



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- ✓ • 1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- 2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
- 3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

- ♦ 4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

задача 1
 $A, B, C \in \mathbb{N}$

$|K|$ - длина числа K в десятичной записи

$$|A| = 4 \quad \text{из един. цифр.}$$

$$|B| = 3 \quad \text{хотя бы одна цифра 7}$$

$$|C| = 2 \quad \text{хотя бы 1 цифра 1}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 11 \\ \hline 101 \\ 1010 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$A \cdot B \cdot C = R^2 \quad R \in \mathbb{N}$$

число f - это цифра, из которой составлено число A

$$A = 1111 \cdot f = 11 \cdot f \cdot 101$$

101 - простое (нельзя делить на d $2 \leq d \leq 10$)

$$f \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = R^2$$

в разложении C на простые множители должно быть 101

чтобы такое случилось, надо на 101 делить B (что невозможно) (если $C < 101$) или число B в разложении B должно быть 101

$$\text{значит } B = 101$$

или умножим 101 на число ≥ 10 , то получим ≥ 1010 (уже больше)

значит B может быть только 707 : $101; 202; 303; 404; 505; 606; 707; 808; 909$ (3х 101)

но условию подходит только 707

$$B = 707$$

$$(101)^2 \cdot f \cdot 11 \cdot 7 \cdot C = R^2$$

чтобы левая часть была квадратом, все простые числа должны быть в четной степени

$1 \leq f \leq 9$ и поэтому в разложении f точно не будет 11

значит в разложении C должно быть 11

таких двухзначных чисел: $11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99$

(если умножить на ≥ 10 то будет уже не два знака)

$$C = 11$$

$$(101)^2 \cdot (11)^2 \cdot f \cdot 7 = R^2$$

$$\text{тогда } f = 7 \cdot t^2, \quad t \in \mathbb{N}$$

с учетом $1 \leq f \leq 9$ подходит только $t = 1$

$$f = 7$$

$$\text{итого: } A = 7777; B = 707; C = 11$$

Ответ: подходит только одна тройка (A, B, C) это

$$(7777; 707; 11)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\begin{aligned} x > 0 \\ y > 0 \end{aligned}$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1^{y+4}}{x-4} + \frac{1^{x-4}}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$x \neq 4$
иначе правого
не существует

найти наименьшее значение $M = x^3 - y^3 - 12xy$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$(x+y+3)(x-4)(y+4) = (x+y+3) \cdot xy \quad (\because (x+y+3) \neq 0)$$

$$(x-4)(y+4) = xy$$

$$xy - 4y + 4x - 16 = xy$$

$$-4y + 4x = 16$$

$$x - y = 4$$

$$y = x - 4 > 0 \quad x > 4$$

$$\frac{2x-1}{x(x-4)} = \frac{2x-1}{(x-4)(x)}$$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &\stackrel{y}{=} x^3 - (x-4)^3 = x^3 - (x^3 - 12x^2 + 48x - 64) \\ &= x^3 + 12x^2 - 48x + 64 - x^3 = 12x^2 - 48x + 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy = \\ &= 4x^2 - 8xy + 4y^2 = 4(x^2 - 2xy + y^2) = 4(x-y)^2 = \\ &= 4 \cdot 4^2 = 4 \cdot 16 = 64 \end{aligned}$$

Ответ: наименьшее значение $M = 64$.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

a) $x, y \in \mathbb{R}$

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

замена $\pi x = \alpha$

$$\pi y = \beta$$

$$(\sin \beta - \sin \alpha) \sin \beta = (\cos \beta + \cos \alpha) \cos \beta$$

$$\sin^2 \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta$$

$$-\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta$$

$$-\cos(\alpha - \beta) = \cos 2\beta$$

$$\cos 2\beta + \cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{2\beta + (\alpha - \beta)}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\beta - (\alpha - \beta)}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\beta - \alpha}{2}\right) = 0 \quad (\text{все преобразования до этого равносильны})$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{3\beta - \alpha}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 3\beta - \alpha = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

подставим x, y :

$$\begin{cases} \pi y + \pi x = \pi + 2\pi k \\ 3\pi y - \pi x = \pi + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 + 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 3y - x = 1 + 2n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

т.к. все преобразования равносильны получим только одно множество x, y , но одно из чисел может быть любым

~~найдем~~ найдем 2 метода:

1 метод)

$$\begin{cases} y - \text{любое} \\ x = (1 - y) + 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2 метод:

$$\begin{cases} y - \text{любое} \\ x = (3y - 1) + 2n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} y - \text{любое} \\ x = (1 - y) + 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ y - \text{любое} \\ x = (3y - 1) + 2n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

8)

Заметим, что

$$\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{7} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{7}$$

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$-\arcsin \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\pi \quad (\cdot (-1))$$

$$\arcsin \frac{x}{7} + \arcsin \frac{y}{4} < \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{7} \leq \frac{\pi}{2} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{y}{4} \leq \frac{\pi}{2}$$



$$\arcsin \frac{x}{7} + \arcsin \frac{y}{4} \neq \pi$$



$$\begin{cases} \arcsin \frac{x}{7} \neq \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2} \end{cases} \begin{cases} \frac{x}{7} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq 1 \end{cases} \begin{cases} x \neq 7 \\ y \neq 4 \end{cases}$$

из всех пар не удовлетворяет этой неравенству только пара (7; 4)

Заметим что $|\frac{x}{7}| \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 7$

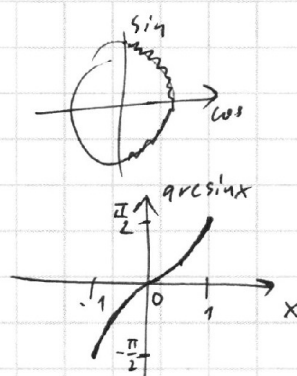
$$|\frac{y}{4}| \leq 1 \Leftrightarrow |y| \leq 4$$

переберем y и выпишем подходящие x:

y = -4	x ∈ {5; 7; 3; 1; -1; -3; -5; -7}
y = -3	x ∈ {4; 6; 2; 0; -2; -4; -6}
y = -2	x ∈ {3; 5; 7; 1; -1; -3; -5; -7}
y = -1	x ∈ {2; 4; 6; 0; -2; -4; -6}
y = 0	x ∈ {1; 3; 5; 7; -1; -3; -5; -7}
y = 1	x ∈ {0; 2; 4; 6; -2; -4; -6}
y = 2	x ∈ {-1; 1; 3; 5; 7; -3; -5; -7}
y = 3	x ∈ {-2; 0; 2; 4; 6; -4; -6}
y = 4	x ∈ {-3; -5; -7; -1; 1; 3; 5}

$$8 + 7 + 8 + 7 + 8 + 7 + 8 + 7 + 8 = (8+7) \cdot 4 + 4 = 67$$

Ответ: одновременно удовлетворяют ун. и пер. 67 четных пар (x, y)



$\arcsin t$ принимает значения $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

в начале выдано 4 билета

в конце выдано $4+t$ билетов

k - количество однократных билетов

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

($t > 0$) по условию
 ~~$\varphi > 4$~~ $\varphi > 4$; $t, \varphi \in \mathbb{N}$

количество способов выбрать 4 человека на билеты: C_k^4 ; из этих выбранных наборов может или не может получиться только 2 билета + 2 еще оставшихся из $k-2$

$$\frac{1}{p_1} = \frac{C_k^4}{C_{k-2}^2} = \frac{\frac{k!}{4!(k-4)!}}{\frac{(k-2)!}{2!(k-4)!}} = \frac{(k-2)! \cdot (k-1) \cdot k}{4! \cdot 2!}$$

$$\frac{1}{p_1} = \frac{\frac{(k-1)(k)}{4!}}{\frac{1}{2!}} = \frac{2! \cdot (k-1)(k)}{4!} = \frac{(k-1)k}{4 \cdot 3}$$

p_1 - вероятность что Петя и Васья одновременно оба попадут на концерт

$$p_1 = \frac{12}{(k-1)k}$$

количество способов выбрать $4+t$ человек на билеты $C_k^{4+t} = C_k^4$

из этих всех способов или не получится только 2 билета + 2 еще оставшихся из $k-2$

$$p_2 = \frac{C_{k-2}^{\varphi-2}}{C_k^{\varphi}} = \frac{\frac{(k-2)!}{(\varphi-2)!(k-\varphi)!}}{\frac{k!}{\varphi!(k-\varphi)!}} = \frac{(k-2)!}{\varphi \cdot (\varphi-1) \cdot (\varphi-2)!}$$

$$p_2 = \frac{1}{\frac{k \cdot (k-1)}{\varphi \cdot (\varphi-1)}} = \frac{\varphi \cdot (\varphi-1)}{k \cdot (k-1)}$$

по условию $11 \cdot p_1 = p_2$

$$\frac{11 \cdot 12}{(k-1)k} = \frac{\varphi(\varphi-1)}{k \cdot (k-1)} \quad ; \quad 11 \cdot 12 = \varphi(\varphi-1); \quad \varphi^2 - \varphi - 11 \cdot 12 = 0$$

$$\varphi = \frac{1+23}{2} = 12$$

$$\left[\begin{array}{l} \varphi = \frac{1+23}{2} = 12 \\ \varphi = \frac{1-23}{2} < 0 \text{ не подходит, т.к. } \varphi \in \mathbb{N} \end{array} \right] \Rightarrow \varphi = 12$$

Ответ: в конце вечера было выдано 12 билетов (то есть на 8 больше, чем в начале)

$$\begin{array}{r} \times 132 \\ 23 \\ \hline 168 \\ 529 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 132 \\ 13 \\ \hline 168 \\ 529 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 132 \\ 132 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$D = 1 + 4 \cdot 11 \cdot 12 = 529 = 23^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

матрица от углов на рис.

$OH \perp FH$ т.к. углы $x = A \parallel Oy$

проверим OF и OQ . Это будет $r/\delta \Delta$ ($OF = OQ = R$)

т.к. OH — высота Δ FOH и QOH , то по св. $r/\delta \Delta$ это еще и биссектриса

$$\angle FOH = \angle QOH$$

$$\text{т.к. } \angle DOH = 90^\circ = \angle GOH$$

$$\text{то } \angle QOG = \angle DOF$$

т.к. C_3 и C_2 можно выразить через центральные углы $\angle QOG$ и $\angle DOF$
 $C_2 = R \angle GOA$

$\rightarrow C_3 = R \angle DOF$ и эти углы равны, то $C_3 = R \angle DOF$

аналогично ΔKOS $C_4 = C_1$

или параллельные хорды DB и FQ означают равные дуги C_2 и C_3
 KS и WT означают равные дуги C_4 и C_1

$$\text{знаем } \alpha = \angle WOD = \angle WOD + C_4 + C_3$$

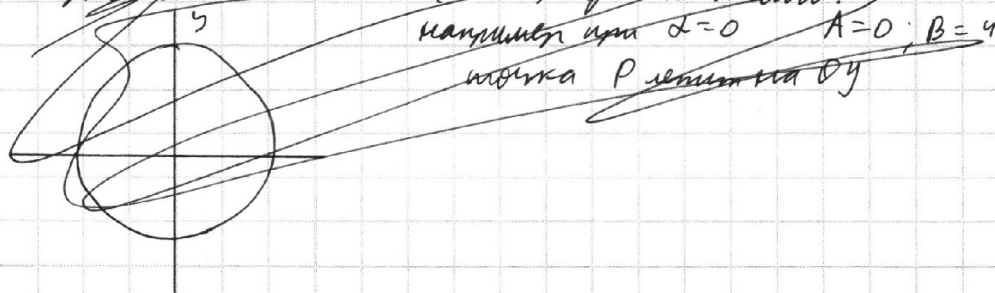
$$\begin{aligned} \alpha + \varphi &= \angle WOD + C_4 + C_3 = \angle WOD + C_2 + C_1 = \angle WOD + \angle GOT = \\ &= \frac{1}{2} (2\pi R) = \pi R \quad \alpha + \varphi \text{ это равно половине длины окружности} \\ \alpha + \varphi &= \pi R \end{aligned}$$

мы нигде не пользовались неравенствами т.Р., поэтому

$\varphi + \alpha = \pi R$ всегда (когда R — радиус круга, а R — радиус круга в задаче, почему давай)

$$M = a + b + c + d + \varphi + \alpha \leq \pi R + 4R$$

$\rightarrow$ значение $M = R(4 + \pi)$ верно только:





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

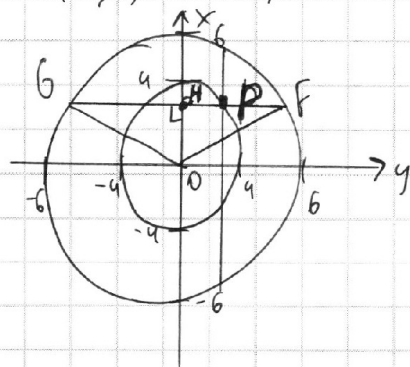
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A^2 + B^2 = 16(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 16 = 4^2$$

потому точка P коллинеарна с центром окружности
(0; 0) и R = 4



нам $\triangle GFO$:

$$OH = B$$

$$GO = R = 6$$

$$GH = \sqrt{6^2 - OH^2} = \sqrt{36 - B^2}$$

$$HF = \sqrt{36 - B^2}$$

$$a + c = 2\sqrt{36 - B^2}$$

аналогично

$$b + d = 2\sqrt{36 - A^2}$$

$$A^2 = \cancel{4 - B^2} 16 - B^2$$

$$= 2\sqrt{36 - (16 - B^2)} = 2\sqrt{20 + B^2}$$

$$a + b + c + d = 2\left(\sqrt{36 - B^2} + \sqrt{20 + B^2}\right) = f(B)$$

$$f'(B) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{36 - B^2}} \cdot (0 - 2B) + \frac{1}{2\sqrt{20 + B^2}} \cdot (0 + 2B) \right) =$$

$$= -\frac{2B}{\sqrt{36 - B^2}} + \frac{2B}{\sqrt{20 + B^2}} = 2B \left(\frac{1}{\sqrt{20}} \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

черновик

пары x, y :

$$\begin{cases} \pi y + \pi x = \pi + 2\pi k \\ 3\pi y - \pi x = \pi + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 + 2k, & k \in \mathbb{Z} \\ 3y - x = 1 + 2n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\arccos \frac{x}{4} - \arccos -\arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

тогда: т.к. области определения функций ограничена:

$$\left| \frac{x}{4} \right| \leq 1 \quad |x| \leq 4, \text{ и } x \text{ - целое есть 15 вариантов}$$

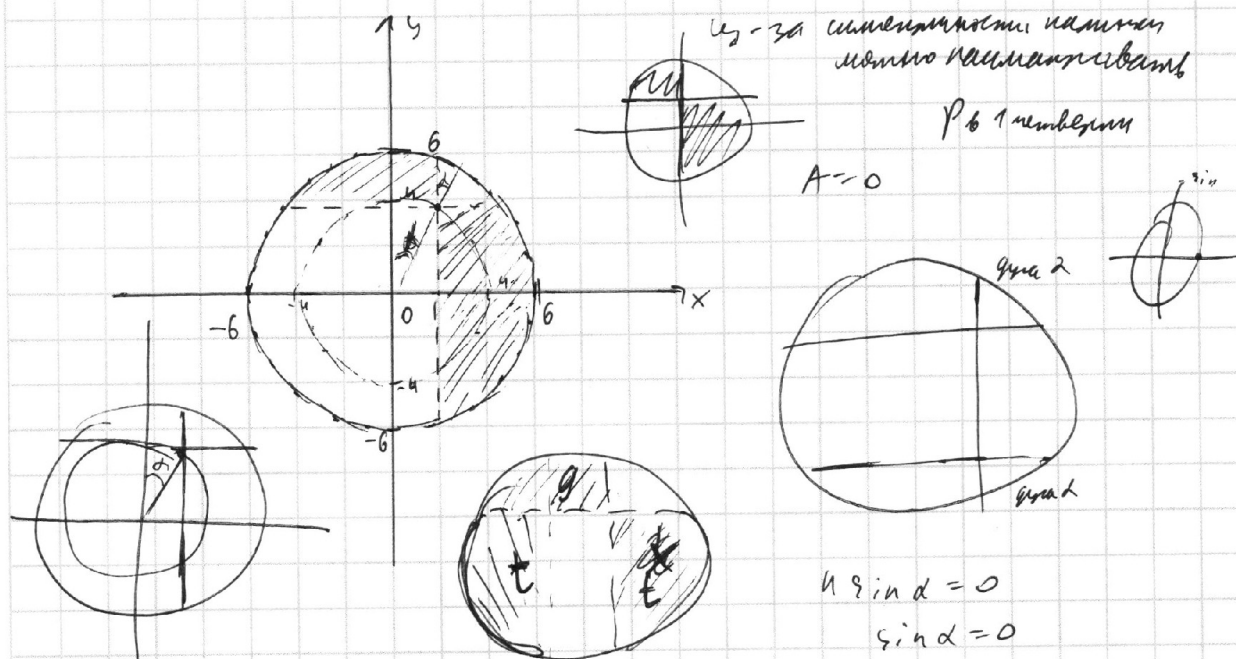
$$\left| \frac{y}{4} \right| \leq 1 \quad |y| \leq 4$$

1) y -любви
 $x = (1-y) + 2k$
 k - целое

2) y -любви
 $x = (3y-1) - 2n$
 n - целое

а) переберем y и запишем те x ы, которые y 0. $|x| \leq 4$

$$y = -4 \quad x = \{5; 7; 3; 1; 0; -1; -3; -5; -7\}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

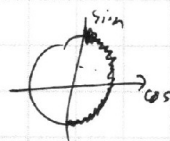
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

заменим то

$$\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$$

черновик



arccos

$$\arccos \frac{x}{z} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{z}$$

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{z} - \arcsin \frac{y}{z} > -\frac{\pi}{2}$$

$$-\arcsin \frac{x}{z} - \arcsin \frac{y}{z} > -\pi$$

$$\arcsin \frac{x}{z} + \arcsin \frac{y}{z} < \pi$$

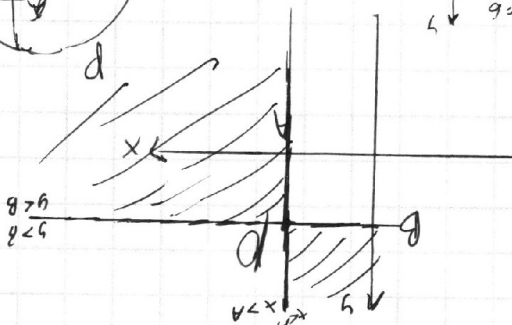
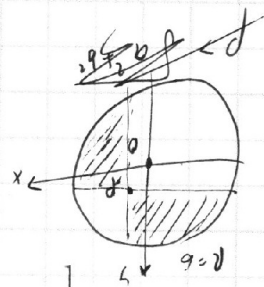
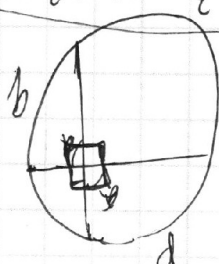
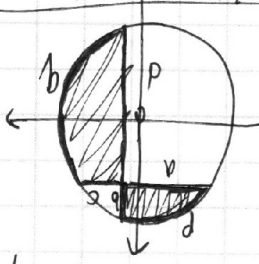
$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{z} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{y}{z} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{z} + \arcsin \frac{y}{z} \neq \pi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \arcsin \frac{x}{z} \neq \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{y}{z} \neq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{z} \neq 1 \\ \frac{y}{z} \neq 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x \neq z \\ y \neq z \end{array} \right\}$$

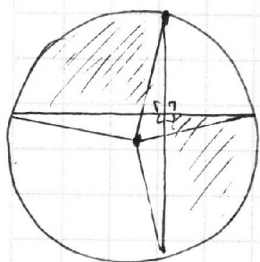
$$A^2 + B^2 = 16y^2 + 16x^2 - 4z^2 = 4z^2$$



$$\left\{ \begin{array}{l} (x-A)(y-B) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{array} \right.$$

$$A = -y \sin \alpha$$

$$B = x \cos \alpha$$



черновик

н.б.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos A + \cos B = 0$$

черновик

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \end{cases}$$

$$2\alpha = A + B$$

$$\alpha = \frac{A+B}{2}$$

$$2\beta = A - B$$

$$\beta = \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = 0$$

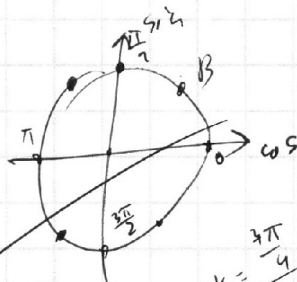
$$\begin{cases} A+B = 2\pi k \\ A-B = 2\pi k \end{cases}$$

$$A = B + 2\pi k$$

$$A = B + 2\pi k$$

одна и та же линия

$$\alpha + \beta - (\alpha - \beta) = 2\beta$$



$$\beta = +\frac{\pi}{4}$$

$$A = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k = \frac{7\pi}{4}$$

$$\frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} = 2\pi$$

$$\cos A + \cos B = 0$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

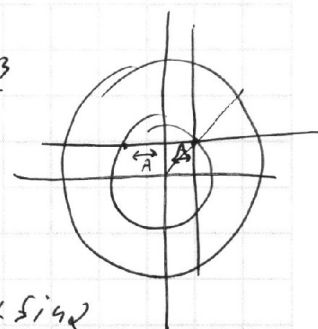
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = 0$$

$$\alpha = \frac{A+B}{2}$$

$$\beta = \frac{A-B}{2}$$



$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$

$$\begin{cases} A+B = 2\pi k & A+B = \pi + 2\pi k \\ A-B = 2\pi k & A-B = \pi + 2\pi k \end{cases}$$

$$8 + 7 = 15$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ + 4 \\ \hline 19 \end{array} \quad \begin{array}{r} 30 \\ \times 2 \\ \hline 60 \end{array}$$

$$3 \cdot (-4) - 1 = -13$$

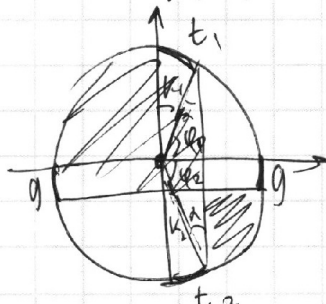
$$-9 - 1 = -10$$

$$-6 - 1 = -7$$

как вычислить длину на отрезке πR по числу?

известен радиус, от него зависит длина окружности и длина отрезка.

$$v_1 = v_2 \quad k_1 = k_2 \rightarrow t_1 = t_2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$x, y \in \mathbb{R}$$

черновик

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\pi x = \alpha$$

$$\pi y = \beta$$

$$(\sin \beta - \sin \alpha) \sin \beta = (\cos \beta + \cos \alpha) \cos \beta$$

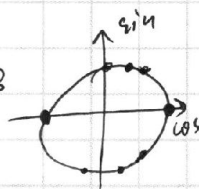
$$\sin^2 \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta$$

$$-\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \cos 2\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$



$$-\cos(\alpha - \beta) = \cos 2\beta = X$$

$$2\beta = \pm \arccos(X) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2\beta + \cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$2 \cdot \sin\left(\frac{2\beta + \alpha - \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\beta - (\alpha - \beta)}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\beta - \alpha}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{3\beta - \alpha}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\beta + \alpha}{2} = \pi k$$

$$\frac{3\beta - \alpha}{2} = \pi n$$

$$\beta + \alpha = 2\pi k$$

$$\cos\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3\beta - \alpha}{2}\right) = 0$$

$$\beta + \alpha = \pi + 2\pi k$$

$$3\beta - \alpha = \pi + 2\pi n$$

$$2 \cos\left(\frac{2\beta + \alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\beta - (\alpha - \beta)}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\beta - \alpha}{2}\right) = 0$$

1 вариант α -умень

$$\beta = (\pi - \alpha) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

2 вариант α -умень

$$3\beta = \pi + \alpha + 2\pi n$$

$$\beta = \frac{\pi + \alpha + 2\pi n}{3}$$