



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

①. A составлено из 4х одинаковых цифр $\Rightarrow$ делится на $1111 = 11 \cdot 101$. Так как квадрат имеет простые множ.

в четн. степени, то $B: 101$ и $C: 11$. ~~$11 \cdot 101 = 1111$~~

При этом нам подходит только $B = 101$, т.к. B содержит хотя бы одну единицу. C должно содержать хотя бы одну $5 \Rightarrow C = 55 = 5 \cdot 11$. Тогда B и A должно дел. на 5 , т.к. $B \stackrel{101}{\text{не дел. на } 5} \Rightarrow A = 5555$.

Имеем тройку $A = 5555$; $B = 101$; $C = 55$.

$$A \cdot B \cdot C = 5 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11 = (11 \cdot 5 \cdot 101)^2$$

Других троек нет, т.к. из всех канонических цифр на 5 дел. только $5 \Rightarrow A$ может быть только 5555 .
 $B = 101$ и $C = 55$. Тройка: $(5555; 101; 55)$

Ответ: $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

② ~~$k = \frac{1}{x}$~~ $x, y > 0$ — по усл. $x \neq 3; y \neq -3$ — ограничение.

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \text{ — по условию.}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy-3y+3x-9}. \text{ Т.к. } x, y > 0 \Rightarrow x+y > 0 \Rightarrow x+y+1 > 0$$

⇒ Можем поделить на $x+y+1 \neq 0$:

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{xy+3x-3y-9}; x \neq 3; y \neq -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy = xy+3x-3y-9 \Rightarrow 3x = 3y+9 \Rightarrow \boxed{x = y+3}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2+xy+y^2) - 9xy =$$

$$= (y+3-y)((y+3)^2 + y^2 + 3y + y^2) - 9y^2 - 27y =$$

$$= 3(3y^2 + 9y + 9) - 9y^2 - 27y = 9y^2 - 9y^2 + 27y - 27y + 27 =$$

$$= 27 \text{ — единственное значение.}$$

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{3} \text{ а) } (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

По формулам суммы ~~и~~ косинусов и разности синусов:

$$-2 \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$1) \cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0$$

$$\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x+y = 1+2k \Rightarrow x=y, y = -x+1+2k. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Пара: } (x; -x+1+2k), k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \neq 0$$

Тогда поделим уравнение ~~на~~ (на 3 строчке) на

$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \neq 0:$$

$$-2 \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x \quad / : 2 \text{ и перенесем}$$

$$\text{все в правую часть: } \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x + \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x =$$

$$= 0; \text{ По формуле косинуса суммы разности:}$$

$$\cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} - \pi x \right) = 0 \Rightarrow \cos \left(-\frac{\pi x - \pi y}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi x + \pi y}{2} \right) = 0$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x+y = 1+2n \Rightarrow y = -x+1+2n, n \in \mathbb{Z} \rightarrow$$

$$\Rightarrow (x; -x+1+2n), n \in \mathbb{Z} - \text{такое же решение, что и в (1)}$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$8) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi.$$

$$\text{Ограничения: } -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \text{ и } -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in [-4; 4] \text{ и } y \in [-9; 9].$$

Так как ~~арксос а не может быть~~ $\arccos a \in [0; \pi]$,
при $a \in [-1; 1]$, то $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9}$ равно как мак-
симум $\pi + \pi = 2\pi \Rightarrow \begin{cases} \arccos \frac{x}{4} \neq \pi \\ \arccos \frac{y}{9} \neq \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -9 \end{cases}$

$$\Rightarrow x \in (-4; 4] \text{ и } y \in (-9; 9].$$

Решение: $(x; -x+1+2n), n \in \mathbb{Z}$ — в кав. $y = -x+1+2n$
добавл. единица мен. чётность $\Rightarrow x$ и y разн. чётн.

$2n$ — период, кот. не меняет чётности. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) Если $x \in \{-2; 0; 2; 4\}$ ^{т.е. чётн.}, то на каждый такой x

y нас будет по 9 последующих значений y :

$$y \in \{-7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9\} \Rightarrow 4 \cdot 9 = \underline{36 \text{ пар}}$$

2) Если $x \in \{-3; -1; 1; 3\}$, т.е. нечётн., то соотв.

~~к~~ каждому такому x будет по 9 разн. y — чётн.:

$$y \in \{-8; -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6; 8\} \Rightarrow 4 \cdot 9 = \underline{36 \text{ пар.}} \text{ Всего: } 2 \cdot 36 = \underline{72}.$$

Ответ: ~~а)~~ $(x; -x+1+2n), n \in \mathbb{Z}$. б) $\underline{72 \text{ пары.}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

④ Пусть k — количество одинадцатиклассников.
 n — кол-во добавленных в конце месяца билетов.
То есть в начале мес. — 4 бил. В конце — $n+4$ билета.
Тогда вероятность попасть Васе и Пети на концерт в начале месяца равна $\frac{4}{k} \cdot \frac{3}{k-1}$.
Вероятность этого же события в конце месяца:
 $\frac{n+4}{k} \cdot \frac{n+3}{k-1}$. ~~$k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$~~ , $k \neq 1$ (т.к. в классе минимум Пети и Вася).
Тогда имеем уравнение:

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{4}{k} \cdot \frac{3}{k-1} = \frac{(n+4)(n+3)}{k(k-1)} \Rightarrow \frac{12 \cdot \frac{7}{2}}{k(k-1)} = \frac{(n+4)(n+3)}{k(k-1)}; k, n \in \mathbb{N}$$

$$42 = n^2 + 7n + 12 \Rightarrow n^2 + 7n - 30 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = -10 \text{ — не подх.} \end{cases}$$

$n = 3 \Rightarrow$ всего билетов $n+4 = 7$ билетов.

Проверка: $\frac{7}{2} \cdot \frac{4}{k} \cdot \frac{3}{k-1} = \frac{7}{k} \cdot \frac{6}{k-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 42 = 42.$$

Ответ: 7 билетов.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порука QR-кода недопустима!

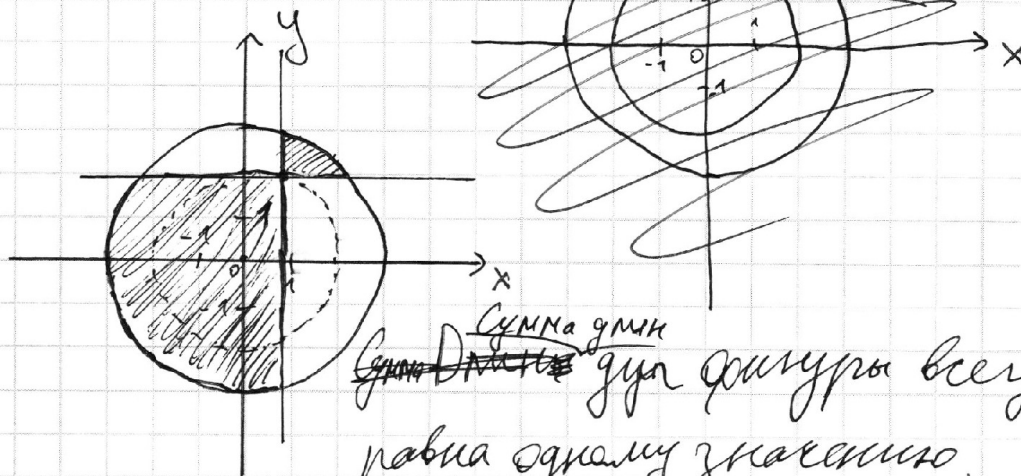
6.
$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

1) Первое ~~уравнение~~ неравенство задаёт

Уравнение $(x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) = 0$ задаёт вертикальную и горизонтальную прямую, точка пересечения которых принадлежит дуге на окружности с центром в начале координат и радиусом 2.

2) $x^2 + y^2 \leq 9$ — неравенство задаёт круг с центром в нач. коорд. и радиусом 3.

Впервые пер-ве координаты точки пересек., лежащей на окр. зависит от α .



Сумма ~~длин~~ дуг фигуры всегда
равна одному значению,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Так как угол между прямыми, отсекающими дуги всегда прямой. $\Rightarrow$ Суммарная угл. мера дуг $= 90^\circ \cdot 2 = 180^\circ \Rightarrow$ Суммарная длина дуг равна половине длины окружности.

~~Длина окружности~~ Сумма длин дуг фигур равна ~~3\pi~~ ~~3\pi~~. πR , где R - рад. окружн. $\Rightarrow$ ~~3\pi~~ 3π .

След-но, нам необходимо максимизировать сумму длин отрезков вертикаль и горизонт.

прямых, принадлежащих где отрезки принадлежат окружности. ~~Длина окружности~~ находятся внутри окружн. с радиусом 3.

Пусть ~~точка~~ $(x_0; y_0)$ - координаты пересеч.

~~прямых~~ так, чтобы сумма соответствующих отрезков была максимальной.

$(x_0; y_0)$ и $(x_b; y_b)$ - точки пересеч. ~~прямых~~ вертикальной и горизонтальной прямой ^{соответственно} с окружностью

радиуса 3. Тогда: $y_b = \sqrt{9 - x_0^2}$; $y_0 = \sqrt{9 - x_b^2} \Rightarrow x_b = \sqrt{9 - y_0^2} = \sqrt{5 + x_0^2}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сумма длин отрезков фигуры ~~равна~~ равна $2(x_b + y_b)$, где y_b, x_b - координ. коорд. (расшир.)
 ↑ отв. окр., т.к. ~~оно~~ симметрично можно отр.)

$$2(\sqrt{5+x_0^2} + \sqrt{9-x_0^2}) - \max.$$

Пусть $k = \sqrt{5+x_0^2} + \sqrt{9-x_0^2}$, где k - макс. ~~значение~~ значение.

$$k^2 = 14 + 2\sqrt{(5+x_0^2)(9-x_0^2)} \Rightarrow k^2 - 14 = 2\sqrt{45 + 4x_0^2 - x_0^4}.$$

$$(k^2 - 14)^2 = -4x_0^4 + 16x_0^2 + 180. \text{ Заменяем } x_0^2 = t > 0.$$

✶ Максимум параболы ~~кажд.~~ ~~кажд.~~

$$\text{В вершине: } \frac{-16}{-8} = 2. = x_0^2 \Rightarrow x_0 = \sqrt{2}, y_0 = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}.$$

~~Сумма отрезков фигуры:~~

$$x_b = \sqrt{7}, y_b = \sqrt{7}.$$

$$\text{Периметр: } 2(\sqrt{7} + \sqrt{7}) = 4\sqrt{7}. - \text{сумма отрезков}$$

фигуры.

$$\text{✶ Периметр: } 4\sqrt{7} + 3\pi.$$

$$\text{Ответ: } 4\sqrt{7} + 3\pi, \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

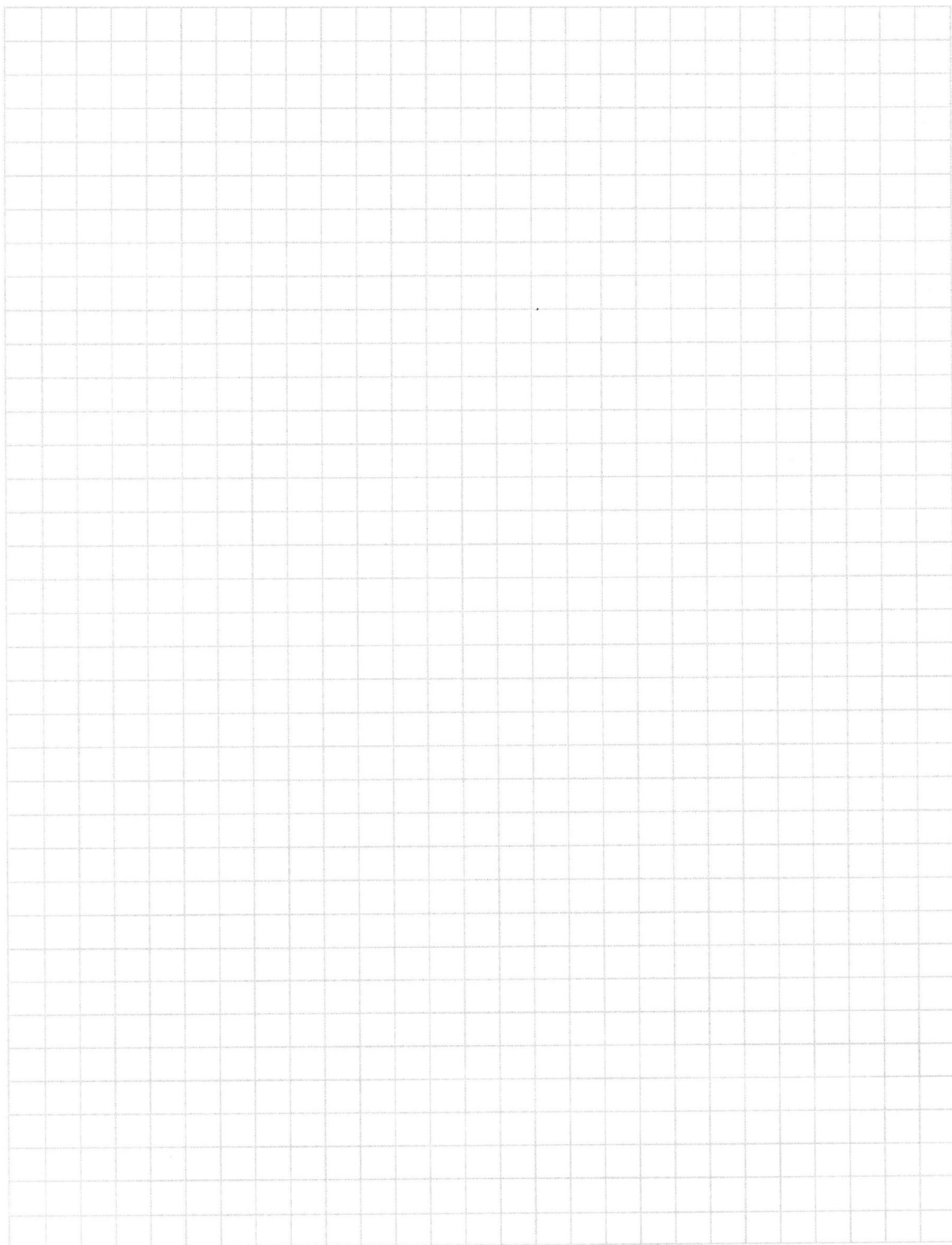
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

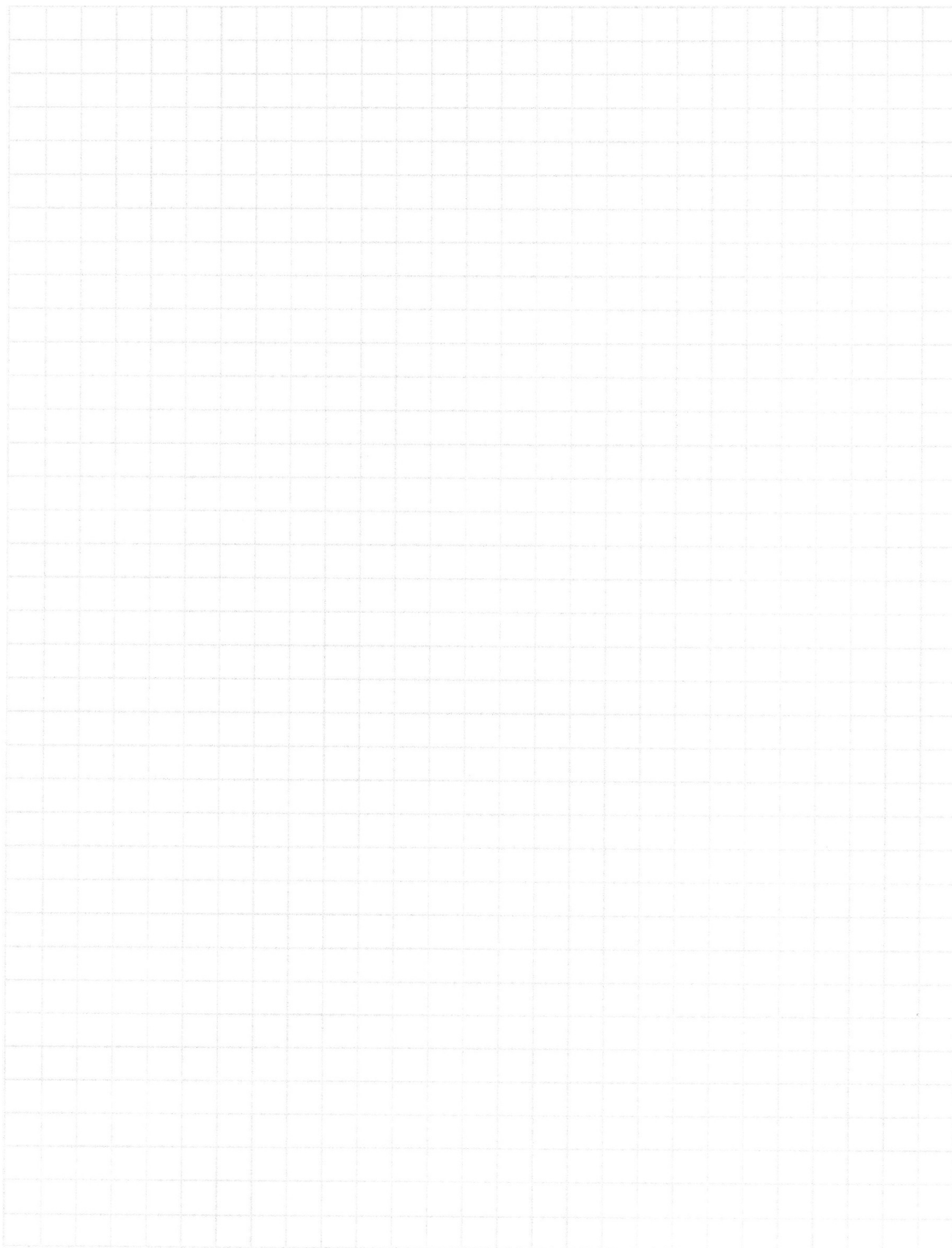
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} : 1111$$

$$B = \overline{1---}$$

$$C = \overline{-5}$$

$$AB \cdot C = n^2$$

$$\text{Если } C = \overline{-5} : \Rightarrow C; 5;$$

$$x, y > 0.$$

$$x = -y - 1.$$

$$x \neq 0 \quad y \neq -3$$

$$(x + y + 1 \neq 0)? \quad (x + y) = -1?$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x = -2$$

$$y = 1$$

$$x = -3$$

$$y = 2$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x^2 - y^2 - 9xy =$$

$$= (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy$$

$$3(y^2 + 6y + 9 + y^2 + 3y + y^2) - 9y^2 - 27y$$

$$3y^2 + 27y + 27 - 9y^2 - 27y$$

$$-6y^2 + 27y + 27 - 27y - 27 = -6y^2$$

$$(-2y-1)(y^2+2y+1+(-y-1)y+y^2) - 9(-y-1)y =$$

$$x = 1$$

$$y = -2.$$

$$= (-2y-1)(y^2+2y+1-y^2-y+y^2) + 9y^2+9y =$$

$$= (-2y-1)(y^2+y+1) + 9y^2+9y =$$

$$-8-1+18=9.$$

$$= -2y^3-2y^2-2y-y^2-y-1+9y^2+9y$$

$$-27-8+54=$$

$$= 54-35=19$$

$$-2y^3+7y^2-8y-1$$

$$-\frac{1}{y+1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2+y} =$$

$$1+8-18=-9$$

$$= \frac{-y+y+1-1}{y^2+y} = 0?$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\begin{aligned} \alpha &= x+y \Rightarrow x = \frac{\alpha+\beta}{2}, y = \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \beta &= x-y \end{aligned}$$

$$\sin(x+y) - (\sin(x-y)) = -2 \sin y \cos x$$

$$= 2 \sin x \cos y \Rightarrow \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0?$$

$$2 \sin \frac{\pi(x+y)}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = -2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{4}$$

$$-2 \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \Rightarrow \sin \pi x =$$

$$= \frac{1}{2} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} (\cos(x+y) - \cos(x-y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

$$\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x+y = 1 + 2\pi k$$

$$y = -x + 1 + 2\pi k$$

$$-(\cos(\frac{\pi x - \pi y + 2\pi k}{2}) + \cos(\frac{\pi x - \pi y - 2\pi k}{2})) = (\cos \frac{\pi x - \pi y + 2\pi k}{2} +$$

$$+ \cos(\frac{\pi x - \pi y - 2\pi k}{2}))$$

$$- \cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} + \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = \cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} + \cos(\frac{\pi x + \pi y}{2})$$

$$\cos \frac{\pi(3x-y)}{2} = 0$$

$$\frac{\pi(3x-y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(x; -x-1+2\pi k)$$

$$\frac{3x-y}{2} = \frac{1}{2} + n$$

$$y = 3x - 1 - 2n$$

$$(x; 3x-1+2\pi k)?$$

$$3x-y = 1+2n$$

$$\cos(\frac{\pi x - \pi y}{2} - \pi x = \frac{\pi x + \pi y}{2})$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos \frac{x}{4} = 2$$

$$\arccos \frac{y}{9} = \beta$$

$$-1 \leq \frac{x}{4}; \frac{y}{9} \leq 1$$

$$x \in [-4; 4]$$

$$y \in (-9; 9]$$

$$\arccos \in [0; \pi]$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} \neq -1 \rightarrow x \neq -4$$

$$y \neq -9$$

$$\frac{y}{9} \neq -1$$

$$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

$$(-3; -9 - 1 + 2n = -10 + 2n = -10; -8; -6; -4; -2; 0; \dots$$

$$-8; -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6; 8$$

$$(-2; -7 + 2n) \Rightarrow y = -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9$$

$$(-1; -6 + 2n) \Rightarrow y = -8; -6; -4; -2; 0; \dots$$

$$0; -1 + 2n = -1; -3; -5; -7; -9; -11; -13; \dots$$

$$(4; 12 + 2n) \Rightarrow y = -8; -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6; 8$$

bezge 9?

$$8 \cdot 9 = 72$$

$$\frac{111111}{101} \cdot \frac{11}{101}$$

$$11 \cdot 101$$

$$1111, 101, 55$$

$$a \cdot 11 \cdot 101, 101 \cdot 55?$$

$$5555, 101, 55$$

$$\frac{404}{502}$$

$$\frac{4}{25} \cdot \frac{3}{24}$$

$$6 \cdot 7 = 42 = 12 + 3n + 4n + n^2$$

$$n^2 + 7n - 30 = 0$$

$$D = 49 + 120 = 13^2$$

$$n = \frac{-7 \pm 13}{2} = 3$$

n - добавили целое.
 k - кол-во кл. - целое.

$$\frac{4}{k} \cdot \frac{8}{k-1} \cdot \frac{7}{2} = \frac{4+n}{k} \cdot \frac{4+3+n}{k-1}$$

$$k^2 - k = 0$$

$$\frac{12 \cdot \frac{7}{2}}{k^2 - k} = \frac{(4+n)(3+n)}{k^2 - k}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверка: k - кол. во.

$(n=3)$

Ответ: (7)

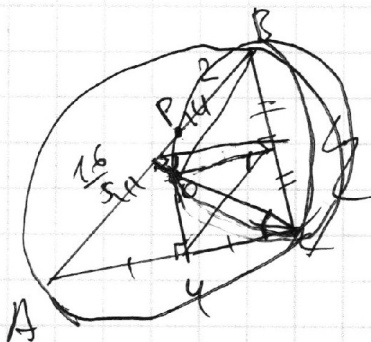
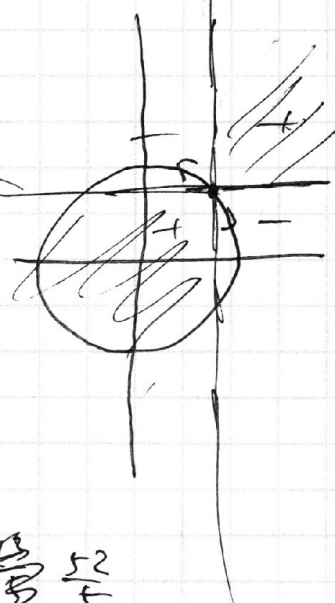
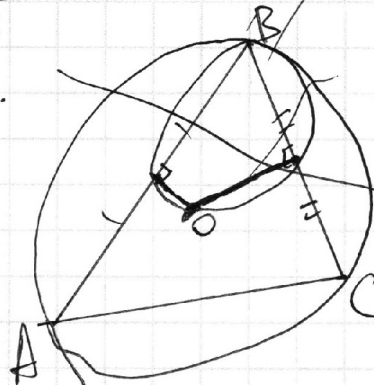
$$x = 2 \cos \alpha \in [-2, 2]$$

$$y = 2 \sin \alpha \in [-2, 2]$$

$$\frac{4}{k} \cdot \frac{3}{k-1} = \frac{7}{2} = \frac{7}{k} \cdot \frac{6}{k-1}$$

$$\frac{12 \cdot 7}{2(k^2 - k)} = \frac{42}{k^2 - k}$$

~~12.7~~



$\triangle ABC$?

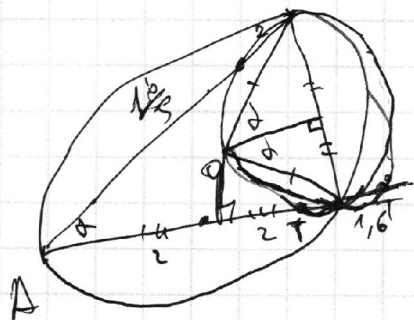
$$\frac{16 \cdot 2}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{16}{5} + 2 = \frac{26}{5}$$

$$\frac{26}{5} \cdot 2 = \frac{52}{5}$$

$$\frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5} = \frac{260 + 26 \cdot 6}{25}$$

$$4 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha = 4 \leq 9$$



$$\frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5} = \frac{416}{25} = 4$$

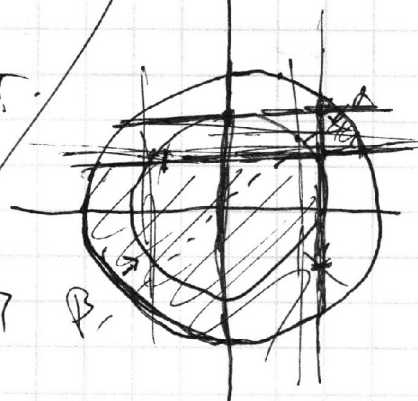
$2 \pi R \rightarrow \pi R$

$$\frac{16 \cdot 26}{100} = AT$$

$$\frac{4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 13}{25} = \frac{80 + 24}{25} = \frac{104}{25}$$

$2 \pi R$

$$\angle \alpha + \beta = 3\pi$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k^4 + 196 - 28k^2 = \cancel{4}(9 - k^2)(5 + k^2) = \cancel{4}(45 - 5k^2 + 9k^2 - k^4)$$

$$\cancel{4} \cancel{45} - x^4 + 4x^2 + 45 - \max, \quad \frac{-4}{-4} = 1 = \cancel{4} \cancel{45}$$

$$16 + 16 + 45 \checkmark$$

$$t^2 = -46 + 45 \min$$

$$k^4 + 196 - 28k^2 \geq 0$$

$$k^4 - 28k^2 + 98 = 0$$

$$t^2 - 28t + 98 = 0 \quad k = 2\sqrt{2}$$

$$D = -784 - 4 \cdot 98 = -856$$

$$2 \cdot 784 - 392 = 1176$$

$$2 \cdot 384 + 8 = 776$$

$$k^2 = 28 \pm$$

$$t = 28 \pm$$

$$2\sqrt{8} + 2\sqrt{6} =$$

$$\sqrt{8} + \sqrt{6} \pm 2\sqrt{2}?$$

$$\sqrt{392} = 2\sqrt{98} = 2\sqrt{2 \cdot 49} = 14\sqrt{2}$$

$$x_0 = \sqrt{2}, \quad y_0 = \sqrt{2}$$

$$P = 28\sqrt{2}$$

$$\alpha \geq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$$

$$P \geq 4\sqrt{2} + 3\pi$$



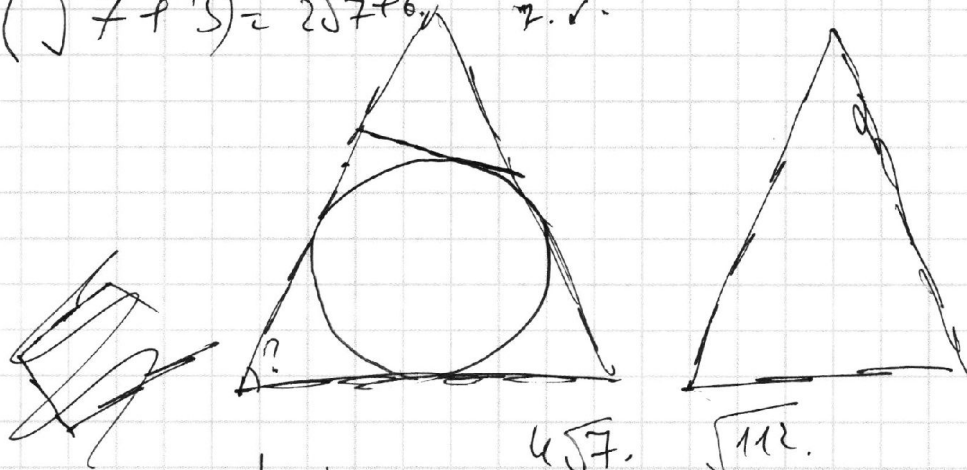
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

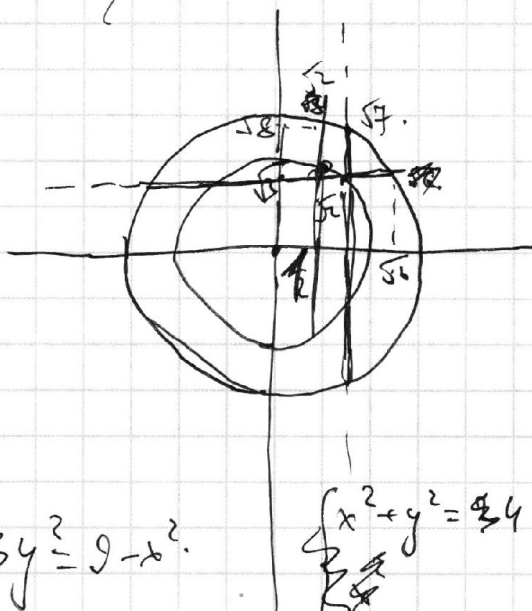
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2(\sqrt{7} + 3) = 2\sqrt{7} + 6 \quad \text{з.в.}$$



$$4\sqrt{7}, \quad \sqrt{112}.$$



$$x^2 + y^2 = 9, \quad x \in [-3; 2].$$

$$4x^2 + y^2 = 9$$

$$y^2 \leq 7$$

$$y \leq \sqrt{7}$$

$$2y + 2x - \max?$$

$$x + y - \max.$$

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$2\sqrt{7} +$$

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$y^2 = 8$$

$$x^2 = 9 - y^2 = 26$$

$$x = \sqrt{26}$$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad x + \sqrt{9 - x^2} - \max x?$$

$$x^2 + 9 - x^2 + 2x\sqrt{9 - x^2} - \max$$

$$2x\sqrt{9 - x^2} - \max$$

$$4x^2(9 - x^2) - \max \quad \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{5 + x^2} = k$$

$$36x^2 - 4x^4 - \max \quad k^2 = 14 + 2\sqrt{...}$$

$$2\sqrt{8} + 2\sqrt{6} = x_0 \sqrt{9 - 4 + x_0^2} \quad x^4 + 9x^2 - \max$$

$$2(\sqrt{8} + \sqrt{6}) \quad \sqrt{5 + x^2} \quad -b^2 + 9t \quad b_0 = -\frac{9}{-2} = 4,5 = \frac{9}{2} = x^2$$

$$2(\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{5 + x^2}) - \max? \quad x = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad k^2 - 14 = 2\sqrt{...}$$