



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$A \cdot B \cdot C$ - квадрат, $A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$

11 и 101 - простые $\Rightarrow B$ делится на $101 \Rightarrow B = 606$ т.к. содержит 6 , C делится на $11 \Rightarrow C = 33 \Rightarrow A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot a$

$$\Rightarrow a = 2; 8$$

Ответ: $(2222; 606; 33); (8888; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$$

По условию

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(y+2)} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

↙

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x-2+y+2+5}{(x-2)(y+2)}$$

↙

$$xy = xy + 2x - 2y - 4$$

$$x-y = 2$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6xy = \\ &= 2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2 \cdot (x-y)^2 = 8 \end{aligned}$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмечте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\sin \pi y \cdot \sin \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\cos(\pi \cdot (x-y)) = \cos(2\pi x)$$

$$\pi(x-y) = 2\pi x + 2\pi k \quad \pi(x-y) = -2\pi x + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$x-y = 2x+2k$$

$$x-y = -2x+2k$$

$$y = -x + 2k$$

$$y = 3x - 2k$$

a) Определим: $x \in \mathbb{R}$ $y = -x - 2k; 3x - 2k \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $\arcsin \frac{\gamma}{6} + \arcsin \frac{\gamma}{2} < \pi$

$$-6 \leq x \leq 6 \quad -2 \leq y \leq 2 \quad x = -y - 2k \quad x = \frac{-y - 2k}{3}$$

~~$$1) y = -2$$~~

~~$$-6 \leq 2 - 2k \leq 6$$~~

$$-6 \leq \frac{2 - 2k}{3} \leq 6$$

~~$$-8 \leq -2k \leq 4$$~~

~~$$k = -4, -2, 0, 1, 2, 3, 4$$~~

$$-20 \leq -2k \leq 16$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x - кол-во учеников, y - кол-во билетов к концу конкурса

в начале вероятность

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{12}{x(x-1)}$$

в конце вероятность

$$\frac{9}{x} \cdot \frac{y-1}{x-1} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$$

$$\frac{y(y-1)}{12} = 6$$

$$y^2 - y - 72 = 0$$

$$(y-9) \cdot (y+8) = 0$$

$$y=9$$

Ответ: 9.

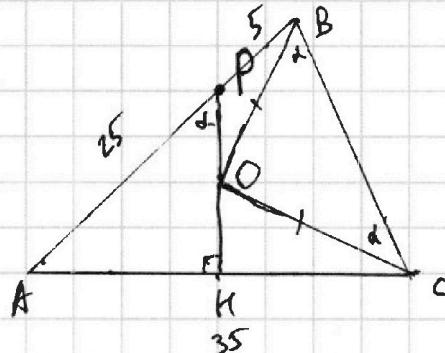


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle BOC = 2d$. т.к. $OPBC$ -выпуклый

$$\angle POPB + \angle BOC = 180 \Rightarrow \angle AOP = d \text{ т.к. смежный}$$

Проведем PO до пересечения с AC .

$$PO \perp AC = m. H$$

$$\angle BOC = 180 - 2x, \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 90 - d \Rightarrow \angle PHA = 90^\circ$$

м. Оединим на серед. перпендикуляре $KAC \Rightarrow DH = AH = HC = \frac{35}{2}$

$$\cos \angle BAC = \frac{35}{50} = \frac{7}{10} \Rightarrow \sin \angle BAC = \sqrt{\frac{51}{100}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = 52,5\sqrt{51}$$

Ответ: $52,5\sqrt{51}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

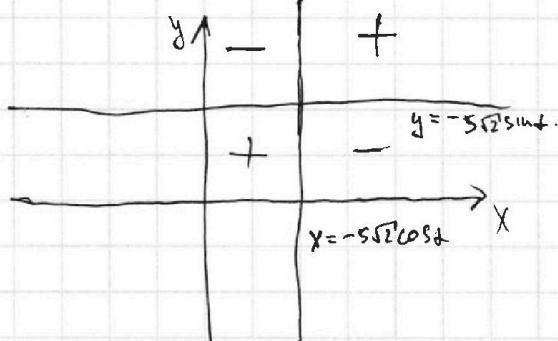
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

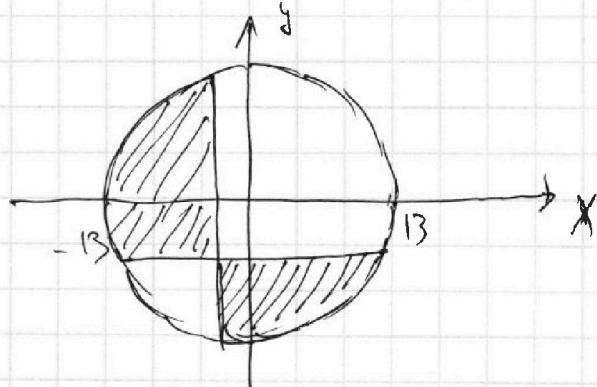
Рассмотрим 2 уравнения неравенства, это решения это круг с центром $(0,0)$
и радиусом 13

Рассмотрим 1 неравенство, это линия неравенства $y = -5\sqrt{2}\sin\alpha$.

$$y = -5\sqrt{2}\sin\alpha$$



\Rightarrow решение системы включает все



угол между прямыми $y = -5\sqrt{2}\sin\alpha$ и $x = -5\sqrt{2}\cos\alpha = 90^\circ \Rightarrow$ сумма

дуг окружности $180^\circ \Rightarrow$ сумма их длин будет 13π



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6000 ÷ 13

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{y+x+s}{xy} = \frac{y+x+s}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow xy = (x-2) \cdot (y+2)$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4, \quad x = y + 2$$

$$8y - x = x - y = 2$$

$$y = -2 \quad x = -6; -4; \\ -2; 0; 2; 4; \\ 6$$

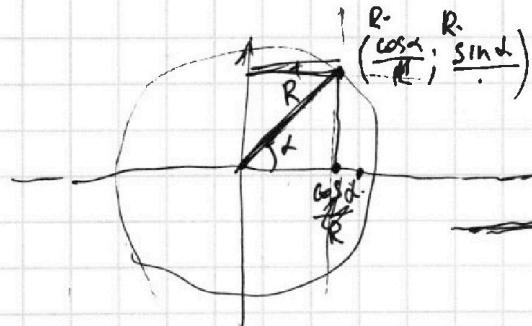
$$x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy$$

$$= 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6xy = 2 \cdot (x^2 - 2xy + y^2) = 2 \cdot (x-y)^2 = 8$$

$$8y - x = x - y = 2$$

$$y = -2 \quad x = -6; -4; \\ -2; 0; 2; 4; \\ 6$$

—
—
—



$$x \in (-6; 6)$$

$$yt(-2; 2)$$

$$y = 2x$$

$$X \in \mathcal{Y} + \mathcal{M}$$

$$-6 \leq x \leq 6 \quad -2 \leq y \leq 2$$

$$-6 < -1 + 2k \leq 6$$

$$-2 \leq k \leq 4$$

b 7 znam

$$-65 - 1 + 2k \leq 6$$

- 2,5-5 кг/м²
1 г/см²

$$-652456 - 6524 + 156$$

$$-25 \leq k \leq 43$$

$\gamma_{\text{max}} < 6$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$A \cdot B \cdot C = \text{квадрат}$

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111$$

$$\Rightarrow B = \overline{606} = 6 \cdot 101$$

$$C = \overline{33} = 3 \cdot 11$$

$$(2222; 606; 33); (8888; 606; 33)$$

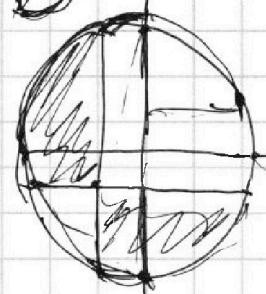
$$1111 = 11 \cdot 101 =$$

11 101 - простое.



$$6 \cdot 3 \cdot a = k^2$$

$$a=2; y$$



№1 A · B · C - квадрат. $\Rightarrow A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$

101 - простое $\Rightarrow B$ должно содержать 101 $B = \overline{606}$, С данным

содержит 11 $C = 33$ $A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot a$.



$$a=2; 8.$$

$$\text{Ответ: } (2222; 606; 33); (8888; 606; 33).$$

(Bcos α ; Bsin α)

№2

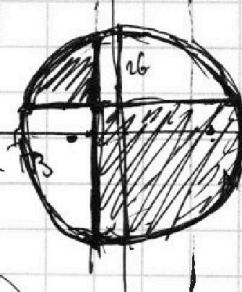
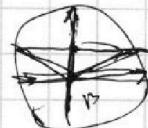
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$(x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0$$

$B \cdot S$

$$3 \cdot 7 + 26 = 33 \text{ не подходит}$$

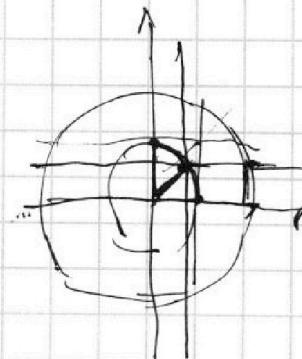
$$y = x - 2k$$



$$16^2 = 50^2 + 10^2$$

$$16 = 2\sqrt{115}$$

$$\text{угол } L = 20^\circ 26.9^\circ$$



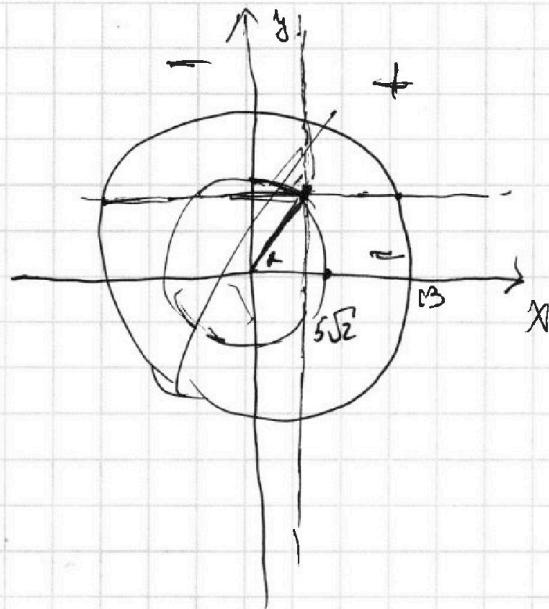


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

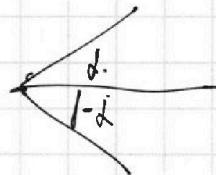
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



α



$\theta =$

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{6} + \arcsin \frac{4}{\sqrt{11}} < \sqrt{11}$$

$$(\sin \sqrt{x} + \sin \sqrt{y}) \sin \sqrt{x} = (\cos \sqrt{x} - \cos \sqrt{y}) \cos \sqrt{x}$$

~~$\sin \sqrt{x}$~~

$$\sin^2 \sqrt{x} + \sin \sqrt{y} \cdot \sin \sqrt{x} = \cos^2 \sqrt{x} - \cos \sqrt{y} \cdot \cos \sqrt{x}$$

$$\sin \sqrt{y} \cdot \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{y} \cdot \cos \sqrt{x} = \sin^2 \sqrt{x} - \sin^2 \sqrt{x}$$

$$\cos(\sqrt{x-y}) = \cos(2\sqrt{x})$$

$k \in \mathbb{Z}$.

~~$x-y=2k$~~

$$\sqrt{x-y} = 2\sqrt{x} + \lambda \sqrt{k}$$

$$x-y = 2x+2k$$

$$\sqrt{x-y} = -2\sqrt{x} + 2\sqrt{k}$$

$$x-y = -x+2k \quad k \in \mathbb{Z}$$

a). Доказем: $x \in \mathbb{R}; y = -x+2k \quad k \in \mathbb{Z}$

$$x-y = -2x+2k$$

$$y = 3x+2k$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \cdot \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{24}{x(x-1)}$$

$$\frac{2y \cdot (y-1)}{2y} = 6.$$

$$\frac{662}{2800} = \frac{1275}{4} =$$

$$\frac{y}{x} \cdot \frac{y-1}{x-(x-1)} = \frac{2 \cdot y \cdot (y-1)}{x \cdot (x-1)}$$

$$y(y-1) = 72$$

$$\begin{array}{r} 1275 = \\ \hline 5 \overline{)255} \end{array}$$

$$\cos 35^\circ = \frac{5.0}{10} = 0.97.$$

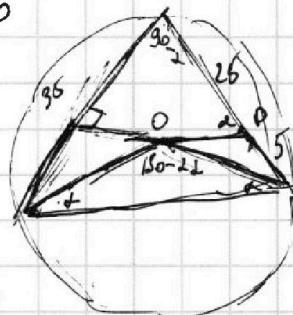
$$y^2 - y^2 - 72 = 0$$

$$\underline{25 - 51}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{-x+2\sqrt{2}}{2} < \pi$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{0.51}$$

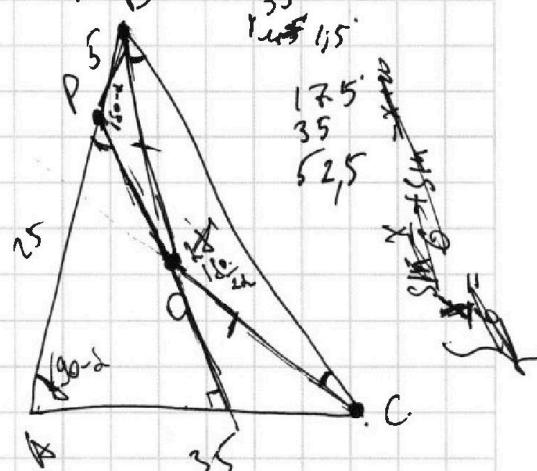
$$y \neq g \quad (g-g) \cdot (y+g) = 0$$



~~2,5851~~

49

$$S = \frac{1}{2} 30 \cdot 35 \cdot \sqrt{0,91} = 52,5 \sqrt{31}$$

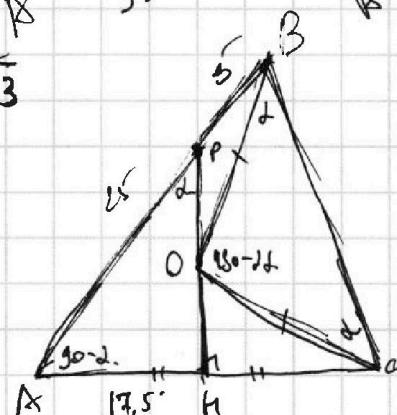


$$\begin{array}{r}
 & 35 \\
 \times & 35 \\
 \hline
 & 175 \\
 + & 175 \\
 \hline
 & 1225
 \end{array}$$

625-

$$\frac{2500 - 1225}{4} = \sqrt{\frac{1275}{4}}$$

1988 125



Дүрткүн кө
сөрнүлсө. Күнде.
=?

РН-сепар. и А.