



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{d d d d}, \text{ где } d - \text{цифра от } 1 \text{ до } 9 \Rightarrow (d; 11) = 1$$

$$A = 1111 \cdot d = 101 \cdot 11 \cdot d$$

г-м, что $C \not\equiv 101$, т.к. иначе $C \geq 101$ - не двузнач.

$$\text{но } A \cdot B \cdot C \text{ - квадрат} \Rightarrow B \equiv 101$$

$$B = 101 \cdot k, \text{ если } k \geq 10, \text{ то } B \text{ не трёхзнач} \Rightarrow 1 \leq k \leq 9$$

$$\text{но } B \text{ содержит } 7, \text{ а } 101 \cdot k = \overline{k 0 k}, \text{ если } k - \text{цифра} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 7 \Rightarrow \boxed{B = 707} \Rightarrow B \not\equiv 11$$

$$A \equiv 11, \text{ но } A \not\equiv 11^2 \Rightarrow C \not\equiv 11 \Rightarrow C = 11 \cdot l, \text{ если } l \geq 10,$$

$$\text{то } C \text{ - не двузнач} \Rightarrow 1 \leq l \leq 9 \Rightarrow C = \overline{ll}, \text{ но}$$

$$C \text{ содержит } 7 \Rightarrow \boxed{C = 77} \quad (l=1 \Rightarrow C=11)$$

$$\text{итого: } A \cdot B \cdot C = (101 \cdot 11 \cdot d) \cdot (101 \cdot 7) \cdot (11 \cdot 7) =$$

$$= 101^2 \cdot 11^2 \cdot 7^2 \cdot d \Rightarrow A \cdot B \cdot C \text{ - квадрат} \Leftrightarrow d \text{ - квадрат}$$

$$\text{т.к. } 1 \leq d \leq 9, \text{ то найдем } d = 1, 4, 9.$$

$$\text{Ответ: } (1111; 707; 77)$$

$$\text{итого, } A \cdot B \cdot C = (101 \cdot 11 \cdot d) \cdot (101 \cdot 7) \cdot 11 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 7 \cdot d$$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C \text{ - квадрат} \Leftrightarrow 7 \cdot d \text{ - квадрат} \Leftrightarrow d = 7$$

$$\text{Ответ: } \underbrace{(7777)}_A; \underbrace{707}_B; \underbrace{11}_C$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении** каждой задачи отдельно.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{y+x+3}{xy}$$

$$k(x-4; y+4) = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$k(x, y) = k(x-4; y+4)$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

Значит, т.к. $x, y \geq 0$ то $x+y+3 > 0 \Rightarrow$ можно
умножить обе
части на

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-4)(y+4)}$$

можно не
считать за тем, что знаем,
т.к. по условию $k(x, y) =$
 $k(x-4; y+4)$ определены

$$xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$x = y + 4$$

$$M = (y+4)^3 - y^3 - 12(y+4)y = (y^3 + 12y^2 + 48y + 64) - y^3 - 12y^2 - 48y = 64$$

$$M = 64$$

$$\text{Ответ: } M = 64$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a) $\begin{cases} \pi y = \beta, & \pi x = \alpha \end{cases}$

$$(\sin \beta - \sin \alpha) \cdot \sin \beta = (\cos \beta + \cos \alpha) \cdot \cos \beta$$

$$\sin^2 \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta$$

$$(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) + (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 0$$

$$\cos 2\beta + \cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$\alpha = \pi - (2\beta)$$

$$\begin{cases} 2\beta = -(\alpha - \beta) + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\beta = \pi - (\alpha - \beta) + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta + \alpha = 2\pi k \\ \beta + \alpha = 2\pi n + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \beta + \alpha = \pi \ell, \ell \in \mathbb{Z}$$

Следовательно, $\pi x + \pi y = \pi \ell \Leftrightarrow \boxed{x + y = \ell}, \ell \in \mathbb{Z}$

Ответ: x и y такие, что $\underline{x + y \in \mathbb{Z}}$

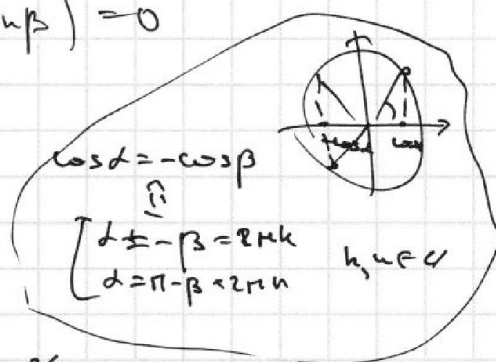
б) $\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$ (*)

Введём $\arcsin \frac{y}{4} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}$; $-\arcsin \frac{y}{4} = \arccos \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2}$

(*) $\Leftrightarrow \arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0$

ОДЗ: $\left\{ \left| \frac{x}{7} \right| \leq 1, \left| \frac{y}{4} \right| \leq 1 \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \end{cases}$

Кот.к. $\arccos x$ принимает значение от 0 до π ,
то $\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} \geq 0$ $\forall$ $\Leftrightarrow \arccos \frac{x}{7} = 0, \arccos \frac{y}{4} = 0$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

из равенства

$$P_1 = 11 \cdot P_0 :$$

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = 11 \cdot \frac{12}{n(n-1)} \quad (\Rightarrow) \quad k(k-1) = 12 \cdot 11$$

$k = 12$ и $k = -11$ - неоравн

$$k > 4 \Rightarrow \boxed{k = 12}$$

"

Всего на концерт в конце месяца было выдано

12 билетов

~~Ответ~~ Ответ: 12 билетов (на 6 билетов, как в начале)



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Всего n одинаковых машин. $\left| \begin{matrix} (n) \\ k \end{matrix} \right| = C_n^k$
 всего есть $\binom{n}{k}$ способов раздать k машин
 и билет. ~~Всего~~ При этом есть ровно $\binom{n-2}{2}$
 тех способов, при которых билет достанет

2) A, B и C , т.к. мы можем считать, что
 A и B мы уже дали билет, а оставшиеся
 2 распределены между $n-2$ оставшимися людьми.
 что, учитывая вероятность попасть

$$\begin{aligned} \text{на концерт (с учётом равномерного выбора)} \\ \text{каждым билетом)} &= \frac{P_+}{P_{\text{общ}}} = \frac{\binom{n-2}{2}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}} = \\ &= \frac{12}{n(n-1)} = P_0 \end{aligned}$$

3) В конце месяца ~~было~~ было выдано всего
 $k > k$ билетов. аналогично, вероятность A и B
 получить билет равна $P_1 = \frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}}$
 $P_1 = \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!} = \frac{(n-2)! \cdot k!}{n! \cdot (n-k)!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$16 \cos \alpha = 11 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{11}{16} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{16}\right)^2} \quad (\alpha < \frac{\pi}{2})$$
$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{16^2 - 11^2}{16^2}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 27}}{16} = \frac{3}{16} \cdot \sqrt{15}$$

$$AC = 22, AB = 24 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot \sin \alpha =$$
$$= \frac{22 \cdot 24}{2} \cdot \frac{3}{16} \cdot \sqrt{15} = \frac{11 \cdot 3}{2} \cdot 3 \sqrt{15} = \frac{99}{2} \sqrt{15}$$

$$\text{Ответ: } \frac{99}{2} \sqrt{15}$$

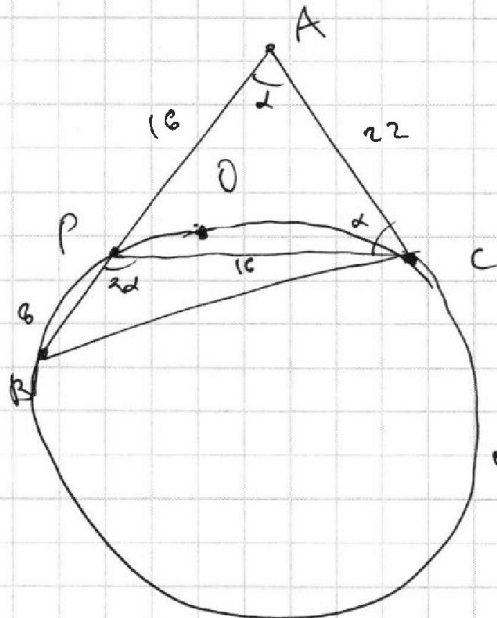


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle ABC$ - остроуг.

$\perp$

τ - о-внутри $\triangle ABC$

$\angle BOC = 2\angle BAC$ (центр.)

$\perp$

$\angle BPC = 2\angle BAC = 2\angle PAC$

$\perp$

$\triangle APC$ - равноуг.,

т.е. $\angle BPC = \angle PAC + \angle ACP = 2\alpha = \alpha + \angle ACP$

$\perp$

$\angle ACP = \alpha \Rightarrow AP = PC = 16$

найдем τ - косинусов гл

$\triangle ABC \sim \triangle BPC$:

$$1) BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \alpha \Rightarrow 24^2 + 22^2 - 2 \cdot 24 \cdot 22 \cos \alpha$$

$$2) BC^2 = BP^2 + PC^2 - 2BP \cdot PC \cdot \cos 2\alpha = 8^2 + 16^2 - 2 \cdot 8 \cdot 16 \cdot \cos 2\alpha$$

$$24^2 + 22^2 - 2 \cdot 24 \cdot 22 \cos \alpha = 8^2 + 16^2 - 2 \cdot 8 \cdot 16 \cdot (2\cos^2 \alpha - 1)$$

решим квадратное уравнение $\alpha = 0$ α (не подходит)

$$12^2 + 11^2 - 2 \cdot 12 \cdot 11 \cos \alpha = 4^2 + 8^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot (2\cos^2 \alpha - 1)$$

$$128 \cos^2 \alpha - 264 \cos \alpha + 174 + 121 - 16 - 64 + 64 = 0$$

$$128 \cos^2 \alpha - 264 \cos \alpha + 219 = 0$$

р-м $\triangle APC$: он равноуг с верш $P \Rightarrow AP \cdot \cos \alpha = \frac{AC}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

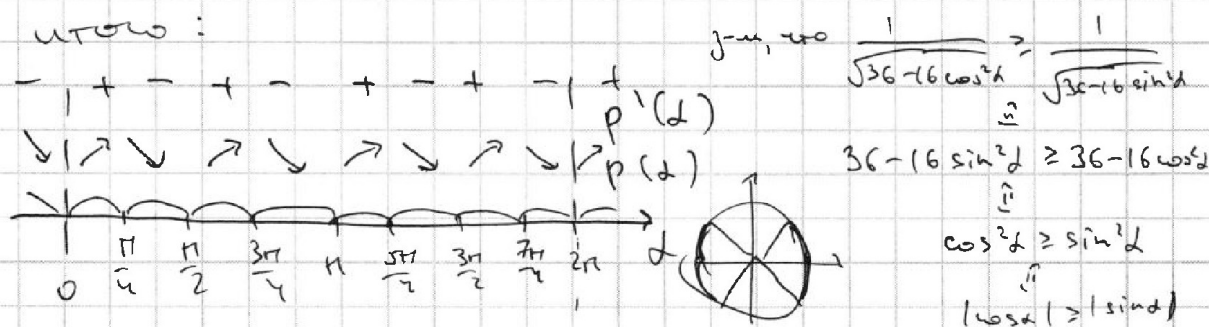
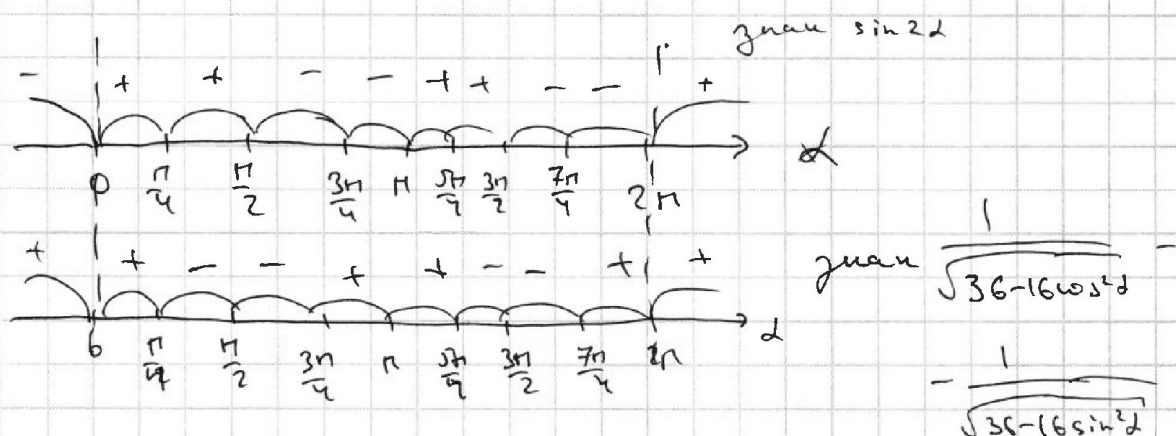
СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin 2\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad 2\alpha = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n \quad \alpha = \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

отметим на промежутке $[0; 2\pi]$ все нули
графиков и покажем, как меняется знак:



значит все точки вида

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k \quad (k \in \mathbb{Z}) - \text{поисканные максимумы}$$

$$\text{и при этом } p\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k\right) = 2\sqrt{36 - 16 \cdot \frac{1}{2}} + 2 \cdot \sqrt{36 - 16 \cdot \frac{1}{2}} + 6\pi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{\max} = 8\sqrt{7} + 6\pi \\ \alpha_{\max} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} - \text{ответ}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$ сумма дуг равна $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 6 = 6\pi$

2. найдем $DE + BC$ или φ -ю от α :

$$\text{из } \triangle MOC: MC^2 = OC^2 - AC^2 \text{ или } MC^2 = 36 - 16 \cos^2 \alpha$$

$$MC = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 2 \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$$

аналогично из $\triangle DON$:

$$DN = \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} \Rightarrow DE = 2 \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}$$

итого, нам хотим максимизировать

$$2 \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} + 2 \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} + 6\pi = P(\alpha),$$

$P(\alpha)$ = периметр $\varphi(\alpha)$

$$P'(\alpha) = \frac{2}{2 \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}} \cdot (-32 \cos \alpha) \cdot (-\sin \alpha) +$$

$$+ \frac{2}{2 \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}} \cdot (-32 \sin \alpha) \cdot \cos \alpha + 0$$

$$P'(\alpha) = \frac{32 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}} - \frac{32 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}} =$$

$$= 32 \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}} \right)$$

выясним, когда $\rightarrow$ отр. в 0:

$$\frac{1}{\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}} \Leftrightarrow 36 - 16 \cos^2 \alpha = 36 - 16 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow$$

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ или } \frac{3\pi}{4}$$

$$\left(\frac{36 - 16 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} > 0 \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐

СТРАНИЦА

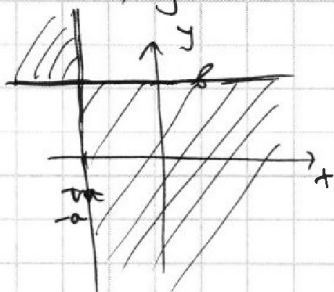
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Давайте решать задачу геометрически, чтобы наше решение системы в плоскости xOy :

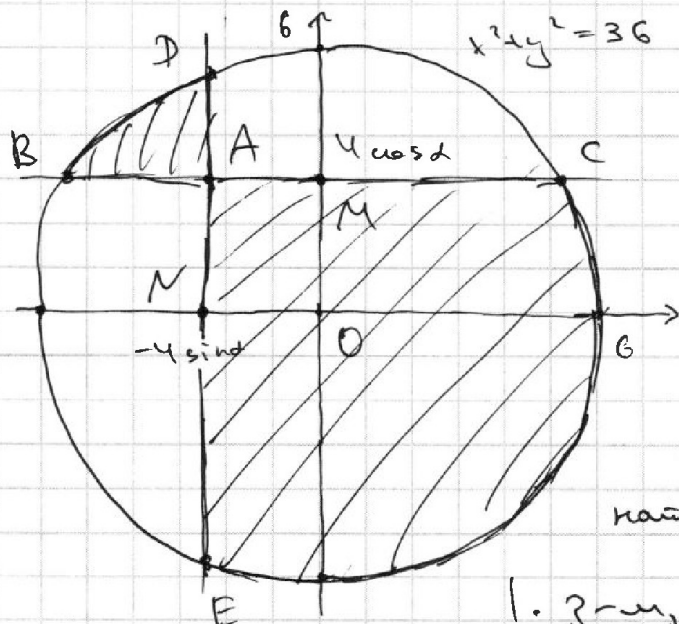
2-е уравнение: $x^2 + y^2 = 36$ — круг с центром в $O(0;0)$ и радиусом 6.

а ГМТ $\pi(x; y): (x+a)(y-b) \leq 0$ выглядит следующим образом:



выглядит
если $y \geq b$, то $x \leq -a$
или $y \leq b$, то $x \geq -a$

Тогда для данного α :



фигура $\Phi(\alpha)$ закрашена.

видно, что при увеличении α т. А будет двигаться по окружности с центром в O — радиусом $\sqrt{16 \cos^2 \alpha + 16 \sin^2 \alpha} = 4$

найдем периметр $\Phi(\alpha)$

1. Зам., что сумма дуг $\widehat{BD}$ и $\widehat{CE}$ постоянна, т.е.

дуг $\widehat{BD}$ и $\widehat{CE}$ постоянна, т.е.

$\angle DAB = \angle CAE = 90^\circ = \frac{\widehat{BD} + \widehat{CE}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} + \widehat{CE} = 180^\circ \Rightarrow$ сумма дуг будет равна половине длины окруж.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2} = d \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(n-2)}{2n} \right)$$

$$a = 2d \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(n-2)}{2n} \right)$$

$$\text{] } k\text{-гомер } \Pi A_1 \Rightarrow A_1 A_2 \sim (k-1) \ell$$

$$\text{из центра } \Omega = (k-1) \cdot \ell = (k+1) \cdot \frac{a}{2} = (k+1) \cdot d \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(n-2)}{2n} \right)$$

$$\ell = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 + d^2} = \sqrt{\frac{4kd^2}{(k-1)^2} + d^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi(n-2)}{2n} \right) + d^2} =$$

$$= d \sqrt{\frac{4k}{(k-1)^2} + 1 + \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi(n-2)}{2n} \right)}$$

$$\ell(k-1) = (k+1) \cdot d \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(n-2)}{2n} \right)$$

$$(k-1) \cdot \sqrt{\frac{4k}{(k-1)^2} + 1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(n-2)}{2n}} = (k+1) \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi(n-2)}{2n}$$

$$(k-1)^2 \cdot \left(\frac{4k}{(k-1)^2} + 1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(n-2)}{2n} \right) = (k+1)^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(n-2)}{2n}$$

$$4k + (k-1)^2 + (k-1)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(n-2)}{2n} = (k+1)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(n-2)}{2n}$$

отсюда находим k и подставляем его в

$$d = a \operatorname{ctg} \frac{25k}{k-1}$$

чтобы найти центр Ω нужно составить $\perp$
и провести $\perp$ к $\Pi A_1 \sim \Pi \subset \Omega_1, \Omega_2$, т.е. k -угол
вне-вп. в соответств. центр

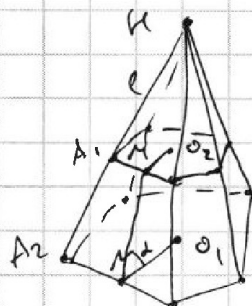


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



проводим разрезы правильной усеч. пирамиды до τ - K

K - центр правильного, переводим в правильные многоугольники - центрами O_1 и O_2 дуги в дугах

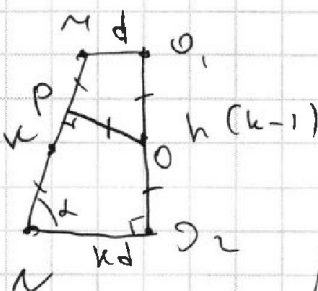
$$K \cdot KO_2 = KO_1, \quad \angle M, N - \text{сер. соотв. в-сторон}$$

$$O_2M = d \Rightarrow O_1N = kd \quad (d \text{ и } kd \text{ равны для всех сторон})$$

$$KO_2 = h \Rightarrow O_2O_1 = h(k-1)$$

р-м сечение:

$$PO = OO_1 = OO_2 = \frac{h}{2}(k-1)$$



также можно, что центр сфер $\omega = O$. есть середина O_1O_2 , т.к. $\Gamma M T$, равноуд. от боковых граней - грани KO_1 , а $\Gamma M T$ т.к. равноуд. до 2-х параллельных || или перпенд. к р-у сечения O_1O_2

т.к. POO_2N - впис. и $PO = OO_2$, т.

$$NO \sim \text{дуга-са}, \quad PN \sim \text{дуга-са} \Rightarrow \angle PNO = \angle ONO_2 = \frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{1}{2} = \frac{OO_2}{ON} = \frac{\frac{h}{2}(k-1)}{kd}$$

$$\tan d = \frac{h(k-1)}{d(k-1)} = \frac{h}{d}$$

$$\frac{h}{d} = \tan d = \frac{2 \tan \frac{d}{2}}{1 - \tan^2 \frac{d}{2}} = \frac{h(k-1)}{kd - (1 - \frac{h^2}{k^2 d^2})} \Rightarrow \frac{k}{k-1} = \frac{4k^2 d^2}{4k^2 d^2 - h^2(k-1)^2} \Rightarrow$$

$$4k^2 d^2 - h^2(k-1)^2 = 4kd^2(k-1) \Rightarrow h^2(k-1)^2 = 4kd^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$h^2 = \frac{4kd^2}{(k-1)^2} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{h^2}{d^2} = \frac{4kd^2}{(k-1)^2 d^2} = \frac{4k}{(k-1)^2}$$

$$\alpha = \arctg \frac{2\sqrt{k}}{k-1}$$

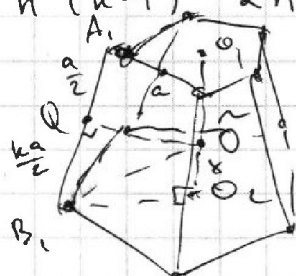
Знаем то, что $\exists$ шар, касающийся всех ребер, найдем коэф. подобия k :

покажем, что центр Ω лежит на $O_1 O_2$ (и на $O_1 O_2$), кас-ребра нижней грани — $\perp$ к O_1 и нижней грани), то Ω касается всех ребер нижней и верхней грани в их серединах.

$$\exists \text{ центр } \Omega = \tilde{O}; \quad \tilde{O} O_2 = x \Rightarrow \text{тогда касание}$$

$$\text{ребра нижней грани } n-n-g. \text{ тогда: } (h(k-1) - x)^2 + d^2 = x^2 + k^2 d^2 \Leftrightarrow h^2(k-1)^2 - 2h(k-1)x + d^2 = k^2 d^2$$

$$h^2(k-1) - 2h \cdot x = d^2(k+1) \Leftrightarrow x = \frac{h^2(k-1) - d^2(k+1)}{2h}$$



$\exists$ вершина ребра $a \Rightarrow$ итак $ka \Rightarrow$

точка кас. на основании ребра $A_1 B_1$:
 $QA_1 = \frac{a}{2}, QB_1 = \frac{ka}{2}$ и р-ва отрезков кас.

$$\cancel{QA_1^2 + KB_1^2 = KB_1^2 + QO_1^2}, \quad \cancel{QA_1^2 + KB_1^2 = KB_1^2 + QO_1^2}$$

$\exists$ в основании равнобедренный n -угольник



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\cos \alpha = \frac{11}{16}$
 $24^2 + 22^2 - 2 \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{11}{16}$
 $6^2 + 16^2 - 16^2 \cdot 2 \cdot \frac{11^2}{16^2} + 16^2$
 $\cos \alpha = \frac{11}{16}$
 $22 \cdot \frac{11^2}{16^2} = \frac{121}{2}$
 $264 \cdot \frac{11}{16}$
 $144 + 121 - 24 \cdot 11 \cdot \frac{11}{16}$
 $16 + 64 - 64 - 2 \cdot \frac{11^2}{16^2} + 64$
 $(21) = 24 \cdot 11 \cdot \frac{11}{16} - \frac{11^2}{2} = \frac{3 \cdot 11^2}{2} - \frac{11^2}{2} =$
 $= 11^2$

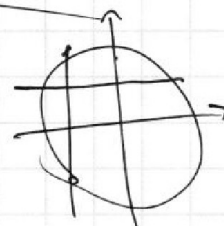
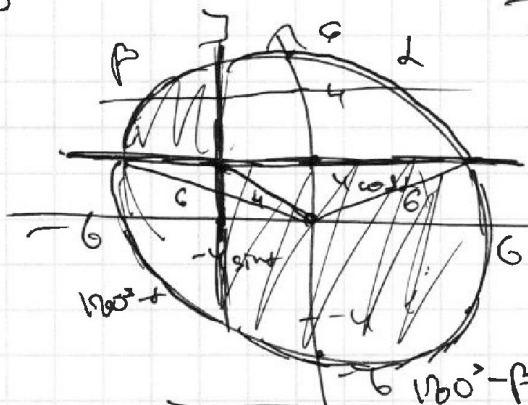
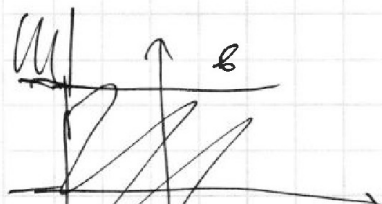
$249 - 128 - 121$
 $128 + 6 = 144$
 $\ell_2 = 2\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}$
 ℓ_1, ℓ_2
 $\ell_1 = \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$
 $\ell_1 = 2\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$
 $128 + 16 = 144$
 $64 = 2^6$
 $16 = 2^4$

$\varphi(\alpha) = (x; y):$

$(x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0$

$x^2 + y^2 \leq 36$

$(x + a)(y - b) \leq 0$



$-6 \leq -4 \leq 4 \cos \alpha \leq 4$ $4k^2d^2 - k^2(k-1)^2 = 4k^2d^2(k-1)$

$4k^2d^2 - 4kd^2(k-1) = k^2(k-1)^2 = 4kd^2 \Rightarrow k^2 \geq \frac{4kd^2}{(k-1)^2}$

$ky^2 = \frac{k^3}{d^2}$
 $2 \frac{4kd^2}{(k-1)^2d^2} =$
 $= \frac{4k}{(k-1)^2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \beta - \sin \alpha) \cdot \sin \beta = (\cos \beta \cos \alpha) \cdot \cos \beta$$

$$\sin^2 \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \beta \cos \alpha \cos \beta$$

$$-\cos 2\beta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$x^2 + d^2 = (k(k-1) \cdot x)^2 + k^2 d^2$$

$$\cos(\alpha + \beta) =$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = (1 \cdot \cos(\alpha + \beta))$$

$$(k-1) \cdot l =$$

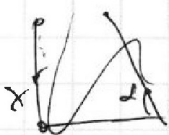
$$\frac{k+1}{2} \cdot \frac{l-k-1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$45 \text{ } 45$$

$$-\cos 2\beta =$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos 2\beta = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2\beta + 2\pi k \\ \alpha + \beta = \pi - 2\beta + 2\pi n \end{cases}$$



$$\alpha + 3\beta = 2\pi k$$

$$\alpha + 3\beta = (2n+1)\pi$$

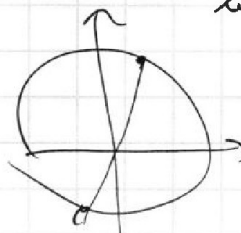
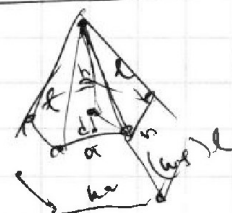
$$\alpha + 3\beta =$$

$$\arccos \frac{1}{2} - \arcsin \frac{1}{2} > \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2k}{d(k-1)} = \frac{2khd}{k^2d^2 - h^2}$$

$$2(k-1) \cdot l = a(k+1)$$

$$l = \frac{a}{2} \frac{k+1}{k-1}$$



$$\arccos \frac{1}{2} \text{ and } \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$60^\circ \quad 30^\circ$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos$$

$$80^\circ, 80^\circ \quad \cos 2\alpha =$$

$$\begin{aligned} & \frac{a^2(k+1)}{2} + k^2(k+1)^2 + \frac{a^2(k+1)^2}{4} \\ & x + kx - x = (k+1) \cdot l \\ & r = \frac{k+1}{k-1} \cdot l \\ & \sin \alpha = \frac{k+1}{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a \text{ given} \\ & (h) \quad (k-1) \cdot l^2 \cdot \left(\frac{k+1}{2}\right) \\ & (h-2) \quad (k^2 - k^2) \\ & \text{берем } \cos \alpha \\ & \frac{(h-2)}{(h)} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 6 \cdot 1111$$

W, 4-значная

$$x+y+z=0$$

$$x=-y-z$$

$$1111$$

$$8 \times 32$$

$$33$$

$$34$$

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

$$\frac{1111}{4} \mid 7$$

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y =$$

$$= (\cos \pi y + \cos \pi x) \cdot \cos \pi y$$

$$\pi y = \beta, \pi x = \alpha$$

$$(\sin \beta - \sin \alpha) \cdot \sin \beta =$$

$$= (\cos \beta + \cos \alpha) \cdot \cos \beta$$

$$1111 = \frac{10^4 - 1}{9} = \frac{(10^2 - 1)(10^2 + 1)}{9} = 11 \cdot 101$$

$$11 \cdot 101 \cdot d$$

$$C: 101$$

$$B: 101$$

$$B = 707$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy - ?$$

$$x \rightarrow x-4$$

$$y \rightarrow y+4$$

$$k = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$1. \boxed{x+y+3=0} \quad y = -x-3$$

$$x^3 + (x+3)^3 + 12x(x+3) =$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$9 \boxed{y+4=x}$$

$$x^3 + x^3 + 9x^2 + 27x + 27 + 12x^2 + 36x = 2x^3 + 21x^2 + 63x + 27$$

$$y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y = 64$$