



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

$$\begin{array}{r} 7 \cdot 101 \cdot 11 \\ 7 \cdot 101 \cdot 11 \\ - \frac{1111}{11} \cdot 11 \\ \hline 101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 121 \\ 11 \\ \hline 121 \\ + 121 \\ \hline 1331 \end{array}$$

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

$$(0 - 0) \cdot 0 \neq (1 + 1) \cdot 1$$

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\cos 2\pi y + \cos(\pi y - \pi x) \quad 4 \cdot 3m \pm 3 \quad \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

$$7 - 5 + 4 - 8 = 67 \quad 135$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases} \quad 4 = \frac{4k-1}{3}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

$$x=0; \quad y=\pm \frac{\pi}{3}; \quad \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8 \cdot 4}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4 \cdot 8}$$

$$312 - 64 - 12 \cdot 8 \cdot 4 = 32(16 - 2 - 12) = 64$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Условие: $a = 1111$
 $a = 4444$ $c = 77$ (не подходит (нет 1))
 $a = 9999$

Ответ: $a = 7777$ $b = 707$ $c = 11$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из **3**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итак: $ac_1 \cdot 7 = u_1^2$

Т.к. c двузначное, то $11c_1 \geq 10 \Rightarrow c_1 \geq \left\lceil \frac{10}{11} \right\rceil = 1$
 $11c_1 \leq 99 \Rightarrow c_1 \leq \left\lfloor \frac{99}{11} \right\rfloor = 9$ $\left| \begin{array}{l} c_1 \in [1; 9] \\ \text{так же, как и } a, \end{array} \right.$

Очевидно, что $u_1 \div 7$ (в противном случае $u_1^2 \nmid 7$, что неверно)

Пусть $u_1 = 7^v \cdot u_2$, $u_2 \nmid 7$, $v \geq 1$

$$u_1^2 = 7^{2v} \cdot u_2^2$$

$$ac_1 = \frac{u_1^2}{7} = 7^{2v-1} \cdot u_2^2 \quad 2v-1 \geq 1 \Rightarrow ac_1 \div 7 \Rightarrow \begin{cases} a \div 7 \\ c_1 \div 7 \end{cases}$$

Т.к. a и c_1 — числа от 1 до 9, то единственное число кратное 7 — это 7 в этом диапазоне $\Rightarrow \begin{cases} a=7 \\ c_1=7 \end{cases}$

Случай 1.

$$a=7$$

Тогда: $c_1 = 7^{2(v-1)} \cdot u_2^2$. Если $v \geq 2$, то $c_1 = 49 u_2^2 > 9$, невозможно
 $\Rightarrow v=1$, $c_1 = u_2^2$ — квадрат какого то числа: 1, 4, 9 (от 1 до 9)

Итого: $a=7777$, $c \neq 11$

$c \neq 44$ — не подходит (нет 1)
 $c \neq 99$ — не подходит (нет 1)

Случай 2.

$$c_1=7 \Rightarrow c=77$$

Тогда $a = 7^{2(v-1)} \cdot u_2^2$. Аналогично если $v \geq 2$, то $a = 49 u_2^2 > 9$, невозможно
 $\Rightarrow v=1$, $a = u_2^2$ — квадрат какого то числа: 1, 4, 9 (от 1 до 9)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Число A вида $\overline{aaaa} : a \cdot 1000 + a \cdot 100 + a \cdot 10 + a = a \cdot 1111 =$

$= a \cdot 101 \cdot 11$, $a \in [1; 9]$ — не делится ни на 11, ни на 101
(т.к. меньше)

Очевидно, что $c \leq 101$ (т.к. двузначное). Пусть $b = 101^\alpha \cdot b_1$,

$b_1 \leq 101$, квадрат натурального числа представим в виде

~~u^2~~ u^2 , где $u = 11^{r_1} 101^{r_2} u_1$, $u_1 \leq 11$ и $u_1 \leq 101$

Тогда: $a \cdot 101 \cdot 11 \cdot c \cdot 101^\alpha \cdot b_1 = u^2 = 11^{2r_1} 101^{2r_2} u_1^2$

Итак: $a b_1 c \cdot 11 \cdot 101^{\alpha+1} = 11^{2r_1} 101^{2r_2} u_1^2$

Итак, $\alpha+1 = 2r_2$ (равенство степеней при 101) $\Rightarrow \alpha$ — нечетное

Очевидно, что тогда $\alpha = 1, 3, \dots$, но если $\alpha \geq 3$, то $b \geq 101^3 \cdot b_1$,

$\geq 100^3 \cdot b_1 = 10^6 \cdot b_1$ — далеко не трехзначное $\Rightarrow \alpha = 1$

Итак: $b = 101 b_1$. Среди трехзначных подходят следующие:

101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909; среди них только 707

содержит 7 в записи $\Rightarrow b = 707$

Итак: $a \cdot 7 \cdot c \cdot 11 \cdot 101^2 = 11^{2r_1} 101^2 u_1^2$

Аналогично пусть $c = 11^\delta \cdot c_1$, $c_1 \leq 11$:

$a c_1 \cdot 7 \cdot 11^{\delta+1} = 11^{2r_1} u_1^2$

$\delta = 2r_1 - 1$ получается снова нечетным: $\delta = 1, 3, 5, \dots$

Но если $\delta \geq 3$, то $c = 11^\delta \cdot c_1 \geq 1331 \cdot c_1$ — далеко не двузначное

число $\Rightarrow \delta = 1$, и $c = 11 c_1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

☐

2

☒

3

☐

4

☐

5

☐

6

☐

7

☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y}{xy} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy} ; x, y \neq 0$$

$$K' = \frac{(x-4)+(y+4)+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)} ; \begin{matrix} x-4 \neq 0 & x \neq 4 \\ y+4 \neq 0 & y \neq -4 \end{matrix}$$

$$K = K' \Leftrightarrow xy = (x-4)(y+4)$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16 \Rightarrow y = x - 4$$

$$y \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$$

$$y \neq -4 \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$\text{Умак: } M = x^3 - y^3 - 12xy =$$

Достаточно 2х
условий: $x \neq 4$ и $x \neq 0$

$$= (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = 4 \cdot (x^2 + x(x-4) + (x-4)^2) -$$

$$- 12x(x-4) = 4(x^2 + x^2 - 8x + 16 - 2(x^2 - 4x)) =$$

$$= 4x(x-4) \cdot 3$$

$$= 4(2x^2 - 8x + 16 - 2x^2 + 8x) = 4 \cdot 16 = 64$$

$$\text{Ответ: } M = 64$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
43 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Действительно, все нечетные числа - это либо $4k+1$, либо $4k-1$

Поэтому любые $x+y$, которые нечетное, подходит

это отно-
сится и к п.а

Значит:

а) либо x четное $-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$ - 7 вар
 y нечетное $-3, -1, 1, 3$ - 4 вар

$4 \cdot 7 = 28$ вар.

б) x нечетное $-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7$ - 8 вар
 y четное $-4, -2, 0, 2, 4$ - 5 вар

$5 \cdot 8 = 40$ вар.

Итого: $40 + 28 = 68$ вариантов

Ответ: а) все (x, y) , удовлетворяющие соотношению:

$$x+y = 2z+1, \quad z \in \mathbb{Z}$$

б) 68 пар чисел



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Удобно переписать:

$$3(y-k) = x+k+1 \Rightarrow x_1 = 3y - 4k_1 - 1 \quad \text{или} \quad k_1 = -\left(\frac{x - 3y + 1}{4}\right) = -\left(\frac{x+y+1}{4} - y\right)$$

$$3(y-k) = x+k-1 \Rightarrow x_2 = 3y - 4k_2 + 1 \quad \text{или} \quad k_2 = -\left(\frac{x - 3y - 1}{4}\right) = -\left(\frac{x+y-1}{4} - y\right)$$

$$x_3 = 4k_3 + 1 - y \quad \text{или} \quad k_3 = \frac{x+y-1}{4}$$

$$x_4 = 4k_4 - 1 - y \quad \text{или} \quad k_4 = \frac{x+y+1}{4}$$

Рассмотрим конкретные значения y . Изучим, при каких x и

x -и могут совпадать (очевидно $x_1 \neq x_2$ и $x_3 \neq x_4$)

Мы свели задачу поиска (x, y) к поиску (x, y) , удовлетворяющих

одному из следующих соотношений: $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{Z}$

$$y - \frac{x+y+1}{4} \text{ целое} \Leftrightarrow (x+y+1) : 4$$

$$y - \frac{x+y-1}{4} \text{ целое} \Leftrightarrow (x+y-1) : 4$$

$$\frac{x+y-1}{4} \text{ целое} \Leftrightarrow (x+y-1) : 4$$

$$\frac{x+y+1}{4} \text{ целое} \Leftrightarrow (x+y+1) : 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 : 4 \Rightarrow (x+y) \equiv 3 \pmod{4} \\ x+y-1 : 4 \Rightarrow (x+y) \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

Обратим внимание:
корень $x=0, y=4$
не будет учтен при
подсчете (он не подходит)

$$\begin{aligned} y &= -4 & x &\equiv 3 \pmod{4} & -n_3 \\ y &= 0 & \Rightarrow & & \\ y &= 4 & x &\equiv 1 \pmod{4} & -n_1 \\ (y &\equiv 0 \pmod{4}) & & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -3 & x &\equiv 0 \pmod{4} & -n_0 \\ y &= 1 & \Rightarrow & & \\ (y &\equiv 1 \pmod{4}) & x &\equiv 2 \pmod{4} & -n_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -2 & x &\equiv 3 \pmod{4} \\ y &= 2 & \Rightarrow & & \\ (y &\equiv 2 \pmod{4}) & x &\equiv 1 \pmod{4} \end{aligned}$$

Новая мысль: $(x+y) \equiv \pm 1 \pmod{4} \Leftrightarrow x+y$ - нечетное число



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Другими словами: найдем все (x, y) , которые удовлетворяют

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \leq -\frac{\pi}{2}$$

Поскольку $\arccos \frac{x}{7} \geq 0$ и $\arcsin \frac{y}{4} \leq \frac{\pi}{2}$

$$-\arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$$

По базовому свойству неравенств это означает $\arccos \frac{x}{7} -$

$-\arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$ — равенство. Это достигнимо только

при $\arccos \frac{x}{7} = 0$ и $\arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}$ (в противном случае выражение больше $\frac{\pi}{2}$)

Итак: $\frac{x}{7} = \cos(0) = 1, x = 7$

$$\frac{y}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y = 4$$

Только при паре чисел $y = 4$ и $x = 7$ требуемое условие не выполняется. При всех остальных оно верно.

Есть допустимые значения: $\frac{x}{7} \in [-1; 1] \Leftrightarrow x \in [-7; 7]$

Остаток подсчитать количество таких чисел:

x — целое, k — целое, y — целое

$$\frac{y}{4} \in [-1; 1] \Leftrightarrow y \in [-4; 4]$$

как аргументы обратных тригонометрических функций

$$y = k + \frac{x+k+1}{3}$$

$$y = k + \frac{x+k-1}{3}$$

~~не могут совпадать между собой при одинаковом x~~

$$y = 4k + 1 - x$$

$$y = 4k - 1 - x$$

~~не могут совпадать между собой при одинаковом x~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin(\pi y) - \sin(\pi x)) \sin(\pi y) = (\cos(\pi y) + \cos(\pi x)) \cos(\pi y)$$

Пусть $\alpha = \pi x$, $\beta = \pi y$:

$$(\sin \beta - \sin \alpha) \sin \beta = (\cos \beta + \cos \alpha) \cos \beta$$

$$\cos^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta - \sin^2 \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(2\beta) + \cos(\alpha - \beta) = 0$$

По формуле $\cos(u) + \cos(v) = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$:

$$2 \cos \frac{2\beta - (\alpha - \beta)}{2} \cos \frac{2\beta + (\alpha - \beta)}{2} = 2 \cos \frac{3\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 0$$

$$\text{либо } \cos \frac{3\beta - \alpha}{2} = 0, \text{ либо } \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 0$$

$$\text{Итого: } \frac{3\beta - \alpha}{2} = 2\pi k \pm \frac{\pi}{2} = \pi(2k \pm \frac{1}{2}) \Rightarrow 3\beta - \alpha = \pi(4k \pm 1), k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 2\pi m \pm \frac{\pi}{2} = \pi(2m \pm \frac{1}{2}) \Rightarrow \alpha + \beta = \pi(4m \pm 1), m \in \mathbb{Z}$$

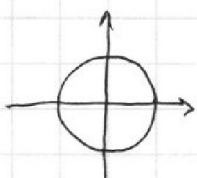
Поделим на π :

$$\begin{cases} 3y - x = 4k \pm 1 \Rightarrow y = \frac{x + 4k \pm 1}{3} \\ x + y = 4m \pm 1 \Rightarrow y = \frac{4m \pm 1 - x}{1} \end{cases}$$

Ответ: все такие пары — это:

$$\begin{cases} y = \frac{x + 4k + 1}{3}, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{x + 4k - 1}{3}, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \\ y = 4k + 1 - x, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \\ y = 4k - 1 - x, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$b) \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$



$$\arcsin \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\arccos \in [0; \pi]$$

Видно, что преце сказать,

какие не подходят



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x — количество 11 классников, n — количество билетов

Количество способов распределить билеты: C_x^n

Количество способов распределить билеты, чтобы A и B

но них поим: A, B — билет ($x-2$)
 $x-2$ человек — $n-2$ билетов

Итого: ~~C_{x-2}^{n-2}~~ C_{x-2}^{n-2}

Вероятность того, что A и B вместе попадут на концерт:

$$p = \frac{C_{x-2}^{n-2}}{C_x^n} = \frac{C_{x-2}^{n-2}}{C_{x-2}^{n-2} \cdot \frac{(n-1)n}{(x-1)x}} = \frac{(n-1)n}{(x-1)x} \quad \left(\text{т.е. } C_x^n = \frac{n!}{(n-x)!x!} \right)$$

$$C_{x-2}^{n-2} = \frac{(n-2)!}{(n-x)!(x-2)!}$$

В начале месяца $p_0 = \frac{(9-1) \cdot 9}{(x-1) \cdot x} = \frac{12}{x(x-1)}$

В конце месяца $p = \frac{n(n-1)}{x(x-1)}$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{n(n-1)}{12} = 11 \Rightarrow n(n-1) = 132$$

$$\frac{C_{x-2}^{n-2}}{C_x^n} = \frac{n!/(n-2)!}{x!/(x-2)!} = \frac{n(n-1)}{x(x-1)}$$

$$n^2 - n - 132 = n^2 - 12n + 11n - 11 \cdot 12 = n(n-12) + 11(n-12) =$$

$$= (n+11)(n-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=12 \\ n=-11 - \text{невозможно (т.к. количество билетов неотрицательно)} \end{cases}$$

Итак, в конце месяца 12 билетов

Ответ: 12 билетов (на 8 билетов больше, чем в начале)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$U_{\max}$:

$$\begin{aligned} (3(\cos \alpha - \cos \beta))^2 + (3\sin \alpha - \sin \beta)^2 &= \left(\frac{AC}{R_1}\right)^2 \\ (3(\cos \alpha - \cos \beta))^2 + (3\sin \alpha - 3\sin \beta)^2 &= \left(\frac{AB}{R_1}\right)^2 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{вычитаем} \end{array} \right.$$

$$\cancel{11} (6\sin \alpha - 4\sin \beta) \cdot 2\sin \beta = \frac{(AC)^2 - (AB)^2}{R_1^2}$$

$$(3\sin \alpha - \frac{2}{3}\sin \beta) \cdot \sin \beta = \frac{(AC)^2 - (AB)^2}{(2R_1)^2} =$$

$$= \frac{(2 \cdot 11)^2 - (2 \cdot 12)^2}{(2R_1)^2} = \frac{144 - 121}{R_1^2} = -\frac{23}{R_1^2}$$

$$U_{\max}: R_1 = \frac{4}{\sin \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow R_1^2 = \frac{16}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{32}{1 - \cos \alpha}$$

$$(3\sin \alpha - 2\sin \beta) \cdot \sin \beta (1 - \cos \alpha) = -\frac{23}{32}$$

$$\begin{aligned} \text{Найдем } \Delta ABC: \frac{abc}{4R} &= \frac{22 \cdot 24 \cdot 2R_1 \sin \beta}{4 \cdot 2R_1 \sin \frac{\beta}{2}} = \frac{22 \cdot 24}{4} \cdot 2 \cos \frac{\beta}{2} \\ &= \cancel{11} \cancel{24} 264 \cdot \cos \frac{\beta}{2} \\ &= \frac{22 \cdot 24}{2} \cos \frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

Значит: аналогично $\angle BAC$:

$$S_{\Delta ABC} = 264 \cdot \cos \frac{\beta}{2} = 264 \cdot \sin \angle BAC$$

$$\Rightarrow \angle BAC + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

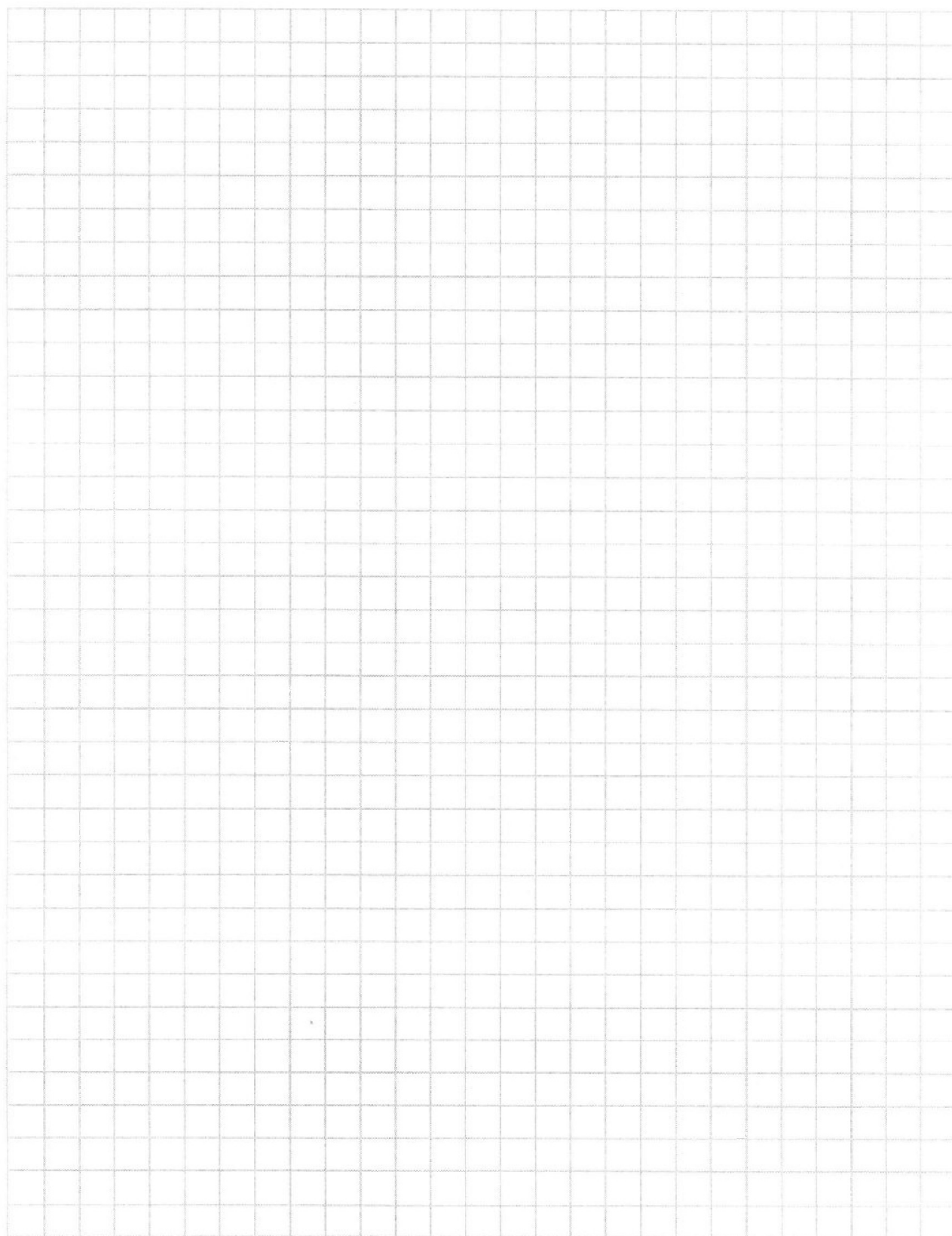
5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





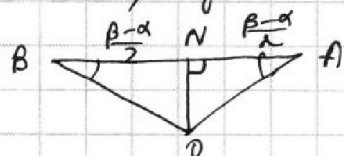
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

U_{max} , будем что $\angle PBO = \angle ABO$:



$$ON = OB \sin \frac{\beta - \alpha}{2} = R \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$12 = BN = OB \cos \frac{\beta - \alpha}{2} = R \cos \frac{\beta - \alpha}{2}$$

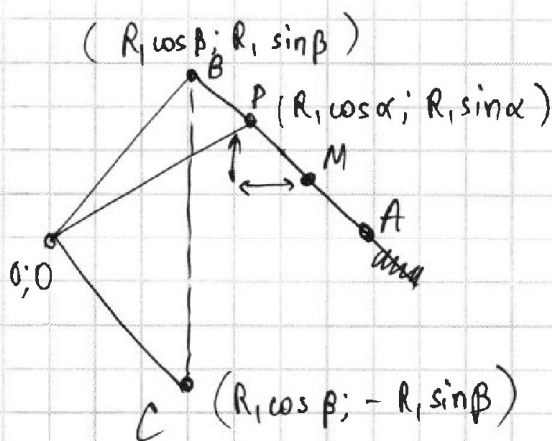
$$R_1 = \frac{8}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}; R = 2R_1 \sin \frac{\beta}{2} = 8 \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$U_{max}: 12 = 8 \frac{\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

По формуле ~~sin~~ $2 \cos u \sin v = \sin(u+v) - \sin(u-v)$:

$$12 = \frac{8}{2} \cdot \frac{\sin(\frac{3\beta - \alpha}{2}) + \sin(\frac{\alpha}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 4 \cdot (1 + \frac{\sin(\frac{3\beta - \alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})})$$

$$\sin(\frac{3\beta - \alpha}{2}) = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$$



$$\Delta x = R_1 (\cos \alpha - \cos \beta)$$

$$\Delta y = R_1 (\sin \alpha - \sin \beta)$$

Координата точки A:

$$R_1 \cos \beta + 3 \Delta x = R_1 (3 \cos \alpha - 2 \cos \beta)$$

$$R_1 \sin \beta + 3 \Delta y = R_1 (3 \sin \alpha - 2 \sin \beta)$$

$$x_A - x_C = R_1 (3 \cos \alpha - 3 \cos \beta) = 3 R_1 (\cos \alpha - \cos \beta)$$

$$y_A - y_C = R_1 (3 \sin \alpha - \sin \beta)$$

$$(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 = R_1^2 (9 \cos^2 \alpha - 18 \cos \alpha \cos \beta + 9 \cos^2 \beta + 9 \sin^2 \alpha - 6 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta)$$

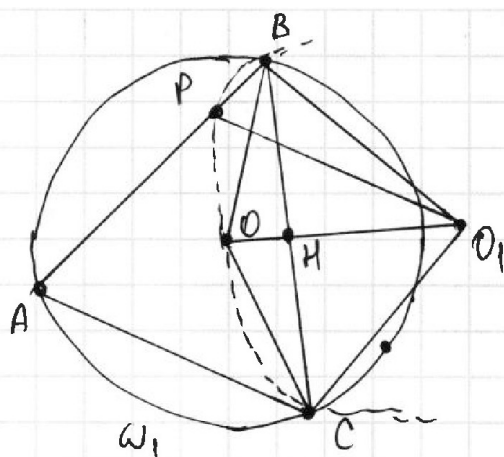


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle BOC$ равнобедренный ($BO = CO$)

Пусть O_1 — центр ω_2 , тогда

O_1, O и H (середина BC)

на одной прямой. Это

можно объяснить:

O, O_1, H
— на одной
прямой

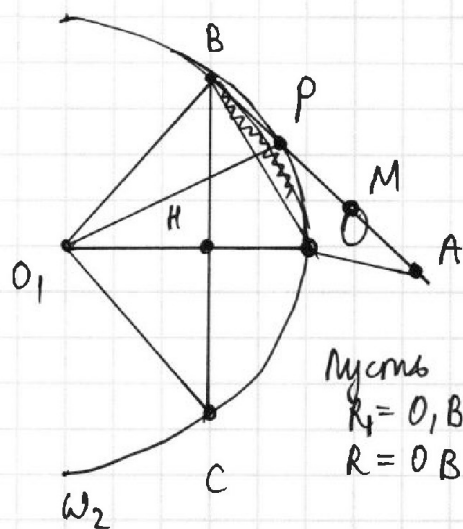
$\Leftarrow$ OH и $O_1H \in$
— одна прямая

$OH \perp BC$ (т.к. в р/б $\triangle BOC$
 OH и медиана, и высота)

$O_1H \perp BC$ (т.к. в р/б $\triangle BO_1C$
 O_1H и медиана, и высота))

т.к. $O, B = O_1C$

$$AB = AP + BP = 24 ; \quad AP = 2 BP$$



Пусть M — середина AP :

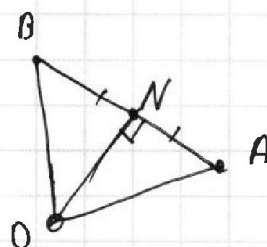
$$AM = MP = BP = 8$$

Пусть N — середина AB :

Рассмотрим $\triangle AOB$

$$AN = BN = 12$$

$$OB^2 = 12^2 + ON^2$$



$$\angle BOO = \beta ; \quad \angle POB = \alpha$$

$$\Rightarrow 8 = BP = 2R_1 \sin \frac{\alpha}{2} \quad (\triangle BO_1P), \quad \angle PBO_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$R = OB = 2R_1 \sin \frac{\beta}{2} \quad (\triangle BOO_1), \quad \angle OBO_1 = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

$$\angle PBO = \angle PBO_1 - \angle OBO_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \frac{\beta}{2}) = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Свойство р/б
треугольников





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha = 2\pi m - \theta = 2\pi(m-1) + 2\pi - \theta$$

Тот же самый
вид решения:

$$\alpha = 2\pi v + \frac{\pi}{4}$$

~~Вот так~~

Ответ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2\pi v + \frac{\pi}{4} \\ \alpha = 2\pi v + \frac{3\pi}{4} \\ \alpha = 2\pi v + \frac{5\pi}{4} \\ \alpha = 2\pi v + \frac{7\pi}{4} \end{array} \right., v \in \mathbb{Z}$$

$$M_{\max} = 6\pi + 4\sqrt{28} \quad (\text{достигается при } \alpha, \text{ указанных выше})$$

$$\begin{array}{l} \theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow 2\pi - \theta = \frac{7\pi}{4} \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \rightarrow 2\pi - \theta = \frac{5\pi}{4} \\ \theta = \frac{5\pi}{4} \rightarrow 2\pi - \theta = \frac{3\pi}{4} \\ \theta = \frac{7\pi}{4} \rightarrow 2\pi - \theta = \frac{\pi}{4} \end{array}$$

те же решения
можно
записать в
виде $\frac{4u \pm 1}{4} \pi$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} x(A) = -x(C) &= \sqrt{6^2 - (4\sin\theta)^2} \\ y(B) = -y(D) &= \sqrt{6^2 - (4\cos\theta)^2} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Всегда}$$

Удобно применить неравенство о средн. А и К:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{арифметическим и} \\ \text{квадратичным} \end{array}$$

$$\begin{aligned} M &= 6\pi + 2 \left(\sqrt{6^2 - (4\sin\theta)^2} + \sqrt{6^2 - (4\cos\theta)^2} \right) \leq \\ &\leq 6\pi + 2 \cdot 2 \frac{a+b}{2} \leq 6\pi + 4 \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \\ &= 6\pi + 4 \cdot \sqrt{\frac{6^2 - (4\sin\theta)^2 + 6^2 - (4\cos\theta)^2}{2}} = 6\pi + 4 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 36 - 16}{2}} \\ &= 6\pi + 4\sqrt{28} \quad - \text{и есть максимально возможное } M \end{aligned}$$

Оно достигается тогда и только тогда, когда $a=b$:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b \end{aligned}$$

Тогда и $a^2 = b^2$: $6^2 - (4\sin\theta)^2 = 6^2 - (4\cos\theta)^2$

$$(4\sin\theta)^2 = (4\cos\theta)^2 \Rightarrow \sin^2\theta = \cos^2\theta \Rightarrow \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta) = 0$$

Итого: $2\theta = 2\pi u \pm \arccos(0) = (2u \pm \frac{1}{2})\pi, u \in \mathbb{Z}$

$$\theta = \frac{4u \pm 1}{4} \pi = \pi(u \pm \frac{1}{4})$$

Вспомним, что $\theta \in [0; 2\pi)$

$$\pi u + \frac{\pi}{4} \in [0; 2\pi) \Leftrightarrow u \in [-\frac{1}{4}; \frac{7}{4}) \quad - \text{только } 0 \text{ и } 1$$

$$\pi u - \frac{\pi}{4} \in [0; 2\pi) \Leftrightarrow u \in [\frac{1}{4}; \frac{9}{4}) \quad - \text{только } 1 \text{ и } 2$$

(соотв. $\theta = \frac{\pi}{4}$ и $\theta = \frac{5\pi}{4}$)
(соотв. $\theta = \frac{3\pi}{4}$ и $\theta = \frac{7\pi}{4}$)

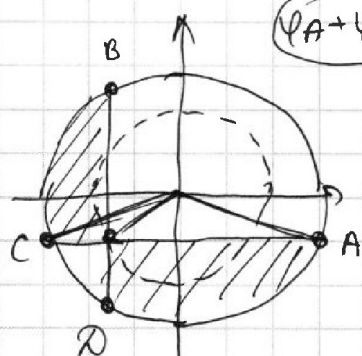


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

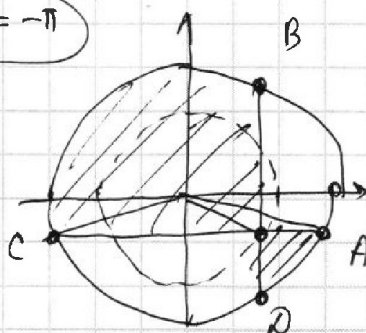
$$5) \theta \in [\pi; \frac{3\pi}{2})$$



$$UBC = (2\pi + \varphi_C - \varphi_B) \cdot 6$$

$$UAD = (\varphi_A - \varphi_D) \cdot 6$$

$$UBC + UAD = (2\pi + \underbrace{\varphi_A + \varphi_C}_{-\pi} - \underbrace{\varphi_B - \varphi_D}_0) \cdot 6 = 6 \cdot \pi$$



$$UBC = (2\pi + \varphi_C - \varphi_B) \cdot 6$$

$$UAD = (\varphi_A - \varphi_D) \cdot 6$$

$$UBC + UAD = 6(2\pi + \underbrace{\varphi_A + \varphi_C}_{-\pi} - \underbrace{\varphi_B - \varphi_D}_0) = 6 \cdot \pi$$

Итак, подготовим: $\varphi_B + \varphi_D = 0$ ($\varphi_D = -\varphi_B$) всегда

при $\theta \in [0; \pi)$ $\varphi_A + \varphi_C = \pi$

при $\theta \in [\pi; 2\pi)$ $\varphi_A + \varphi_C = -\pi$

$UBC + UAD = 6 \cdot \pi$ всегда, и мы это доказали

Периметр фигуры P складывается из $UBC + UAD$ и $AC + BD$ (это видно из каждого рисунка)

~~Итак:~~ $M = 6\pi + 2(\sqrt{6^2 - (4\sin\theta)^2} + \sqrt{6^2 - (4\cos\theta)^2})$

Эта формула верна, поскольку корень всегда неотрицателен, и корректно отображает длины отрезков

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AC + BD = 2(\sqrt{6^2 - (4\sin\theta)^2} + \sqrt{6^2 - (4\cos\theta)^2})$$

А еще к М нужно прибавить $\angle B + \angle A D$

мы обозначали
длину дуги
таким
образом

при $\theta \in [0; \pi]$ А и С нужно определять по косинусу,

а точки В и D: по синусу. (тогда это будет
корректно и одно-
значно)

$$\varphi_A = \arccos\left(\frac{1}{6}\sqrt{6^2 - (4\sin\theta)^2}\right), \quad \varphi_C = \pi - \varphi_A$$

$$\varphi_B = \arcsin\left(\frac{1}{6}\sqrt{6^2 - (4\cos\theta)^2}\right), \quad \varphi_D = -\varphi_B$$

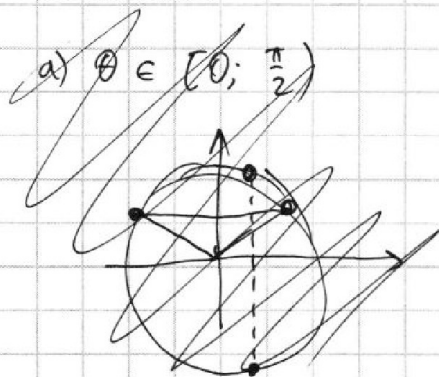
$$\text{Т.е.: } \angle B + \angle A D = (\varphi_C - \varphi_B + \varphi_A - \varphi_D) \cdot 6 =$$

$$= (\pi - \varphi_A - \varphi_B + \varphi_A + \varphi_B) \cdot 6 = \pi \cdot 6 = \text{const.}$$

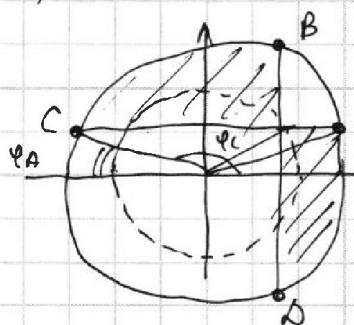
Докажем это более строго: ~~Всегда~~ по определению

$$\angle B = 6(\varphi_C - \varphi_B), \quad \angle A D = 6(\varphi_A - \varphi_D)$$

$$\angle B + \angle A D = 6(\varphi_C - \varphi_B + \varphi_A - \varphi_D)$$



а) $\theta \in [0; \pi]$

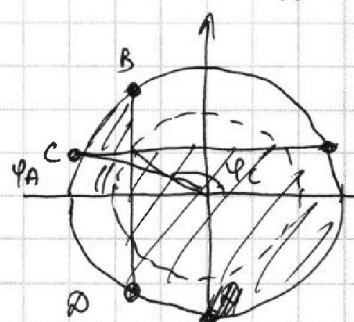
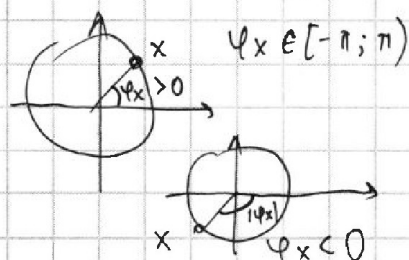


$$\varphi_A + \varphi_C = \pi$$

$$\varphi_B + \varphi_D = 0$$

$$\angle B + \angle A D = 6 \cdot \pi$$

P.S. Угловая мера:



$$\varphi_A + \varphi_C = \pi$$

$$\varphi_B + \varphi_D = 0$$

$$\angle B + \angle A D = 6 \cdot \pi$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

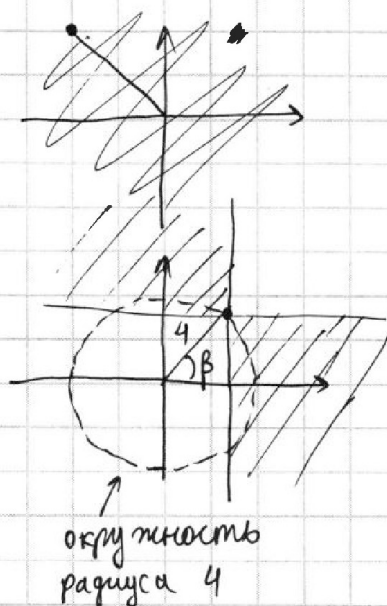
СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + y^2 \leq 36 = 6^2 \Leftrightarrow x$ и y внутри окружности с центром в центре координат и радиуса 6

$$(x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4\sin\alpha \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -4\sin\alpha = 4\sin(-\alpha) \\ y - 4\cos\alpha \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 4\cos\alpha = 4\cos(-\alpha) \\ x + 4\sin\alpha \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4\sin\alpha = 4\sin(-\alpha) \\ y - 4\cos\alpha \leq 0 \Leftrightarrow y \leq 4\cos\alpha = 4\cos(-\alpha) \end{cases}$$



Если $\beta = -\alpha$, то:

$$\begin{cases} x \leq 4\sin\beta \\ y \geq 4\cos\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4\sin\beta \\ y \leq 4\cos\beta \end{cases}$$

Представим

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\pi m - \theta \\ \beta &= -2\pi m + \theta = 2\pi k + \theta \end{aligned}$$

$$(где $k = -m; k \in \mathbb{Z}$)
 $\theta \in [0; 2\pi)$$$

Тогда $\sin\beta = \sin\theta$
 $\cos\beta = \cos\theta$

д. Пусть $\theta \in [0; \pi]$

$$A(\sqrt{6^2 - (4\sin\theta)^2}; 4\sin\theta)$$

$$B(4\cos\theta; \sqrt{6^2 - (4\cos\theta)^2})$$

$$C(\sqrt{6^2 - (4\sin\theta)^2}; 4\sin\theta)$$

Пусть $\theta \in [0; \pi]$

