



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

26-3

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Число A представляется в таком виде

$$A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a = 101 \cdot 11 \cdot a, \text{ а - цифра.}$$

Так $A \cdot B \cdot C = x^2$ и число $A:101$ то $11 \cdot x^2:101$,

то есть $x^2:101^2$, т.к 101 - это простое,

если бы в разложении числа x на простые не оказалась 101 , то и в x^2 его тоже не будет тогда $x:101 \Rightarrow x^2:101$

Среди чисел A, B, C только B может делиться

на 101 , т.к $A = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 101^2 \Rightarrow 11 \cdot a \cdot 101$
 $0 < a \leq 9, a \cdot 101$
 $C \leq 99$, значит $C \leq 1 \cdot 101$, то есть $C \cdot 101$
 $101 \cdot 11$

Тогда $B:101$, если бы $B:101$, то $x^2:101^2$,

Тогда $B = 101 \cdot x, 0 \leq x \leq 9$, при $x \geq 10 \Rightarrow B > 101 \cdot 10 > 1010 > 999$
 но $B \leq 999$

Тогда B может быть только таким образом

$B = \overline{axax}$, где x - цифра, но B должно содержать 101
 семёрку, тогда $B = 707 = 7 \cdot 101$

Заметим, что $x^2:11^2$, т.к $A:11$, та же самая
 действия, что и с 101 .

Тогда что-то из A, B, C делится на 11 ; т.к

$$A:11^2 \Rightarrow A = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 11^2 \Rightarrow 101 \cdot a \cdot 11$$

$a \leq 9$
 $101 \cdot 11$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Также $B \nmid 11$, т.к. $B = 404 = 4 \cdot 101 \nmid 11$

Тогда $C \nmid 11 \Rightarrow C = \overline{y \cdot 11} \Rightarrow \overline{y5}$, но C должно
содержать a и 1 , тогда $\overline{y5} = 11 \Rightarrow C = 11$

Также $y \leq 9$, т.к. $C \leq 99$. Подходит 1 вариант!

Ответ: ~~A~~ Тогда $A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 404011 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 4a$.

То есть $11 \cdot (1111)^2 \cdot 4a = x^2$, тогда $4a$ — это тоже
квадрат $4a = \left(\frac{x}{1111}\right)^2$, но так как $a \leq 9$, то подходит
только один вариант $a = 4$, иначе в лев. члене
 $a \nmid 4$, то в нашем квадрате $4a$ ~~не~~, произведение
 $4a$ 4 содержится в нечетной степени.

Ответ: $A = 7777$

$B = 707$

$C = 11$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = k = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3xy}{xy} = \frac{x+y+3(x-4)(y+4)}{(x-4)(y+4)}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x-4 \neq 0 \\ y+4 \neq 0 \end{cases}$$

$$(x+y+3xy)(x-4)(y+4) = (x+y)xy + 3xy(x-4)(y+4)$$

$$(x+y)(x-4)(y+4) + 3xy(x-4)(y+4) = (x+y)xy + 3xy(x-4)(y+4)$$

$$(x+y)((x-4)(y+4) - xy) = 0$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ (x-4)(y+4) - xy = 0 \end{cases}$$

$$1) \quad x+y=0 \Rightarrow x=-y, \text{ если } x=$$

кто-то из них положительный, тогда другой имеет другой знак, но есть отриц., но по условию $x, y > 0$, (также $x \neq 0$ и $y \neq 0$)
Такой случай нам не подходит

$$2) \quad (x-4)(y+4) - xy = 0$$

$$x - 4y - 16 = 0 \Rightarrow x = y + 4$$

Подставим:

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy =$$

$$= (y+4-y)((y+4)^2 + (y+4)y + y^2) - 12y(y+4) =$$

$$= 4(3y^2 + 12y + 16) - 12y^2 - 48y = 12y^2 - 48y + 64 - 12y^2 - 48y = 64.$$

Ответ: $M = 64$. ~~только одно значение~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \alpha y - \sin \alpha x) \sin \alpha y = (\cos \alpha y + \cos \alpha x) \cos \alpha y$$

$$\sin^2 \alpha y - \sin \alpha x \cdot \sin \alpha y = \cos^2 \alpha y + \cos \alpha x \cdot \cos \alpha y$$

$$\sin^2 \alpha y - \cos^2 \alpha y = \cos \alpha x \cdot \cos \alpha y + \sin \alpha x \cdot \sin \alpha y$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha y - \cos^2 \alpha y &= \cos(\alpha x - \alpha y) \\ \cos(2\alpha y) &= \cos(\alpha x - \alpha y) \end{aligned}$$

$$\cos(2\alpha y) = \cos(\alpha x - \alpha y)$$

$$\begin{cases} \alpha - 2\alpha y = \alpha x - \alpha y \\ \alpha - 2\alpha y = -(\alpha x - \alpha y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2y = x - y \\ 1 - 2y = y - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = x + y \\ 1 = 3y - x \end{cases}$$

$$b) \arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{4}$$

~~$\frac{\pi}{4}$~~

$$1) \text{ Пусть } x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} 4 \geq x \geq -4 \\ 4 \geq 1 - x \geq -4 \\ 5 \geq x \geq -3 \end{cases} \Rightarrow x \in [-3, 5] \text{ также по условию } x \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} & \text{ОДЗ:} \\ & \begin{cases} 1 \geq \frac{x}{4} \geq -1 \\ 1 \geq \frac{y}{4} \geq -1 \\ 4 \geq x \geq -4 \\ 4 \geq y \geq -4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\arccos \frac{x}{4} + \frac{\pi}{2} = \arcsin \frac{x}{4}; \quad \arcsin \frac{x}{4} + \frac{\pi}{2} = \arccos \frac{x}{4}$$

$$\text{Пусть } \arccos \frac{x}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{4} \geq 0$$

$$\text{Тогда } \arcsin \frac{x}{4} - \arcsin \frac{1-x}{4} > 0$$

$$\text{Если } \arcsin \frac{1-x}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{4} \geq 0$$

$$\text{Если } \arcsin \frac{1-x}{4} > \frac{\pi}{2}, \text{ тогда } \arcsin \frac{x}{4} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{1-x}{4} > \frac{\pi}{2}, \text{ тогда } \arcsin \frac{x}{4} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{4} \geq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) ~~Ван~~ Тернер $(= 3y - x \Rightarrow x = 3y - 1$

$$\arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{3y-1}{4} + \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{4} > 0$$

Если $\arccos \frac{3y-1}{4} + \frac{\pi}{2} \leq 1) \arcsin \frac{3y-1}{4} < \frac{\pi}{2}$
2) $2\pi - \arcsin \frac{3y-1}{4}$

$$\arcsin \frac{3y-1}{4} - \arcsin \frac{y}{4} > 0$$

$$\frac{3y-1}{4} > \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{12y-4-4y}{28} > 0 \quad \frac{5y-4}{28} > 0$$

$$y > \frac{4}{5} = 0.8$$

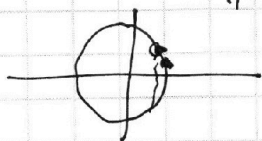
$$y \geq 2 \quad y \in \mathbb{Z}$$

Если $y=2$ то $x=5$

Если $y=3$ то $x=8$, но тогда $\arccos \frac{8}{4}$ - не существует

то есть $y \leq 3$ Проверим пару $(5, 2)$

$$\arccos \frac{5}{4} - \arcsin \frac{2}{4} > -\frac{\pi}{2}$$



возможно.

2) $2\pi - \arcsin$

Вектор $(x, y) = (1, 0) = (0, 1) = (1, 2)$

2) $2\pi - \arcsin \frac{3y-1}{4} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$

$2,5\pi - \arcsin \frac{3y-1}{4} - \arcsin \frac{y}{4}$

но $\arcsin x \leq \pi$, то все равно возможно.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $\arcsin \frac{x}{4} - \arcsin \frac{1-x}{4} \leq \pi - \pi \leq 0$

но $\arcsin \frac{x}{4} - \arcsin \frac{1-x}{4} > 0$ Противоречие

Тогда $\arcsin \frac{1-x}{4} \Rightarrow \arcsin \frac{1-x}{4} \leq \pi$; $\frac{1-x}{4} \geq 0$

Тогда $\arcsin \frac{x}{4} - \arcsin \frac{1-x}{4} > 0$

$\frac{x}{4} - \frac{1-x}{4} > 0 \Rightarrow \frac{4x - 4 + 4x}{8} > 0$

но $\frac{1-x}{4} \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$

То есть нужно

проверить
 $x = 1$

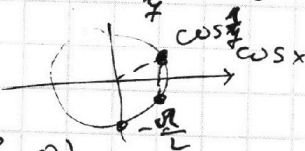
$11x - 4 > 0$

$x > \frac{4}{11}$, то есть

при $x \geq 1$
смысла нет

$\arccos \frac{1}{4} - \arcsin 0 = \arccos \frac{1}{4} - 0 \Rightarrow x > -\frac{\pi}{2}$

но а $\arccos \frac{1}{4} \geq 0$



То есть первое решение $(1, 0)$

Теперь пусть $\arccos \frac{x}{4} \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{4} \leq 0$

Тогда $\arccos \frac{x}{4} + \frac{\pi}{2} = \arcsin \frac{x}{4} \geq \pi$

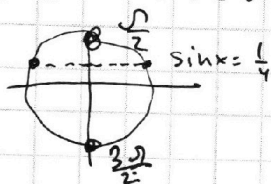
А $\arcsin \frac{x}{4}$ ему он меньше π но все равно не подходит $\Rightarrow \arcsin \frac{x}{4} \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{4} \geq 0$ но $\frac{x}{4} \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Проверим $x=0 \Rightarrow y=1$

$\arccos 0 - \arcsin \frac{1}{4} > -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi > \arcsin \frac{1}{4}$

но $\arcsin \frac{1}{4} < \pi$

Подходит $(x, y) = (0, 1)$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
(из 1)

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть ~~людей~~ y количество людей y
Пусть количество дополнительных билетов x

1) Первая вероятность, выпадения случайного разгара и билетов у людей C_y , порядок не важен

Посчитаем количество благоприятных исходов, это когда в четверке людей, получивших билет есть и Петя и Вася.

Давайте возьмем Петю и Васю и доберем к ним еще двух людей, тогда это будет наша четверка, получивших билет, то есть всего способов выбрать четверку людей, в которой будет Петя и Вася — это C_{y-2}^2 — это когда мы добираем людей до четверки.

Тогда первая вероятность

$$\frac{C_{y-2}^2}{C_y^4} = \frac{\frac{(y-2)!}{(y-4)! \cdot 2!}}{\frac{y!}{(y-4)! \cdot 4!}} = \frac{4 \cdot 3}{(y-1)y} = \frac{12}{(y-1)y}$$

2) Посчитаем тем же способом, что и в 1) вторую вероятность

Всего случаев — C_y^{4+x}

Всего благоприятных случаев C_{y-2}^{2+x}

Тогда по условию

$$\frac{12}{(y-1)y} \cdot 11 = \frac{C_{y-2}^{2+x}}{C_y^{4+x}} = \frac{\frac{(y-2)!}{(y-4-x)! \cdot (x+2)!}}{\frac{y!}{(y-4-x)! \cdot (4+x)!}} = \frac{(4+x)!}{(2+x)! \cdot y(y-1)}$$

$$\frac{132}{(y-1)y} = \frac{(x+4)(x+3)}{y(y-1)}$$

$$132 = (x+4)(x+3)$$

$$x^2 + 7x - 120 = 0$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = -15 \quad (x+15)(x-8) = 0$$

$$x \neq -15$$

$$x > 0, \text{ по условию}$$

$$\text{Таким образом } x = 8$$

Ответ: Тогда в конце месяца было выдано $4+8 = 12$ билетов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐

СТРАНИЦА

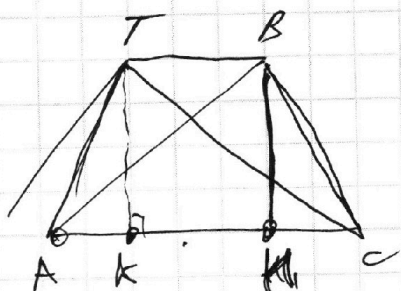
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тоги $\triangle ABC$ - это равнобедренный треугольник
мы знаем ее ~~выс~~ основание $AC = 22$, найдем

TB
мы знаем, что $\triangle PTB \sim \triangle APC$ и $k = \frac{1}{2}$
значит $TB = \frac{1}{2} AC = 11$

Рассмотрим треугольник $\triangle ABC$ и найдем высоту
из B на AC



$BK \perp AC, TK \perp AC$

$$AK = AC - KC$$

$TBK - \square$

$TB \parallel KH$

$BK \parallel KT$

$$\angle TKB = 90^\circ$$

$TBK - \square$

Также $\triangle TKA = \triangle BKC$ т.к.

$$\angle BKC = 90^\circ = \angle TKA$$

$$BK = TK$$

$$AT = BC$$

$\triangle TKA$
 $\triangle BKC$

$\Downarrow$

$$AK = KC$$

$$AC = AK + KC = 2KC + TB$$

$$AK = AC - KC = AC - \frac{AC - TB}{2} = 22 - \frac{22 - TB}{2} = \frac{22 + TB}{2}$$

$\triangle ABK, \angle AKB = 90^\circ \Rightarrow$ по теореме Пифагора

$$KB^2 = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{24^2 - \left(\frac{22 + TB}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{81 \cdot 16}{4}} = \frac{9 \cdot 4}{2} = 18$$

$$\text{Тогда } S_{ABC} = \frac{BK \cdot AC}{2} = \frac{18 \cdot 22}{2} = 18 \cdot 11 = \underline{\underline{198}}$$

Ответ: $S_{ABC} = 198$



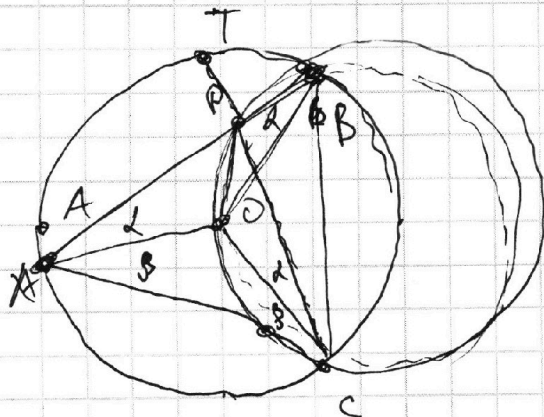
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle BOA = \alpha$

$\angle BAO = \alpha$

$\angle OAC = \beta$

Тогда $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha + 2\beta$

т.к. центральный угол

$\triangle AOC$ р/б т.к. $AO = OC = R$

$\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA = \beta$

$\triangle AOB$ р/б т.к. $AO = OB = R$

$\angle ABO = \angle OAB = \alpha$

$\angle PBO = \angle PCO$, т.к. они опираются на одну дугу

$\angle PAC = \alpha + \beta = \angle ACO + \angle OCP = \angle ACP$

$\angle PAC = \angle ACP \Rightarrow \triangle APC$ - р/б $\Rightarrow AP = PC = PB$

Продлим PC до пересечения с окружностью

$PC \cap \omega = T$, по свойству пересекающихся хорд

$PC \cdot PT = PA \cdot PB \Rightarrow \frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PT} \Rightarrow PB = PT$

То есть $TC = PT = PC = PA + PB = AB$

$TC = AB \Rightarrow ATBC$ - равнобедренная трапеция

т.к. ~~это~~ ~~трапеция~~ вписана в окружность

т.к. $TP = PB$
 $PA = PC$
 $\angle TPA = \angle BPC$ } $\angle ATP = \angle PBC$
 $AT = BC$

Также $AT = PB$ $\angle TPB = \angle APC$ } $\triangle TPB \sim \triangle APC$
 $\frac{1}{2} = \frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PC}$ } $\angle BTC = \angle TCA$
 $BT \parallel AC$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Найдем } \max \sqrt{6^2 - 16 \cos^2 \alpha} + \sqrt{20 + 16 \cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = t \geq 0$$

$$t \leq 1$$

$$f(t) = \sqrt{6^2 - 16t} + \sqrt{20 + 16t} \geq 0$$

$$f^2(t) = 6^2 + 20 - (16t + 16t) + 2\sqrt{(6^2 - 16t)(20 + 16t)}$$

$$f^2(t) = 56 + 2\sqrt{(36 - 16t)(20 + 16t)} \geq 0$$

максимум этой функции достигается, когда
максимально

$$g(t) = \sqrt{(36 - 16t)(20 + 16t)} \quad (36 - 16t)(20 + 16t) \text{ вниз,}$$

значит максимум в вершине

$$t_{\text{верш}} = \frac{\left(\frac{9}{4} - \frac{5}{4}\right)}{2} = \frac{1}{2} \geq 0 \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ соблюдает}$$

$$\text{Тогда } P(\varphi(\alpha))_{\max} = 6\pi + 2\left(\sqrt{6^2 - 16 \cos^2 \alpha} + \sqrt{20 + 16 \cos^2 \alpha}\right) =$$

$$= 6\pi + 2\sqrt{36 - 8} + 2\sqrt{28} = 6\pi + 4\sqrt{28} = 6\pi + 8\sqrt{7}$$

$$\cos^2 \alpha = t = \frac{1}{2}$$

$$\text{и это достигается при } \cos^2 \alpha = t = \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n; \quad -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ по рисунку это так, но от этого
ничего не зависит, мы также строим прямые,
просто четверти могут быть другие, но они
обязательно противоположные (1 и 3 либо 2 и 4)

$$\text{Ответ: } P(\varphi(\alpha)) = 6\pi + 8\sqrt{7}; \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n; \quad -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение

$$P(\varphi(\alpha)) = AB + CD + \overset{\text{длина дуг}}{\sphericalangle} AC + \sphericalangle BD = AB + CD + 6\pi.$$

То есть периметр зависит от значений $AB + CD$, а они зависят от α . ~~Рассчитаем AB~~ . Заметим, что

AB и CD пересек $y = 4\cos\alpha$ и $x = 4\sin\alpha$ пересекают окружность как хорды в двух точках, так как $|4\cos\alpha| \leq 4$ и $|4\sin\alpha| \leq 4$.

Также эти две хорды пересекаются в нашей окружности с $R = 6$, т.к. их точка пересечения это $T(4\cos\alpha, 4\sin\alpha)$, подставим в уравн. нашей окружности $4^2\cos^2\alpha + 4^2\sin^2\alpha \leq 6^2$
 $16 \leq 6^2$.

Посчитаем AB , в $\triangle ABO$ он равнобедренный $OA = OB = R$, также OM высота, т.к. $OC \perp AB$
 $M = AB \cap OC$, $M \in [O, 4\cos\alpha]$
Значит OM - это и медиана и $\angle OMB = 90^\circ$

$$\text{в } \triangle OMB, \angle OMB = 90^\circ \Rightarrow \frac{1}{2}AB = MB = \sqrt{6^2 - 16\cos^2\alpha}$$

$$MB^2 = OB^2 - OM^2, OM = |4\cos\alpha|$$

$$AB = 2\sqrt{6^2 - 16\cos^2\alpha}$$

Таким же действием найдем CD .

$$CD = 2\sqrt{6^2 - 16\sin^2\alpha} = 2\sqrt{6^2 - 16(1 - \cos^2\alpha)} = 2\sqrt{20 + 16\cos^2\alpha}$$

$$P(\varphi(\alpha)) = 6\pi + 2(\sqrt{6^2 - 16\cos^2\alpha} + \sqrt{20 + 16\cos^2\alpha})$$

Чтобы найти максимум этой функции нам нужно чтобы вторая часть была максимальной, т.к. 6π - это константа.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

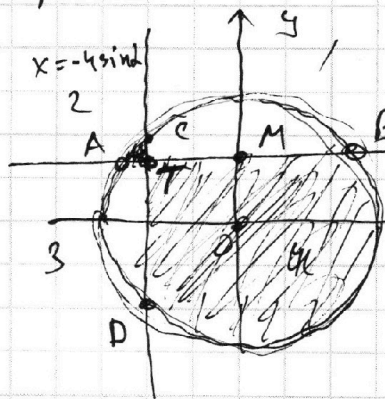
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Построим графики в осях x, y ,
и отметим отнимая прямые $x = -4\sin\alpha$ и $y = 4\cos\alpha$
и зафиксируем.

$x^2 + y^2 \leq 36$ - это все точки лежащие внутри окружности
у которой центр $O(0,0)$ и радиусом $R = 6$

Построим $O(0,0)$ $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (тогда синус и косинус неотрицательны)



$$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 6^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 4\sin\alpha \geq 0 \\ y - 4\cos\alpha \leq 0 \end{cases} \quad \text{это 1 четверть} \\ \begin{cases} x + 4\sin\alpha \leq 0 \\ y - 4\cos\alpha \geq 0 \end{cases} \quad \text{это 2 четверть}$$

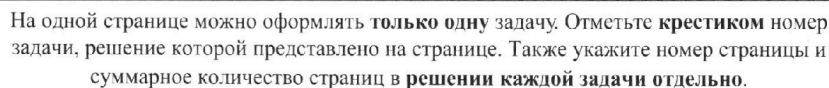
то есть решение этой системы будет заштрихованная фигура

$$\begin{aligned} \text{Сумма дуг } \angle AC + \angle BD &= \angle CBA + \angle BCD = \\ &= 2(\angle CBA + \angle BCD) = 2 \cdot 2 \cdot (180^\circ - \angle CDB) = 180^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= CD \cap AB, \text{ прямая } CD \parallel \text{оси } y \\ AB \parallel \text{оси } x &\} \begin{aligned} &CD \perp AB \\ &\angle CDB = 90^\circ \end{aligned} \end{aligned}$$

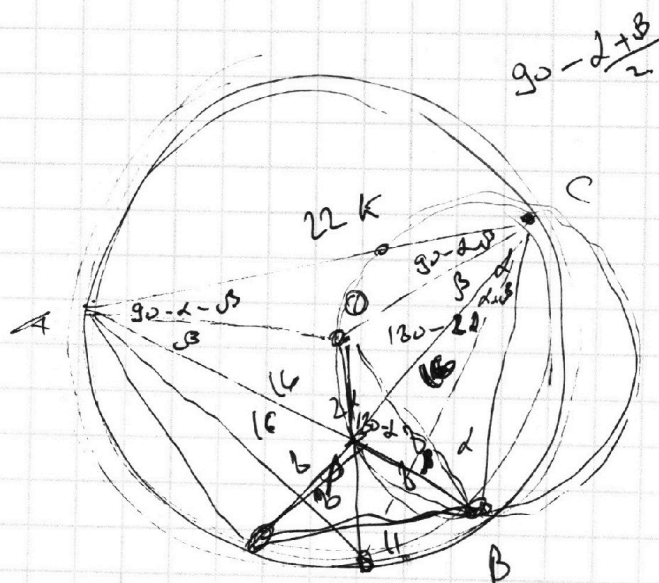
Тогда сумма дуг дуг $\angle AC + \angle BD$, если их градусная мера 180° , то это половина дуги всей окружности т.к. градусная мера всей окружности 360° . То есть $\angle AC + \angle BD = \frac{2\pi R}{2} = 6\pi$

она никак не зависит от α .



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~180-d-B~~

2-3

$$AP \cdot PB = (R + OP)(R - OP)$$

$$16.8 = \mathbb{R}^2 - \mathbb{CP}^2$$

$$\frac{OP}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{CB}{\sin 2\alpha}$$

$$R^2 - \frac{R^2}{\sin^2 \alpha} \cdot \sin^2 \beta$$

$$R^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin 2\alpha} \right)$$

$$\frac{CB}{\cos \alpha} = 2R$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin \beta \times d}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{\sin \beta \times d}{\cos \beta}$$

$$\frac{23}{24} = \sin \alpha + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \frac{\cos \beta \cdot \sin \alpha + \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \beta}$$

$$\frac{C_B}{C_{O2}} = 2R.$$

$$\frac{\sin B}{\sin A}$$

~~$$X \cdot \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha$$~~

$$\frac{22}{24 \sin \beta} = \frac{\sin 2}{\sin \beta} + \frac{\cos 2}{\cos \beta}$$

$$\frac{\cancel{\sin \alpha}}{\cancel{\sin \alpha}} = \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{PC}{\sin \beta + \alpha}$$

$$\frac{48^2 - 33^2}{2} = \frac{31 \cdot 16}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

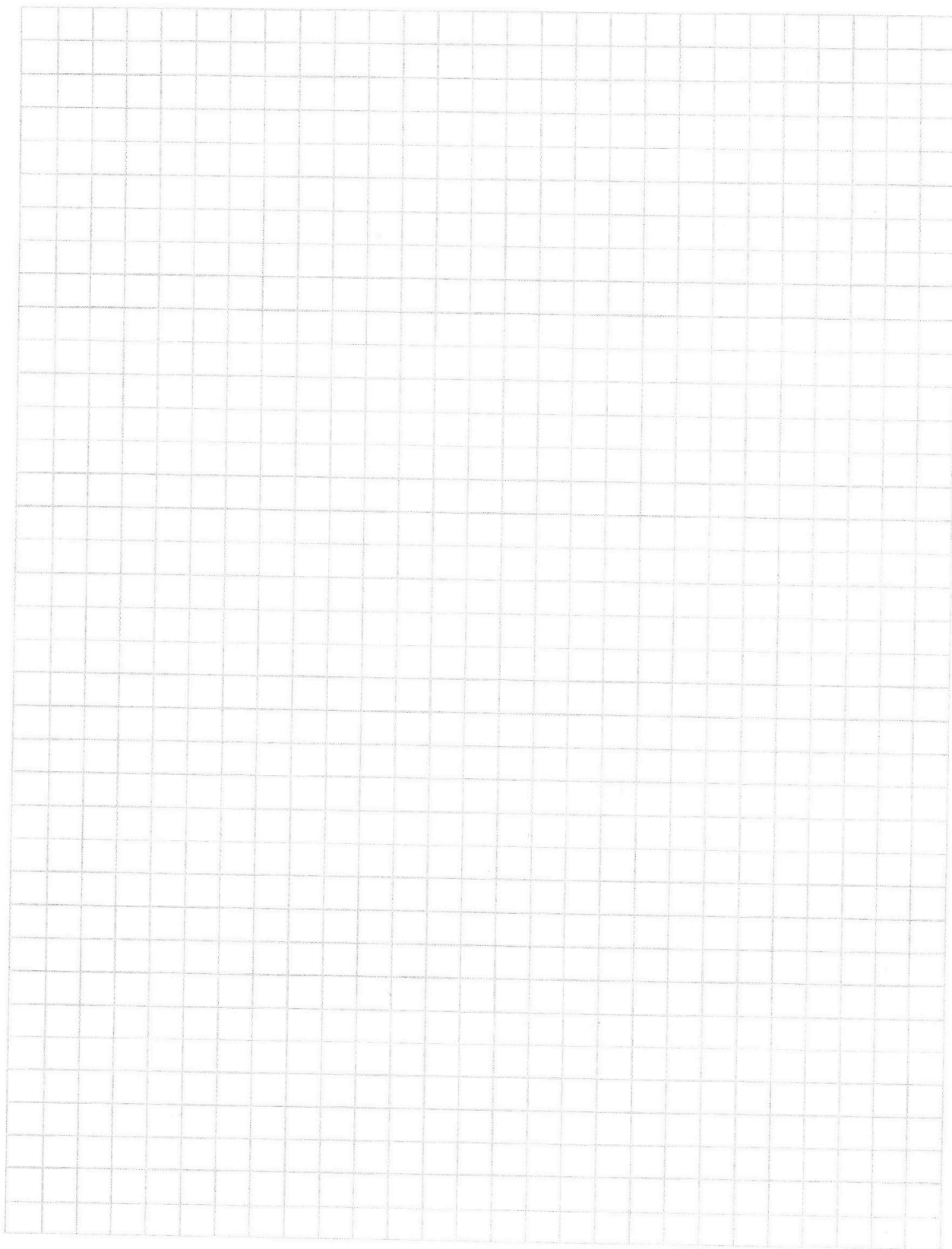
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

н3.

$$(\sin \alpha y - \sin \alpha x) \sin \alpha y = (\cos \alpha y + \cos \alpha x) \cos \alpha y$$

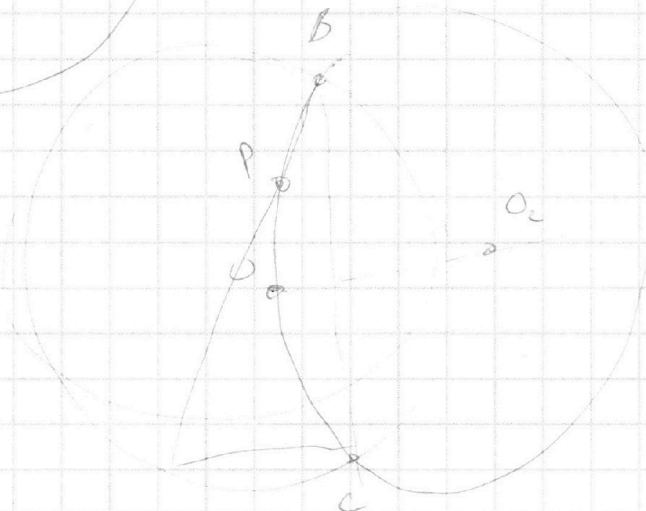
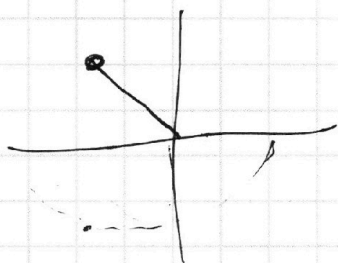
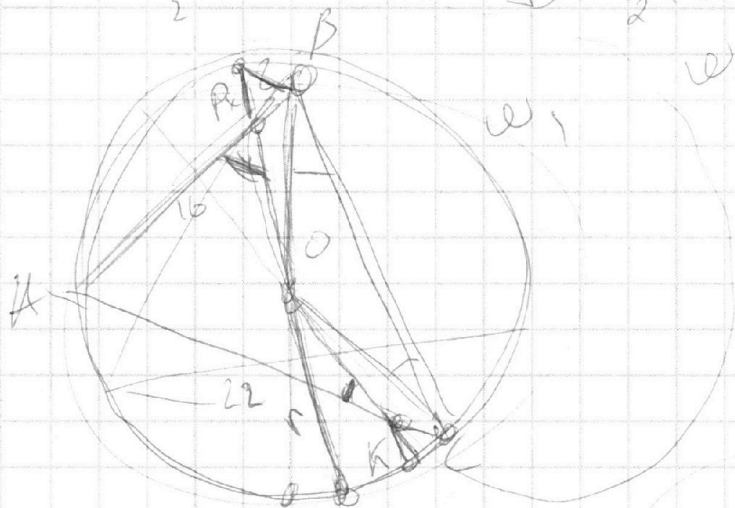
$$0 = \sin \alpha x \cdot \sin \alpha y + 2 \cos^2 \alpha y - 1 + \cos \alpha x \cdot \cos \alpha y$$

$$\cos(2\alpha(x-y)) + 2 \cos^2 \alpha y - \sin^2 \alpha y$$

$$\cos(2\alpha(x-y)) = \cos(60^\circ)$$

$$3+3+2+4+6$$

$$\frac{1}{2} (\sin^2 \alpha x + \sin^2 \alpha y) + \frac{1}{2} (\cos^2 \alpha y - \sin^2 \alpha x)$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111 \cdot x = 11 \cdot 101 \cdot x =$$

$$B = \overline{abc} : 101$$

$$C = \overline{11}, \overline{11} : 11$$

4444

404.

11

1 2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x(x-4)} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x} + \frac{3}{x(x-4)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3xy}{xy} = \frac{x+y+3(x-4)(y+4)}{(x-4)(y+4)} = \frac{x+y+3xy-4y+4x-16}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3xy}{xy} = \frac{3xy-4y+4x-16}{(x-4)(y+4)}$$

$$3x^2y^2 - 12xy(y-x) - 48xy + xy^2 - 4y^2 + 4xy - 16y$$

$$+ x^2y - 4yx + 4x^2 - 16x = 3x^2y^2 - 12y^2x + 14x^2y - 42xy$$

$$4x^2 - 4y^2 - 16y - 16x = 0$$

$$(x-y)(x+y) - 4(xy) = 0$$

$$(x+y)(x-y-4) = 0$$

$$x = y+4 \quad y = x-4$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) = (x^2 + x(x-4) + (x-4)^2)$$

$$4(3x^2 - 12x + 16) - 12x^2 + 46x - 4x^2 + 16 = 64$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

у -

$$\frac{C_{y-2}^2 - 1}{C_y} \cdot 11 =$$

$$\frac{C_{y-2}^{2+x}}{C_y^{4+x}}$$

~~ABCD~~

~~C~~

$$12 \cdot \frac{(y-2)(y-3) \cdot 11}{2(y-1)(y)(y-2)(y-3)}$$

$$132 = \frac{(4+x)! (y-x-4)! (y-2)!}{(2+x)! y! (y-2-2-x)!} = \frac{x2(x+3)(x+4)}{y(y-1)}$$

$$\frac{132}{(y-1)y} = \frac{(4+x)! (y-x-4)! (y-2)!}{(2+x)! y! (y-2-2-x)!} = \frac{x2(x+3)(x+4)}{y(y-1)}$$

$$x^2 + 4x - 120 = 0$$

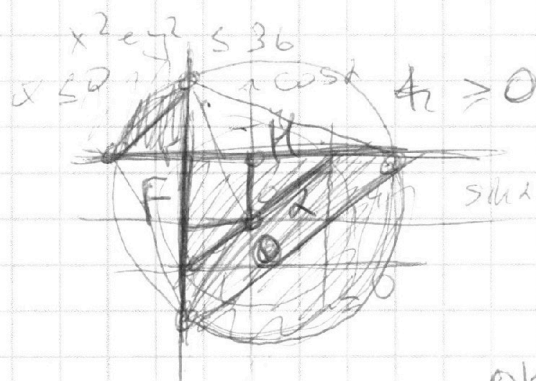
15 224

$$D = 49 + 4 \cdot 120 = 529 = 23^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{23^2}}{2}$$

$$\frac{-4 \pm 23}{2} \rightarrow (8)$$

$$(x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0$$



$$OK = 4 \cos \alpha$$

$$OF = 4 \sin \alpha$$

$$2P = \frac{2\sqrt{6^2 - 16 \cos^2 \alpha}}{2\sqrt{6^2 - 16 \sin^2 \alpha}}$$

$$\left(\sqrt{6^2 - (4 \cos \alpha)^2} + \sqrt{6^2 - (4 \sin \alpha)^2} \right)^2$$

$$42 = 4 + 2\sqrt{(6^2 - 16x^2)(6^2 - 16(1-x^2))}$$

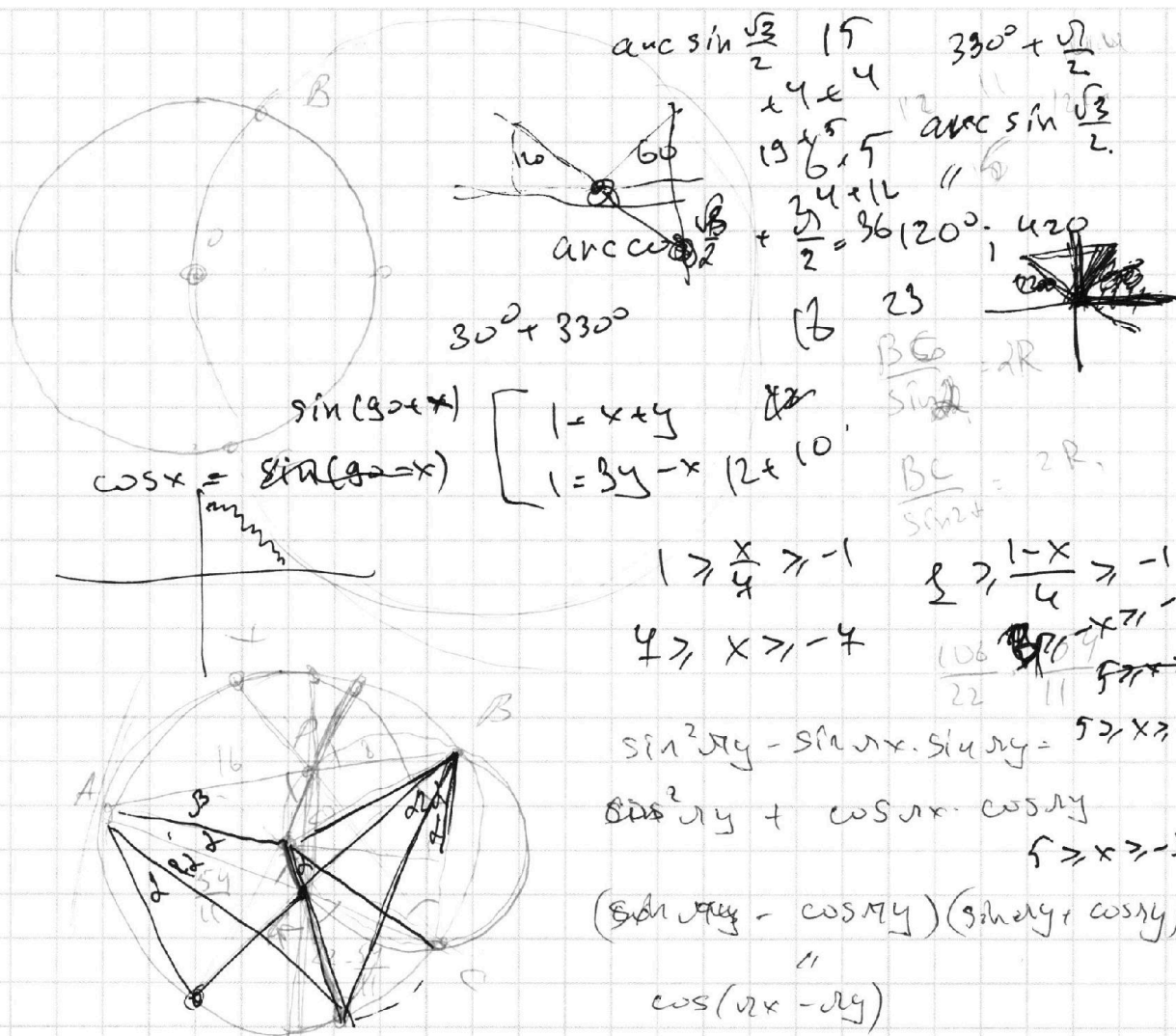


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \alpha + \cos \alpha =$$

$$\sin x + \cos x$$

$$1) \arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{1-x}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$t_1 = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

$$t_2 = -\frac{20}{16} = -\frac{5}{4}$$

$$\cos^2 \alpha = \cos(\alpha - \alpha)$$

$$\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha = 5 \geq x \geq -3$$

$$\cos^2 \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$5 \geq x \geq -3$$

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$\cos(\alpha - \alpha)$$

$$1 \geq \frac{x}{4} \geq -1$$

$$4 \geq x \geq -4$$

$$1 \geq \frac{1-x}{4} \geq -1$$

$$4 \geq 1-x \geq -4$$

$$3 \geq -x \geq -5$$

$$-3 \leq x \leq 5$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = 15$$

$$330^\circ + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = 115$$

$$360^\circ - 120^\circ = 420$$

$$30^\circ + 330^\circ$$

$$\sin(90^\circ - x)$$

$$\cos x = \sin(90^\circ - x)$$

$$\begin{cases} 1 = x + y \\ 1 = 3y - x \end{cases} \quad (2 \times 10)$$

$$\frac{BC}{\sin 2\alpha} = 2R$$