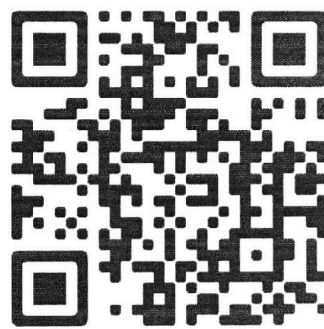




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Пусть $A = \overline{aaaa}$, $B = \overline{b_1b_2b_3}$, $C = \overline{c_1c_2}$.

Заметим, что $A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111$, а $1111 : 11 \equiv 0$

Т.к. ABC - квадрат, то на 101 ^(101-простое) должен делиться кто-то еще, причем это не A и не C ($11a < 101$ и $C < 101$) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow B : 101$.

Заметим, что трехзначные числа делящиеся на 101 имеют вид $\overline{x0x} = 101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909$. Но ровно одно содержит в себе 2 $\Rightarrow B = 202 = 2 \cdot 101$.

Заметим, что $A : 11$. Аналогично, т.к. ABC полный квадрат, на 11 должен делиться кто-то еще, но $A \not\equiv 11^2$, $B \not\equiv 11 \Rightarrow C : 11$. Двухзначные числа, делящиеся на 11 следующие: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, также ровно одно содержит в себе 3 $\Rightarrow C = 33$.

Получаем: $A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 6 \cdot a$,

т.к. ABC - квадрат $\Rightarrow 6a$ тоже квадрат, но если

a - цифра, то подходит только $a = 6$, получаем



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

след. ответ: $A = 6666$, $B = 202$, $C = 33$,

$$ABC = 6^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2$$

Ответ: $(6666 ; 202 ; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$$

$$\begin{aligned} \text{По условию: } K &= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x-1+y+1+\cancel{2}}{(x-1)(y+1)} = \\ &= \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{xy} \quad (x+y \neq -2) \Rightarrow xy = (x-1)(y+1) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow xy = xy - y + x - 1 \Rightarrow \boxed{x = y + 1}$$

Тогда подставим в M:

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = \\ &= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = \boxed{1} \end{aligned}$$

Приведем пример, когда $M=1$ достигается:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{2}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2}, \text{ и}$$

$$M = 2^3 - 1^3 - 3 \cdot 2 = 8 - 1 - 6 = \boxed{1}$$

Ответ: 1.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~8) $(x; (2k+1)x)$, $x, k \in \mathbb{Z}$, кроме $(5; -4)$.~~

Теперь отберем решения $(x; (2k+1)x)$ по ОДЗ:

$$\frac{x}{5} \in [-1; 1] \text{ и } \frac{y}{4} \in [-1; 1]$$

$$\frac{x}{5} \in [-1; 1] \Rightarrow \begin{cases} x \in [-5; 5] \\ y \in [-4; 4] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ y \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \end{cases}$$

Подходит пара разной четности кроме $(5; -4)$.

y может принимать 5 четных значений и 4 нечетных.

x может принимать 5 четных значений и 6 нечетных.

Тогда всего вариантов: $5 \cdot 6 + 5 \cdot 4 - 1 =$

$$= 30 + 20 - 1 = \boxed{49}$$

Ответ: а) $(x; (2k+1)x)$, $k \in \mathbb{Z}$; $(x; (2k+1)+x)$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) 49.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$a). (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

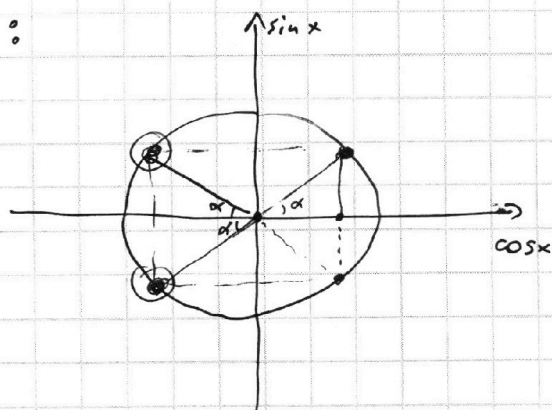
$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = -(\cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y)$$

$$\cos 2\pi x = -\cos(\pi x + \pi y)$$

$$\cos 2\pi x = \cos(\pi - \pi x - \pi y) \quad (-\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha))$$

Тогда :



$$\begin{cases} 2\pi x = \pi - \pi x - \pi y + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = -(\pi - \pi x - \pi y) + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\pi x = -(\pi - \pi x - \pi y) + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 1 - x - y + 2k, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -1 + x + y + 2k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = -1 + x + y + 2k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 1 + 2k, & k \in \mathbb{Z} \\ x - y = -1 + 2k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = (2k+1) - 3x, & k \in \mathbb{Z} \\ y = (2m+1) + x, & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда подходят пары $(x; (2k+1)-3x)$, $k \in \mathbb{Z}$ и $(x; (2k+1)+x)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$8). \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

Т.к. x и y — целые, то решения вида $(x; (2k+1)-3x)$ содержатся в $(x; (2k+1)+x)$,

т.е. либо x — четное, y — нег., либо x — нег., y — чет.

Заметим, что $\arcsin a \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ и $\arccos b \in [0; \pi]$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \arcsin a + \arccos b \leq \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}, \text{ при}$$

всех допустимых a и b .

Значит, нам надо просто исключить случай

$$\text{равенства, то есть } \begin{cases} \frac{x}{5} = 1 \\ \frac{y}{4} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -4 \end{cases}$$

Тогда подходят все решения $(x; (2k+1)+x)$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}$,

кроме решения $(5; -4)$.

~~Ответ: а) $(x; (2k+1)-3x)$, $k \in \mathbb{Z}$, $(x; (2k+1)+x)$, $k \in \mathbb{Z}$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow (x+9)(x-2)=0, \text{ т.к. } x>0 \Rightarrow \boxed{x=2},$$

$$\text{итого билетов стало } x+4=2+4=\boxed{6}.$$

Ответ: 6 билетов.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

Пусть T - кол-во одинадцатиклассников, x - количество билетов, которое прибавилось.

Посчитаем первоначальную вероятность. Всего способов раздать билеты C_T^4 , а раздать билеты, где два билета у Пети и Васи, столько же сколько раздать 2 билета на $(T-2)$ человека, то есть C_{T-2}^2 , тогда искомая вероятность:

$$P_1 = \frac{C_{T-2}^2}{C_T^4} = \frac{\frac{(T-2)!}{2!(T-4)!}}{\frac{T!}{4!(T-4)!}} = \frac{3 \cdot 4}{T \cdot (T-1)}$$

Посчитаем, аналогично вторую вероятность. Всего способов раздать билеты C_T^{x+4} , а благоприятных способов C_{T-2}^{x+2} , игоа вероятность будет след.:

$$P_2 = \frac{C_{T-2}^{x+2}}{C_T^{x+4}} = \frac{\frac{(T-2)!}{(x+2)!(T-x-4)!}}{\frac{T!}{(x+4)!(T-x-4)!}} = \frac{(x+4)(x+3)}{T(T-1)}$$

По условию имеем: $2,5 \cdot P_1 = P_2$

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{12}{T(T-1)} = \frac{(x+4)(x+3)}{T(T-1)} \Rightarrow 30 = (x+4)(x+3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30 = x^2 + 7x + 12 \Rightarrow x^2 + 7x - 18 = 0 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) В $\triangle APM$ т. Пифагора: $AP^2 = AM^2 + PM^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + PM^2 \Rightarrow PM = \sqrt{\frac{225-81}{4}} = \frac{12}{2} = 6.$$

5) $\sin \alpha = \frac{PM}{AP} = \frac{6}{\frac{15}{2}} = \frac{12}{15}.$

6) $S_{APC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right) \cdot 9 \cdot \frac{12}{15} =$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{2} \cdot 9 \cdot \frac{12}{15} = \boxed{45}$

Ответ: 45.



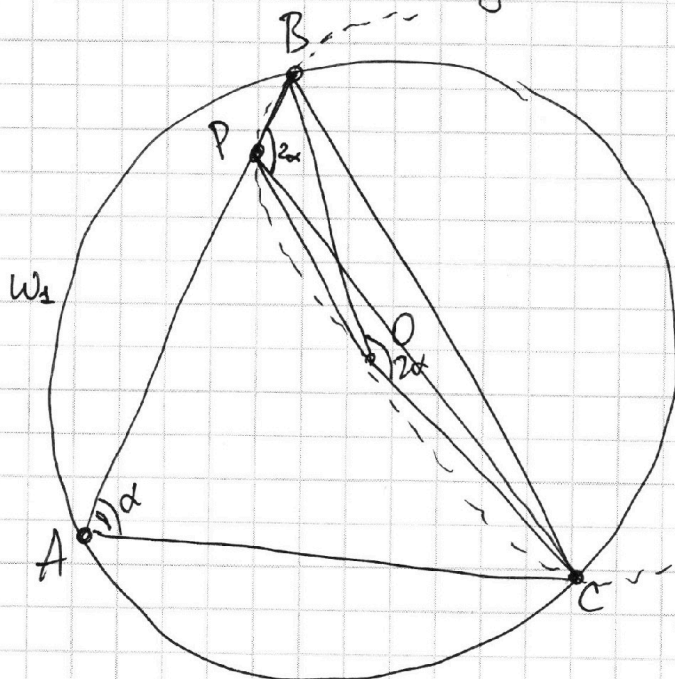
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.



1). $\angle BPC$ - впис. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BOC = \angle BPC,$$

$$\text{но } \angle BOC = 2\angle BAC \Rightarrow$$

(т.к. центральный
угол в два раза

больше вписанного,
опир. на одну дугу).

$$\Rightarrow (\angle BAC = \alpha) \angle BOC = 2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BPC = 2\alpha.$$

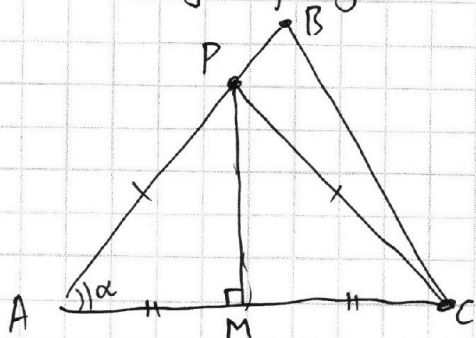
2). $\angle BPC$ - является ~~свойством~~ внешним к $\triangle APC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BPC = \angle PAC + \angle PCA \Rightarrow 2\alpha = \alpha + \angle PCA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle PCA = \alpha \Rightarrow \angle PCA = \angle PAC \Rightarrow \triangle APC - \text{равноб.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AP = PC.$$

3) Имеем след. рисунок:



М - середина AC.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

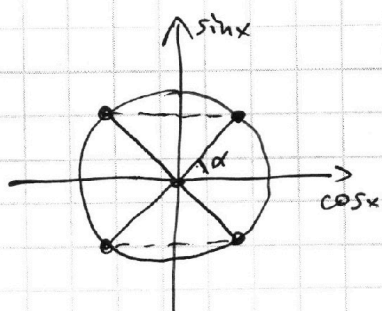
$$x = y = 18 \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$S^* = \sqrt{25-9} + \sqrt{7+9} = \sqrt{16} + \sqrt{16} = 4+4=8.$$

Тогда искомым периметр равен ^{сумме} $\frac{1}{2}$ дуги всей окружности и 2S, т.е.:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R + 2S = 5\pi + 2 \cdot 8 = \boxed{16 + 5\pi}$$

Достигается, при $\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. ~~$\frac{1}{2}$~~



$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $16 + 5\pi$; $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что половина отрезка BD равна
просто значению по y точки B , то есть равно
 $\sqrt{25 - c_1^2}$, аналогично половина отрезка AE
равно $\sqrt{25 - c_2^2}$.

Тогда нужно найти максимум след. выражения:

$$2\sqrt{25 - c_1^2} + 2\sqrt{25 - c_2^2} = 2(\sqrt{25 - c_1^2} + \sqrt{25 - c_2^2}) = 2 \cdot S$$

Подставим вместо c_1 и c_2 их значения:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{25 - c_1^2} + \sqrt{25 - c_2^2} = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18(1 - \sin^2 \alpha)} = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \\ &+ \sqrt{25 - 18 + 18 \sin^2 \alpha} = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{7 + 18 \sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Пусть $x = 18 \sin^2 \alpha$, тогда $x \in [0; 18]$.

$$S = \sqrt{25 - x} + \sqrt{7 + x}. \text{ Найдем максимум величины } S,$$

тогда максимум S будет достигаться в
той же точке. ($S \geq 0$).

$$S^2 = 25 - x + 7 + x + 2\sqrt{(25 - x)(7 + x)} = 32 + 2\sqrt{(25 - x)(7 + x)}$$

Заметим, что выражение под корнем имеет
фиксированную сумму $\Rightarrow$ максимум достигается
при равных значениях $\Rightarrow 25 - x = 7 + x \Rightarrow x = 9$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

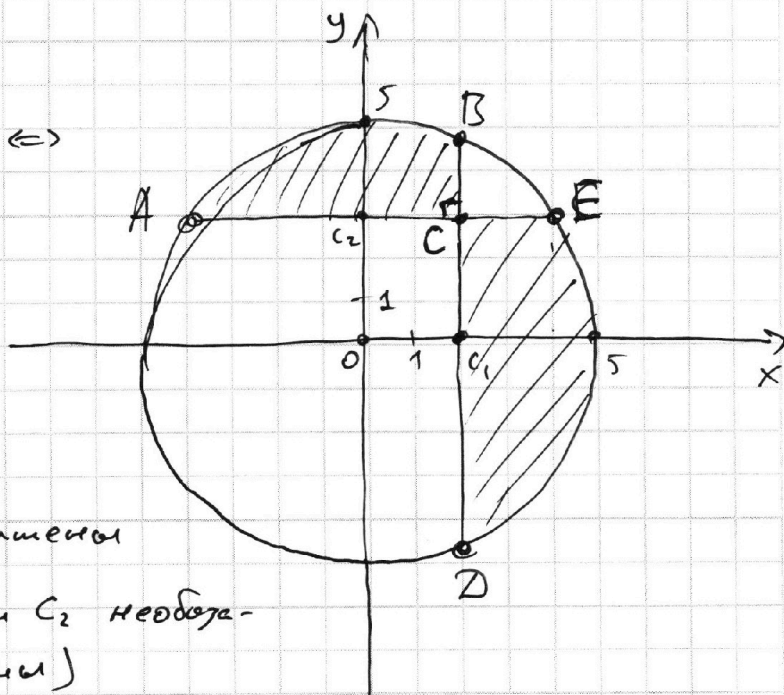
Пусть $c_1 = 3\sqrt{2} \sin \alpha$, $c_2 = 3\sqrt{2} \cos \alpha$.

Тогда $x^2 + y^2 \leq 25$ — это круг радиуса 5 и центром в $(0; 0)$.

Заметим, что

$$(x - c_1)(y - c_2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq c_1, \\ y \geq c_2 \\ x \geq c_1, \\ y \leq c_2 \end{cases}$$



Эти точки изображены на рисунке (c_1 и c_2 обязательно положительны)

Заметим, что сумма меньших дуг $\angle AB$ и $\angle ED$ равна всегда половине дуги всей окружности (т.к. $\angle ACB = 90^\circ$), т.е. не зависит от выбора c_1 и c_2 .

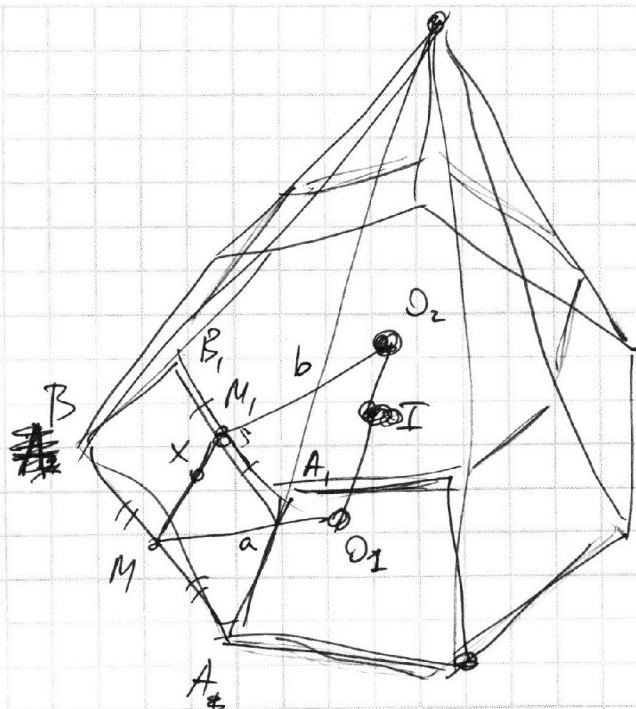


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть I — центр сферы, касающейся
граней. ~~Сторона нижнего основания A_1A_2 ,~~

~~верхнего A_1B_1 .~~ O_1, O_2 — центры нижнего и
верхнего оснований, r — радиус сферы.

Рассмотрим одну из граней и касание её:

Пусть X — точка касания сферы с гранью
 ABB_1A_1 , причем в силу симметрии она
лежит на MM_1 , где MM_1 — ось симметрии

р/б трапеции ABB_1A_1 . $O_2M_1 = b$, $O_1M = a$

Рассмотрим трапецию $O_1MM_1O_2$:

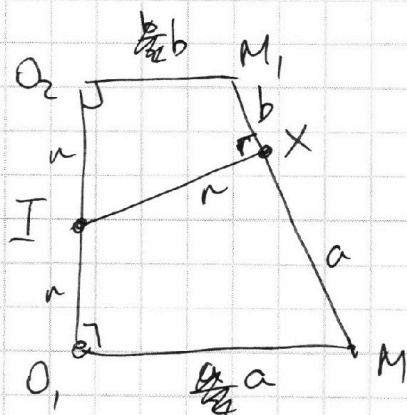


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 3

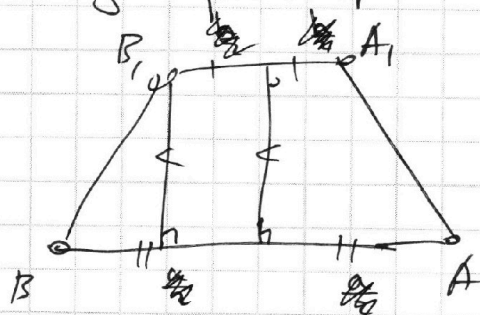
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Ясно, что $\triangle IO_2M_1 = \triangle IXM_1 \Rightarrow$
 $(IX = IO_2, IM_1 - \text{общ.},$
 $\angle IO_2M_1 = \angle IXM_1 = 90^\circ)$

$$\Rightarrow M_1X = \frac{b}{2}, \text{ Аналогично, } XM = \frac{a}{2} \Rightarrow MM_1 = \frac{a+b}{2}$$

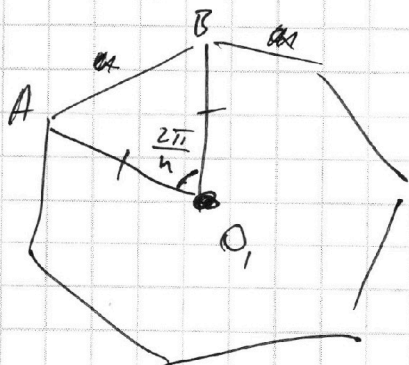
Тогда рассмотрим другую грань:



Её площадь снес.:

$$S_{\text{с.г.}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2} \right) \cdot (a+b) = \frac{(a+b)^2}{4}$$

Пусть у пирамиды n сторон, посчитаем площадь нижнего основания:



$$\angle AO_1B = \frac{2\pi}{n}$$

~~AB = 2r~~

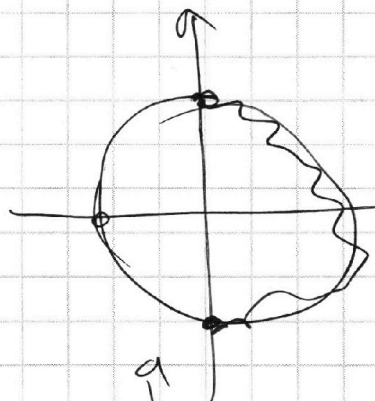


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

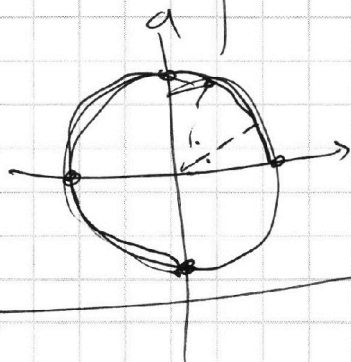
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{x}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{y}{4} \in [0; \pi]$$



вер. $\rightarrow$ вер. $\rightarrow$ вер. $\rightarrow$ вер.
невер. $\rightarrow$ невер. $\rightarrow$ невер. $\rightarrow$ невер.

$$\sin \alpha = \frac{x}{5}$$

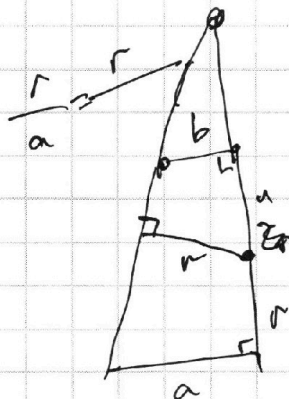
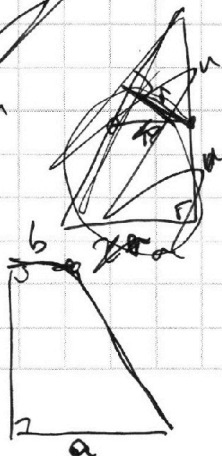
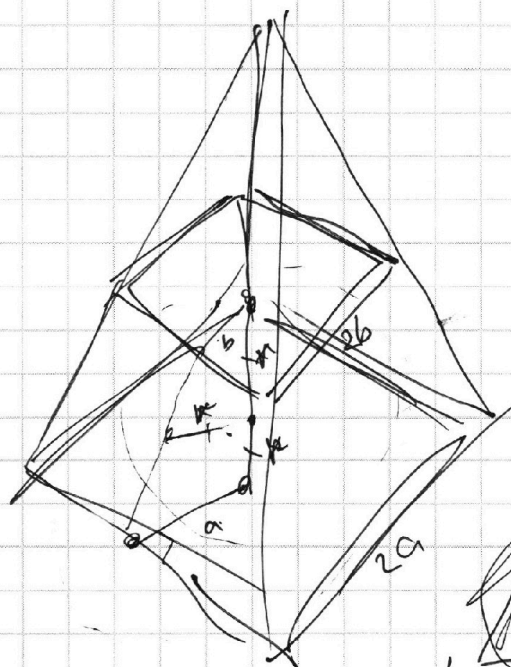
$$\arcsin\left(\frac{x}{5}\right) = \alpha$$

$$\sin \alpha = 1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \alpha = -1$$

$$\alpha = \pi$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

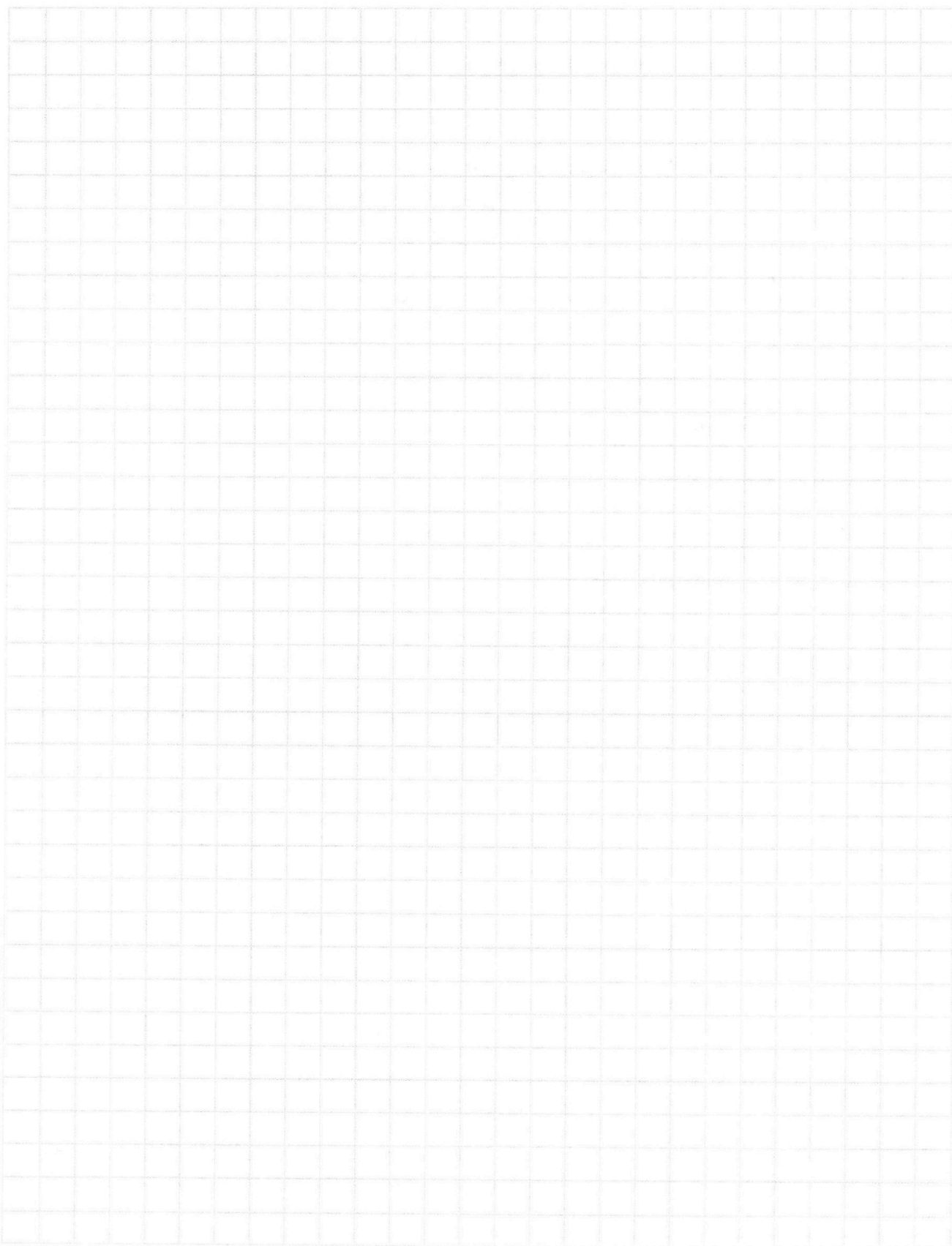
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



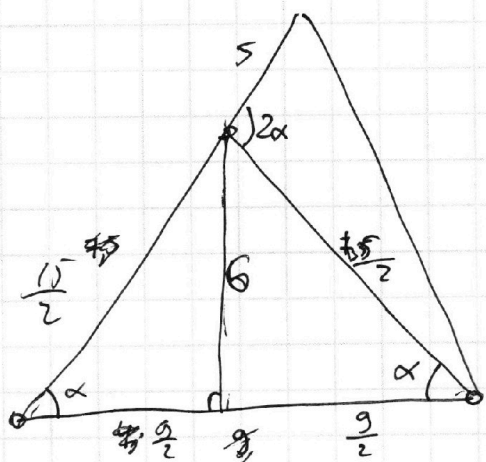
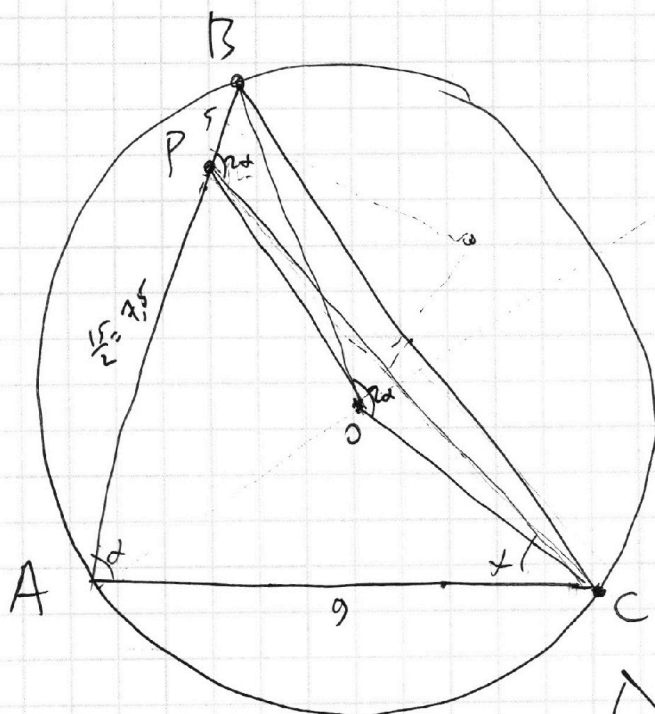


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \alpha = \frac{6 \cdot 2}{15} = \left(\frac{12}{15} \right)$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \left(\frac{15}{2} + 5 \right) \cdot \sin \alpha =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{12}{15} =$$
$$= 45$$

$$h^2 + \frac{9^2}{4} = \frac{15^2}{4}$$

$$4h^2 = 225 - 81 = 144$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ - 81 \\ \hline 144 \end{array} \quad \begin{array}{r} 144 \\ - 120 \\ \hline 24 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \\ - 24 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$h^2 = 36$$
$$h = 6$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \underline{a} \underline{a} \underline{a} \underline{a} \quad 6666$$

$$B = \underline{2} \underline{0} \underline{2} \quad (2)$$

$$C = \underline{3} \underline{3} \quad (3)$$

$$ABC = k^2$$

$$\dots \neq 101 \cdot k$$

$$k \neq k$$

$$2 \cdot (10)$$

$$(11) \cdot (10) \cdot a$$

$$3(11)$$

$$\begin{array}{r} 1111 \mid 7 \\ - 7 \\ \hline 41 \\ - 35 \\ \hline 61 \\ - 56 \\ \hline 5 \end{array}$$

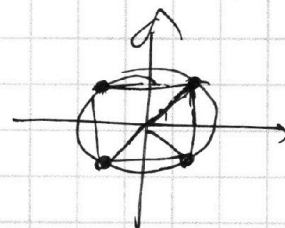
$$\begin{array}{r} 1111 \mid 11 \\ - 11 \\ \hline 11 \\ - 11 \\ \hline 001 \end{array}$$

$$(11 \cdot 101)$$

$$401$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\frac{\pi}{4} \right)$$



$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$$

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$$

$$M = x^2 - y^2 - 3xy$$

$$\pm \frac{\pi}{4}$$

$$\pm \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{xy - y^2 - 3xy} = \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$= \quad xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = xy - y + x - 1$$

$$x - y - 1 = 0$$

$$x = y + 1$$

$$k = \frac{y+x+2}{xy} = \frac{(x+y+2)}{(xy)}$$

$$(y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y =$$

$$= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y =$$

$$= 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2\sqrt{25-x^2} + 2\sqrt{25-y^2} = 2 \cdot (\sqrt{25-x^2} + \sqrt{25-y^2}) \quad \text{max}$$

$$x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$\sqrt{25-18\sin^2\alpha} + \sqrt{25-18\cos^2\alpha}$$

$$\sqrt{25-18\sin^2\alpha} + \sqrt{25-18(1-\sin^2\alpha)}$$

$$\sqrt{25-18x} + \sqrt{25-18+18x}$$

$$\sqrt{25-18x} + \sqrt{7+18x}$$

$$\sqrt{25-x} + \sqrt{7+x}$$

$$7+x=t$$

$$25-x = 25-t+7 \quad x = t-7$$

$$= 32-t$$

$$t \in [7; 25]$$

$$(\sqrt{t} + \sqrt{32-t})'$$

$$(t^{\frac{1}{2}} + (32-t)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (32-t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$t + 32 - t + 2\sqrt{t(32-t)} = 32 +$$

$$t = 16$$

$$x = \sin^2 \alpha$$

$$x \in [0; 1]$$

$$x = 18 \sin^2 \alpha$$

$$x \in [0; 18]$$

$$\sqrt{7} + \sqrt{25} = 5 + \sqrt{7}$$

$$\sqrt{16} + \sqrt{16} = 8$$

$$t = 8$$

$$x = 1$$

$$18 \sin^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{18}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{1}{3\sqrt{2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ C_T^4 C_{T-2}^2

$$\frac{C_{T-2}^2}{C_T^4} = \frac{\frac{(T-2)!}{2!(T-4)!}}{\frac{T!}{4!(T-4)!}} = \frac{(T-1) \cdot 3 \cdot 4}{(T-1)T}$$

$-\cos \alpha$

$(x; 1+2k-x)$

$x+y=1+2k$

$3x+y=1+2m$

$(x; 1+2k-3x)$

$3x+y=1+2k$

$x+y=1+2k$

$2x \in 2(k+m)$

$x \in k-m$

$(\frac{1}{2}; 0)$

$2\pi x = \pi - \pi x - \pi y + 2\pi k$

$2\pi x = \pi(\pi - \pi x - \pi y) + 2\pi k$

$x+y = \text{неч.}$

$\sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \left(\cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} \right)$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

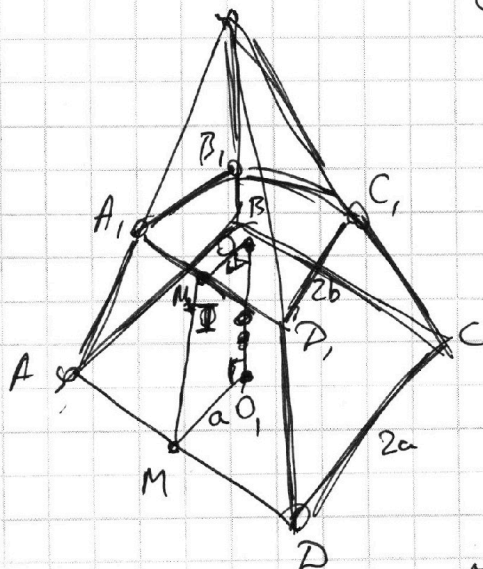
1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7



Пусть сторона нижнего основания — $2a$,
а верхнего — $2b$.

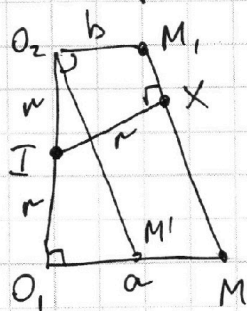
O_1, O_2 — центры нижнего и верхнего квадратов.

I — центр впис. сферы,

r — её радиус.

M — середина AD , M_1 — серед. A_1D_1 .

Рассмотрим трапецию $MM_1O_2O_1$:



т. X — точка касания сферы с
гранью AA_1D_1D .

Заметим, что $\triangle IO_2M_1 = \triangle IXM_1 \Rightarrow$

($IO_2 = IX$; IM_1 — общ.;
 $\angle IO_2M_1 = \angle IXM_1 = 90^\circ$)

$\Rightarrow M_1X = O_2M_1 = b$

Аналогично, $XM = a \Rightarrow MM_1 = a + b$.

$MM_1O_2M_1$ — пар-м. где $\triangle O_1O_2M_1$ т. Пифагора:

$$O_1M_1^2 + O_1O_2^2 = O_2M_1^2$$

$$(a-b)^2 + 4r^2 = (a+b)^2 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 + 4r^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$\Leftrightarrow$

$$4r^2 = 4ab$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

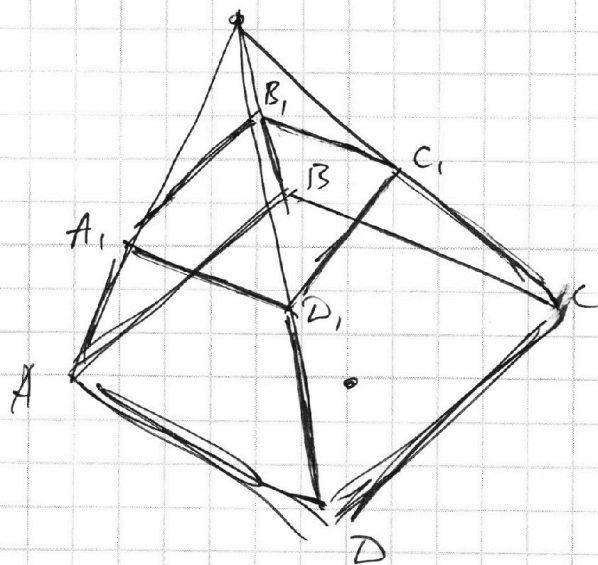
СТРАНИЦА

2 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

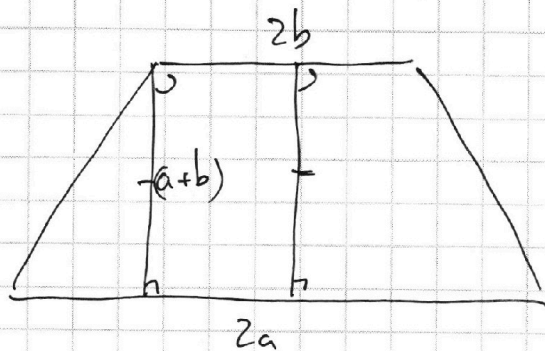
$$r^2 = ab \quad (1)$$

Далее рассмотрим вторую сферу, касающуюся ребер. Пусть O - ее центр, R - ее радиус.



Вернемся к этому позже сначала посчитаем отношение из условия.

Посчитаем площадь боковой грани:



По указанному ранее высоте такой трапеции $(a+b)$

Тогда её площадь:

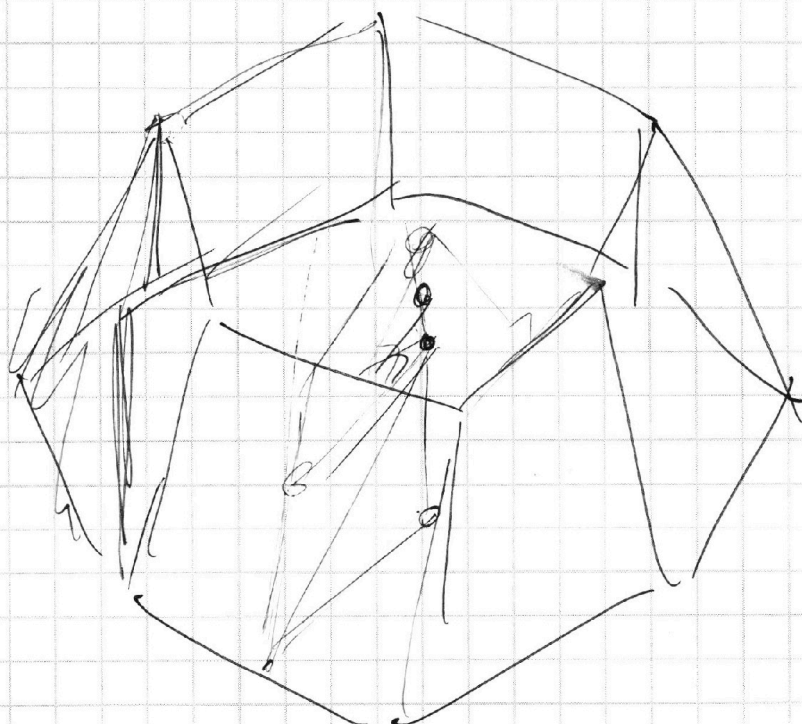


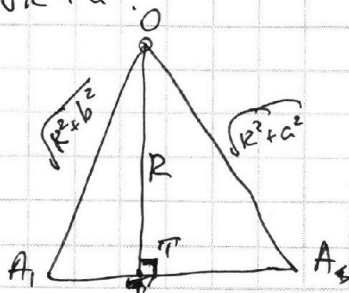
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА 9 из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





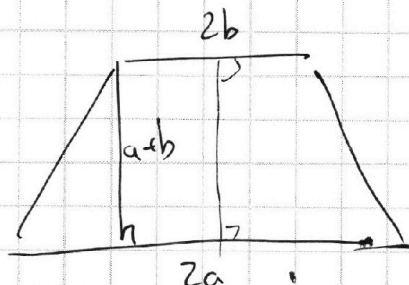


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



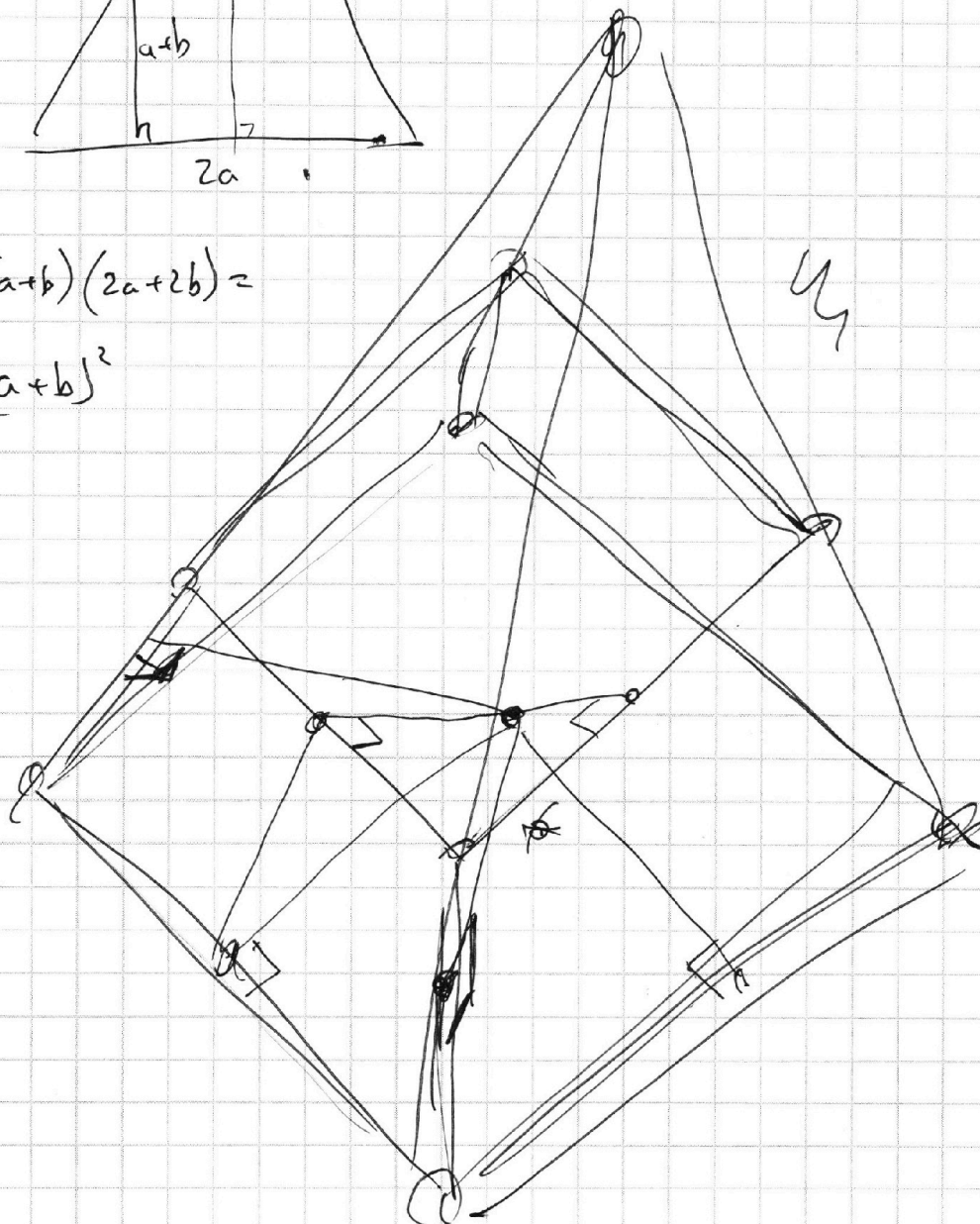
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{4S}{4a^2} = \frac{5}{a^2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot (2a+2b) =$$
$$= (a+b)^2$$



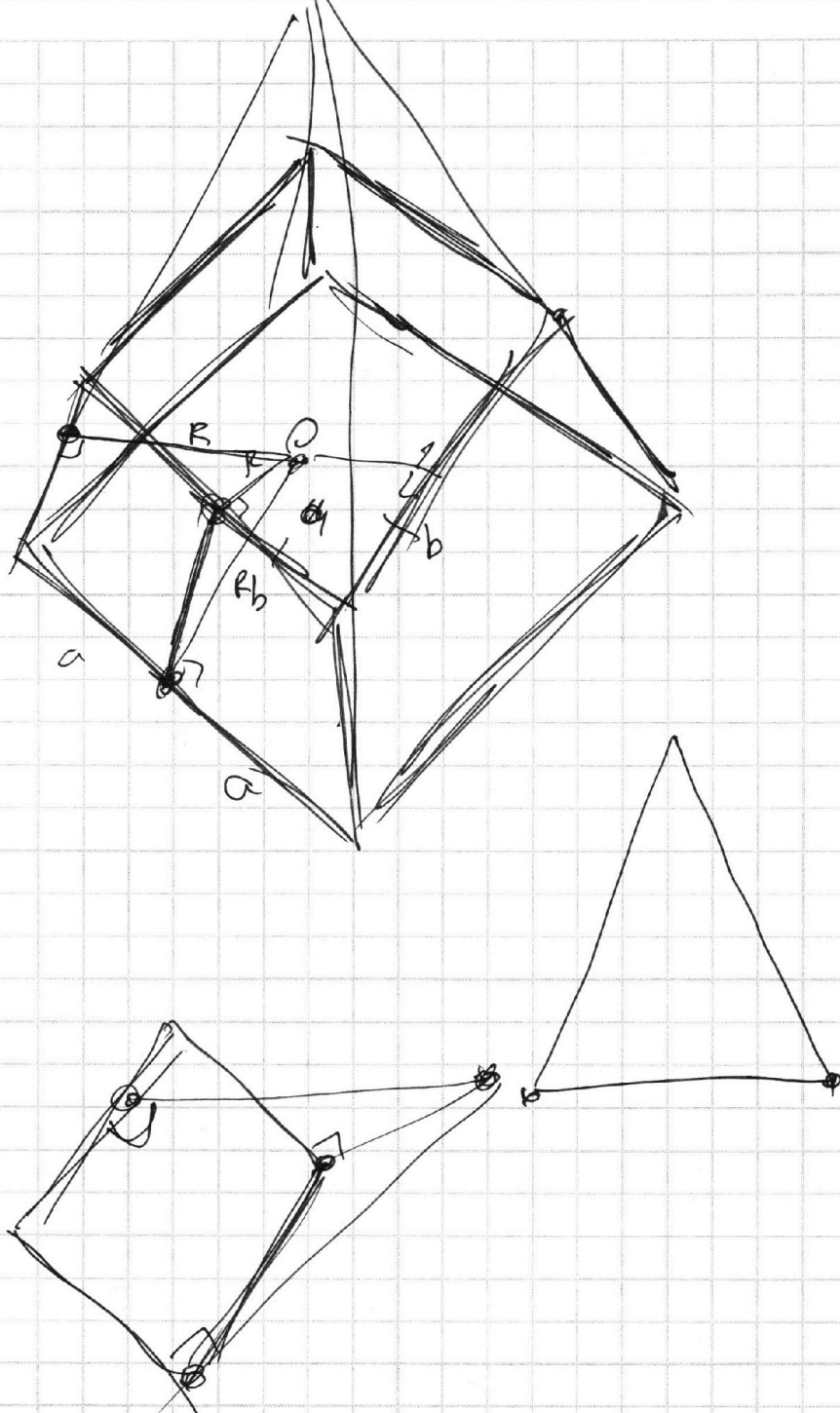


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



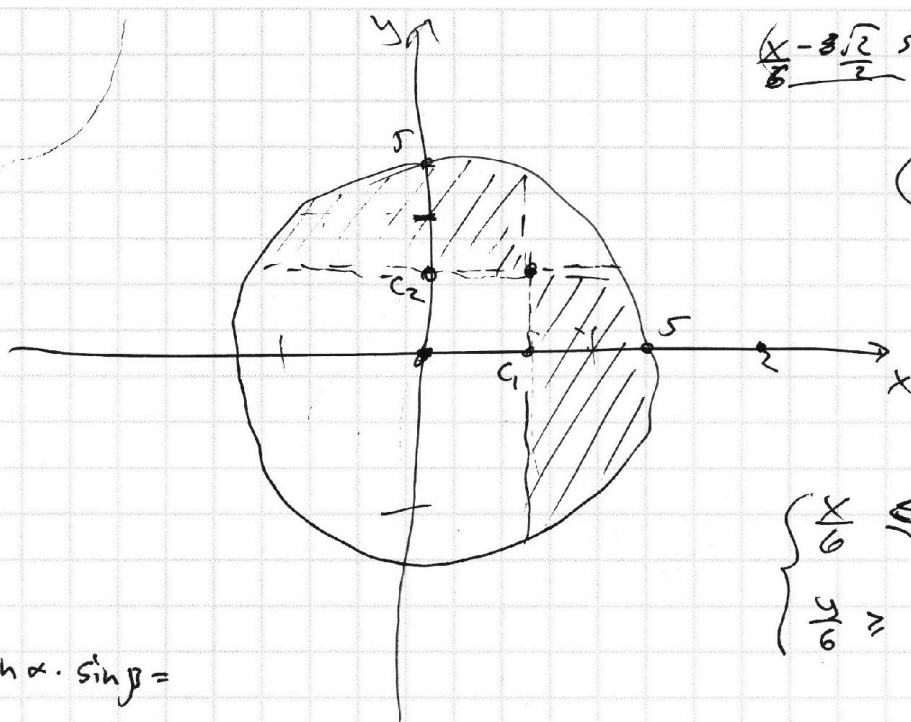


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\left(\frac{x}{5} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin \alpha\right) \left(\frac{y}{5} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \cos \alpha\right) \leq 0$$

$$(x - c_1)(y - c_2)$$

$$\begin{cases} x \leq c_1 \\ y \geq c_2 \\ x \geq c_1 \\ y \leq c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{5} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \\ \frac{y}{5} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \end{cases}$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta =$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$3\sqrt{2} \sin \alpha$$

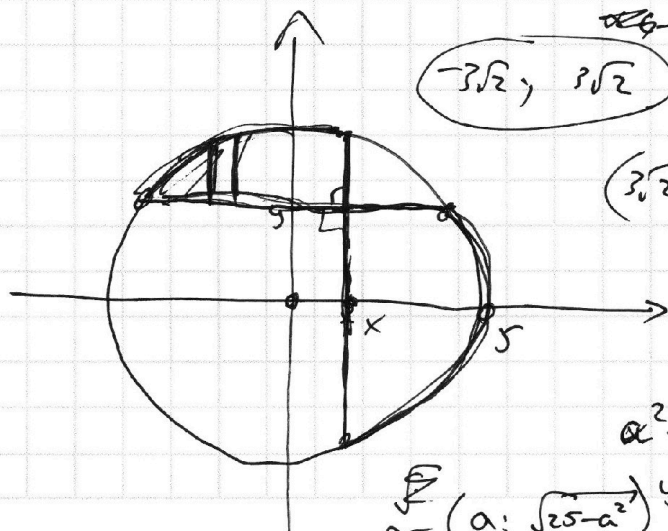
$$3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{x}{5} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$$

$$x(y - 3\sqrt{2}) \leq 0$$

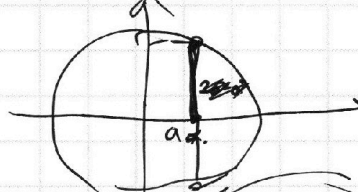
$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 3\sqrt{2} \\ x \geq 0 \\ y \leq 3\sqrt{2} \end{cases}$$



$$(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$$

$$9 \cdot 2 = 18$$

$$(3\sqrt{2} \sin \alpha; 3\sqrt{2} \cos \alpha)$$



$$a^2 + y^2 = 25$$

$$y = \pm \sqrt{25 - a^2}$$

$$\sqrt{25 - a^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = -(\cos \pi y \cos \pi x - \sin \pi x \sin \pi y)$$

$$\cos 2\pi x = -\cos(\pi x + \pi y)$$

$$2\pi x = (\pi x + \pi y) = \pi + 2\pi k$$

$$\pi(x - y) = \pi + 2\pi k$$

$$x - y = 1 + 2k$$

$$x = 2 \quad y = 1$$

$$x = 2k + 1 + y$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$x = 2k$$

$$y = 2m + 1$$

$$x = 2k + 1$$

$$y = 2m$$

$$\arcsin \frac{2k}{5} + \arccos \frac{2m+1}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

48.

7

→ 6

48

48

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7-1} = \frac{12}{7(7-1)}$$

$$\frac{4+x}{7} \cdot \frac{3+x}{7-1} = \frac{(4+x)(3+x)}{7(7-1)}$$

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{6}{12} = 12 + 3x + 4x + x^2$$

$$30 = 12 + x^2 + 7x$$

$$x^2 + 7x - 18 = 0$$

$$(x+9)(x-2) = 0$$

$$x = 2$$