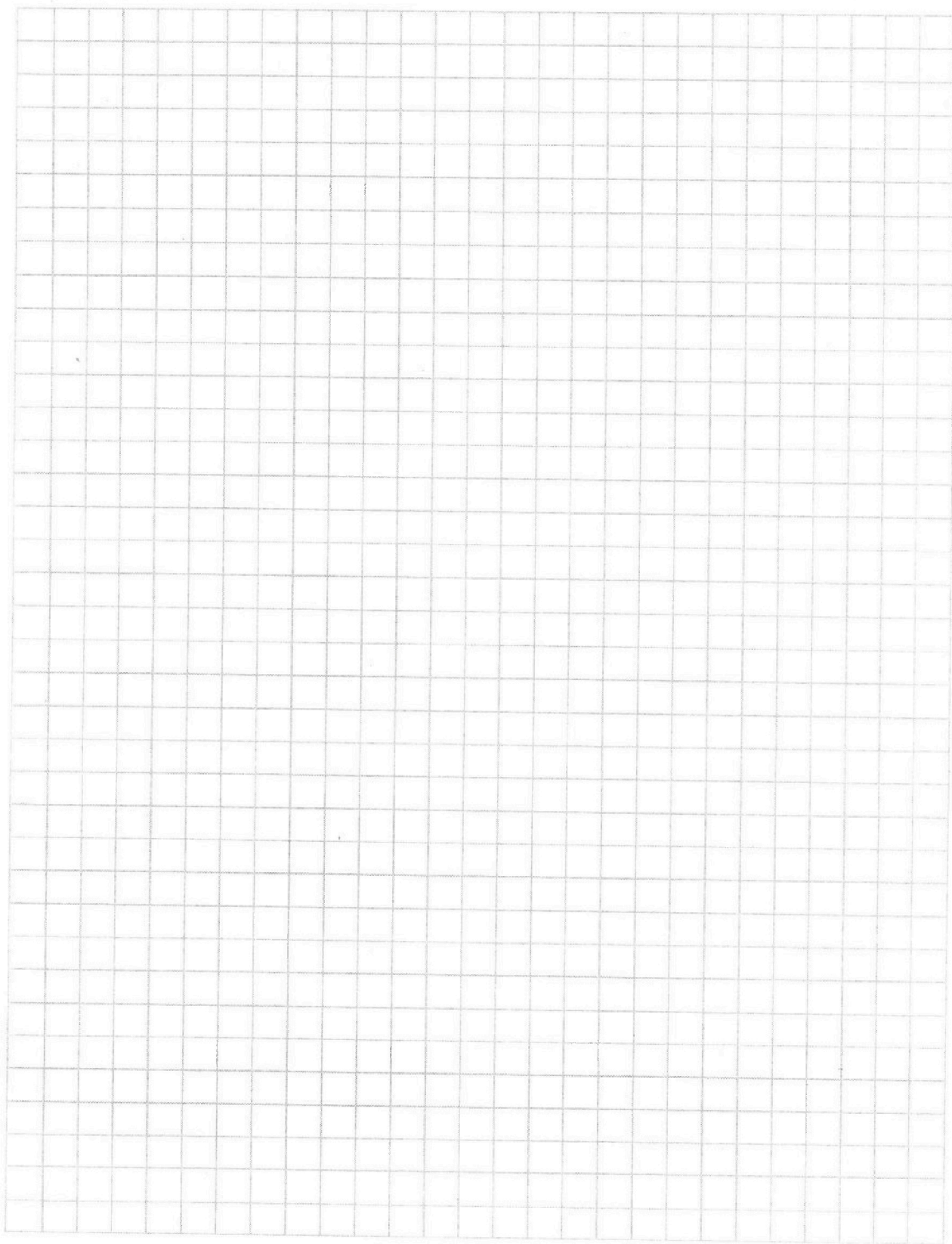
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





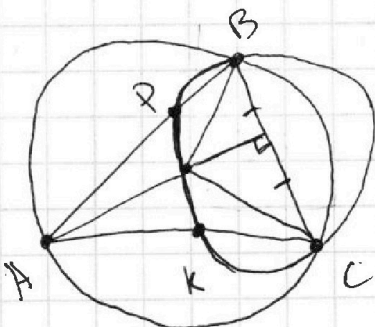
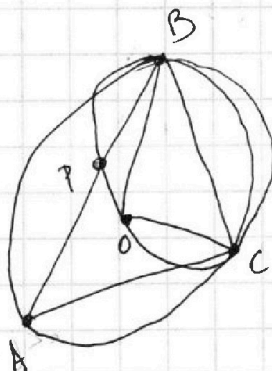
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AP = \frac{15}{2} \quad BP = 5 \quad AC = 9$$



$\rho(A)$ от ω_2

$$AP \cdot AB =$$

$$\frac{15}{2} \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right) = AK_4$$

$$\frac{15}{2} \cdot \frac{25}{2} = 9 \cdot AK$$

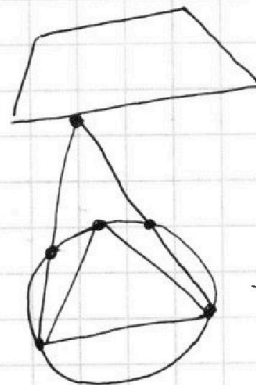
$$AK = \frac{15 \cdot 25}{36} = \frac{375}{36}$$

от ω_2 до π

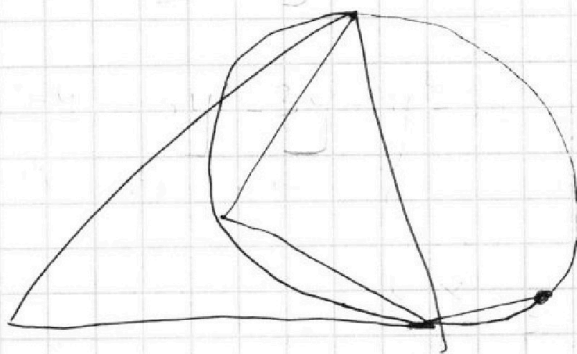
$\arccos \sin \theta$

$$12,5 - 7,5 = 5$$

$$> 81$$



$$\frac{25 \cdot 4}{12}$$



$$\arccos -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$$

$$-6; 4$$

$$-1,5; 1$$

$$\frac{3}{12}$$

$$\frac{25 \cdot 4}{12}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{x-1+2k}{4}$$

$$-5; 5$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{C_x^{k-2}}{C_x^k} = \frac{\frac{x(x-1)\dots(x-k+2+1)}{(k-2)!}}{\frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}} = \frac{k(k-1)}{(x-k+2)(x-k+1)}$$

при $k=4$
 $k \uparrow$
 $k=4+n$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 25}{(x-2)(x-3)} = \frac{k(k-1)}{(x-k+2)(x-k+1)} = \frac{(4+n)(3+n)}{(x-n-2)(x-n-3)}$$

$$(4+n)(3+n)(x-2)(x-3) = 30(x-n-2)(x-n-3)$$

$$(12+7n+n^2)(x^2-5x+6) = 30(x^2-xn-3x-xn+n^2+3n-2x+2n+6)$$

$$12x^2 - 60x + 72 + 7nx^2 - 35xn + 42n + n^2x^2 - 5n^2x + 6n^2 = 30x^2 - 60xn + 30n^2 - 180x + 180n + 180$$

$$7nx^2 + n^2x^2 - 5n^2x = 18x^2 - 25xn + 24n^2 - 90x + 108n + 108$$

$$30(x-k+2)(x-k+1) = (k^2-k)(x-2)(x-3) = (k^2-k)(x^2-5x+6)$$

$$30x^2 - 60kx + 90x + 30k^2 - 90k + 60 = k^3x^2 - k^3x + 6k^2 - kx^2 + 5kx - 6k$$

$$x^2(30 - k^2 + k) + x(-60k + 90 + 5k^2 - 5k) + 30k^2 - 90k + 60 - 6k^2 + 6k = 0$$

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-k-1)!(k+1)!}{n!}}{\frac{k!(n-k)!}{n!}} = \frac{n-k}{k+1}$$

$k=6$

$$\frac{30}{(x-3)(x-2)} = \frac{20}{(x-3)(x-4)}$$

$$20x^2 - 100x + 120 = 30x^2 - 240x + 360$$

$$10x^2 - 140x + 240 = 0$$

$$x^2 - 14x + 24 = 0 \quad x=8$$

$$(x-8)(x-3)=0$$



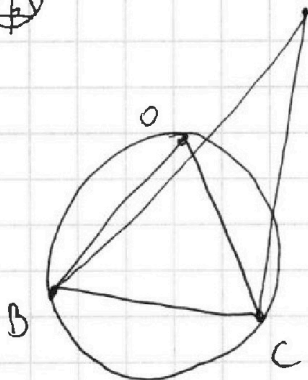
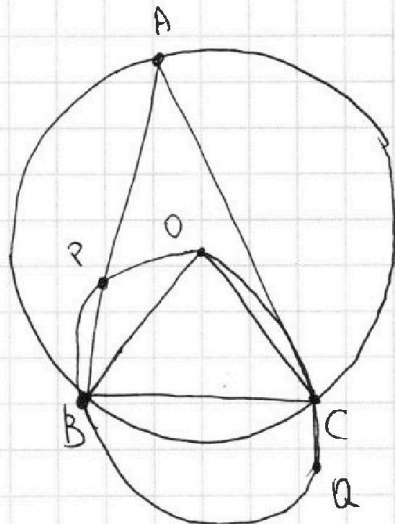
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

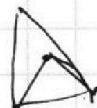
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

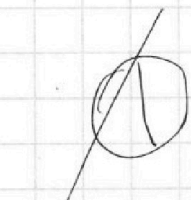
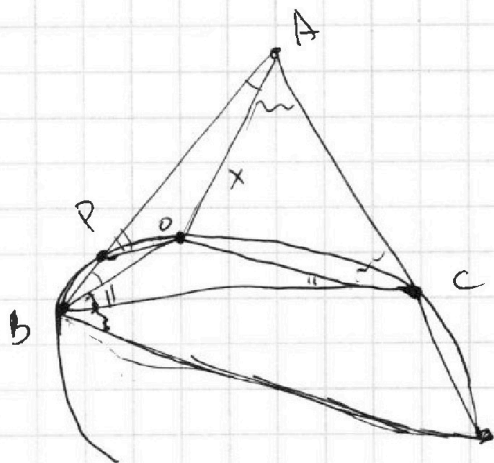
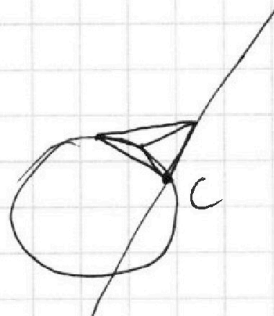
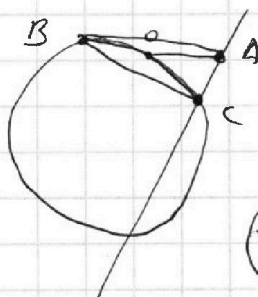
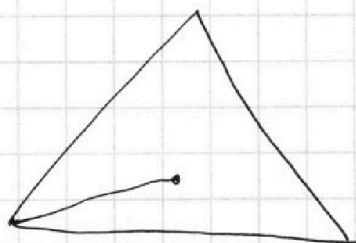
$$AP = 7,5 \quad BP = 5 \quad AC = 9.$$



O - внутри Δ.



$$7,5 \cdot 12,5 = \frac{375}{36}.$$



$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin 2\alpha} = \frac{9BC}{2\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{7,5}{\sin 90^\circ} \quad BC = x \cdot 2 \cos \alpha = 2x \cdot \sin \alpha$$



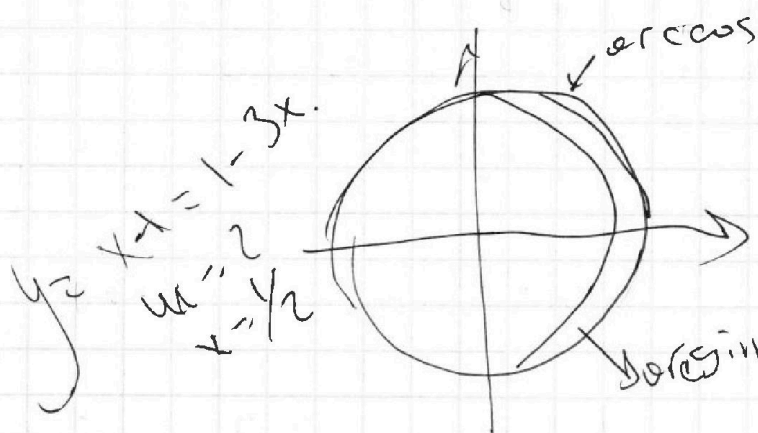
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} y &= x - 1 + 2k \\ y &= 1 - 3x + 2k. \end{aligned}$$



$$\arcsin x = \arcsin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) = \arcsin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y = x + 1,$$