



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3.

Ответ: $(A; B; C) = (5555; 101, 55)$

Зачисли $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ обозначает десятичные числа с цифрами $a_1, \dots, a_n$

Решение

Пусть $A = \overline{xxxx}$, $x \in \{0, \dots, 9\}$, $B = \overline{abc}$, $C = \overline{de}$.

$ABC \in \mathbb{N}^2$. Пусть заметим, что $A = \overline{x} \cdot (1111) = \overline{x} \cdot 101 \cdot 11$. ^{101 и 11 - простые} $\forall k, 1 \leq k \leq 9$, то $A \not\equiv 101^2$.

$\forall k, ABC$ - делится, то на 101 еще делится или B , или C . Если это C , то $C \equiv 101 \pmod{99} \Rightarrow \emptyset$.

Тогда $B \equiv 101$. Тогда B принимает вот такие значения: $101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909$. $\forall k$ в B есть хотя бы 1 цифра с 1,

то B равно 101 . Заметим, что $101 \cdot 11$.

По аналогичным причинам, $C \equiv 11 \pmod{101} \Rightarrow C$ бывает:

$11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$. $\forall k$ в C есть цифра 5, то $C = 55$. Тогда $B = 101$ и $C = 5 \cdot 11$.

$A = \overline{x} \cdot 101 \cdot 11 \Rightarrow ABC = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5 \cdot \overline{x} \in \mathbb{N}^2$

$\Rightarrow 5 \cdot \overline{x} \in \mathbb{N}^2$, $\forall k$ $x \neq 0$. Тогда $x = 5$, так

$\overline{x} \equiv 5$ и $x \neq 0$. Отсюда $A = 5555$ или 1 из

итого, $(A; B; C) = (5555, 101, 55)$

стр 1 из 1.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 2.

Ответ: 27.

По условию, $k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

$$\Rightarrow \frac{1+x+y}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}. \text{ Заметим, что}$$

$$1+x+y > 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy = (x-3)(y+3) = xy - 3y + 3x$$

$$\Rightarrow 3 = 3y - 3x \Rightarrow y - x = 1 \Rightarrow y = x + 1$$

$$\Rightarrow M = x^3 - y^3 - 9xy = (3+y)^3 - y^3 - 9(3+y)y =$$

$$= 27 + y^3 + 3 \cdot y^2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 y - y^3 - 27y - 9y^2 =$$

$$= 27.$$

лист 2 из

СРР. 1/1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача N 349

а)
Ответ: $(x; y) = (x; 2k_3 + 1 - x), (x; 3x + 2k_4 + 1), k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$

Решение.

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi y \cos \pi x + \sin \pi y \sin \pi x$$

$$\Leftrightarrow -\cos(2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x) \Leftrightarrow \cos(\pi - 2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi - 2\pi x - (\pi y - \pi x) = 2\pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z} \\ \pi - 2\pi x + (\pi y - \pi x) = 2\pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x + x - y = 2k_1, k_1 \in \mathbb{Z} \\ 1 - 3x + y = 2k_2, k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2k_3 + 1, k_3 \in \mathbb{Z} \\ y - 3x = 2k_4 + 1, k_4 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2k_3 + 1 - x, k_3 \in \mathbb{Z} \\ y = 3x + 2k_4 + 1, k_4 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

б) Ответ: 170.

Решение. Попробуем для первого неравенства. Заметим, что если x и $\frac{2k_3 + 1 - x}{3}$ — целые числа,

значения $\cos$ $[-1; 1]$, то сумма их $\cos$ — аркосинусов

будет меньше 2π . Проведем еще один шаг.

Если $\cos$ больше -1 , то $\cos$ — аркосинусов

будет строго меньше 2π .

Итого 3.



СТР. 1 из 4



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Предположим, что все окки по -1-особый случай
Тогда $\frac{x}{9} = -1$ и $\frac{2k_3+1-x}{9} = -1$

$$\Rightarrow x = -9 \Rightarrow 2k_3 + 1 - x = -9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k_3 + 1 = -9 - 4 = -13 \Rightarrow k_3 = -7.$$

Отсюда $x = -9$, $k_3 = -7$.

Решим теперь неравенство $1 \leq \frac{x}{9} \leq -1$ и

$$\text{и } \frac{2k_3+1-x}{9} \geq -1 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq -4 \text{ и } 9 \leq 2k_3+1-x \leq 9.$$

$$\Rightarrow 13 \leq 2k_3+1 \leq -13 \Rightarrow 12 \leq 2k_3 \leq -14 \Rightarrow 6 \leq k_3 \leq -7.$$

Заметим, что если мы возьмем $k_3 \in [-7, 6]$ и $x \in [-4, 4]$,

$$\text{то } 1 \leq \frac{x}{9} \leq -1 \text{ и } 9 \leq 2k_3+1-x, \text{ и. и.}$$

$$\Rightarrow 9+x \leq 2k_3+1 \leq 9+x \Rightarrow 8+x \leq 2k_3 \leq 10+x.$$

Пусть $x \in [-4; -2; 0; 2; 4]$. Тогда $k_3 \in [-5 + \frac{x}{2}; 4 + \frac{x}{2}]$.

Всего чисел в промежутке $[-5 + \frac{x}{2}; 4 + \frac{x}{2}]$ -

$$4 + \frac{x}{2} - (-5 + \frac{x}{2}) + 1 = 10. \text{ Всего тогда для таких } x$$

количество k_3 равно $5 \cdot 10^6$. Пусть теперь $x \in [-3; -1; 1; 3]$.

Тогда $k_3 \in [-5 + \frac{x+1}{2}; 4 + \frac{x-1}{2}] \Rightarrow k_3$ принимает

$$4 + \frac{x-1}{2} - (-5 + \frac{x+1}{2}) + 1 = 9 + 1 - 1 = 9 \text{ значений.}$$

Значит, всего $4 \cdot 9 = 36$.

Итого
стр 2/4



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда для α все в том же случае будет

$$50 + 36 - 1 = 85 \quad (1 \text{ вычитаем один случай строки или значение } x = -4; k_3 = -7).$$

Теперь посчитаем для второй пары:

Аналогично смотрим стр. случай.

$$\frac{x}{4} = -1 \text{ и } \frac{3x + 2k_4 + 1}{9} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -4 \text{ и } 3x + 2k_4 + 1 = -9 \Rightarrow -11 + 2k_4 = -9$$

$$\Rightarrow k_4 = 1.$$

Теперь перебираем: $-4 \leq x \leq 4$ и

$$9 \leq 3x + 2k_4 + 1 \leq -9 \Rightarrow 9 - 3x \leq 2k_4 + 1 \leq -9 - 3x$$

$$\Rightarrow 8 - 3x \leq 2k_4 \leq -10 - 3x.$$

$$\text{Пусть } x \in \{-4, -2, 0, 2, 4\} \Rightarrow k_4 \in \left[4 - \frac{3x}{2}; \right.$$

$$\left. \Rightarrow k_4 \in \left[-5 - \frac{3x}{2}; 4 - \frac{3x}{2}\right]. \text{ Тогда чисел } k_4 \text{ будет}$$

$$\text{чисел } k_4 \text{ в этом промежутке ровно } 4 + 1 - (-5) =$$

$$= 10. \text{ Тогда для каждого } x \text{ будет решений всего}$$

$$\text{числа } 5 \text{ всего будет } 5 \cdot 10 = 50 \quad \text{Итого}$$

$$\text{Если же } x \in \{-3, -1, 1, 3\}, \text{ то } k_4 \in \left[4 - \frac{3x-1}{2}; -5 - \frac{3x-1}{2}\right]$$

$$8 - 2x - X \leq 2k_4 \leq -10 - 2x - X \Rightarrow k_4 \in \left[-5 - X - \frac{X-1}{2}; \right.$$

$$\left. 4 - X - \frac{X+1}{2}\right] \Rightarrow k_4 \text{ будет } 4 - (-5) + 1 = 10 - 1 = 9 \quad \text{стр 3/4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Итого $9 \cdot 4 = 36$. Тогда всего $50 + 36 - 1 =$
 $= 85$ (с учетом одобрающих).

Тогда, вообще все нап равно $85 - 2 = 170$.

Итого
СТР 4089



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4. Ответ: 7.

Пусть n -классов 11 классников, ахкомы оиень в конце месяца

Вероятность того, что Пети и Васа будут вместе в начале месяца равна $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^2}$ (Всего C_n^2 способ разбить класс.

Если Пети и Васа вместе в начале месяца, то с оставшихся $n-2$ человек нужно выбрать 2 человека).

Аналогично, в конце месяца

$$\text{Окажется, что } \frac{35 \cdot C_{n-2}^2}{C_n^2} = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} = \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$$= \frac{x(x-1)}{n(n-1)} = \frac{35 \cdot 4 \cdot 3}{n(n-1)}, n \geq 1$$

$$\Rightarrow x(x-1) = 14 \cdot 3 = 7 \cdot 6 \Rightarrow x = 7, \text{ и } x \in \mathbb{N}, \text{ а } n \in \mathbb{N}$$

$x(x-1)$ монотонно растет при $x \geq 1$ ($x \geq 1$ - очевидно).

Заметим, что это возможно, если $n \geq x$.

Если бы $x > n$, то так по распределению между классами классники не разделились, поэтому все C определены корректно.

Таким же образом формула верна

когда $p = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ - кол-во корней, $\frac{1}{3}$ - кол-во

всех исходов

ИМСТ 7
СТР 1 из 1

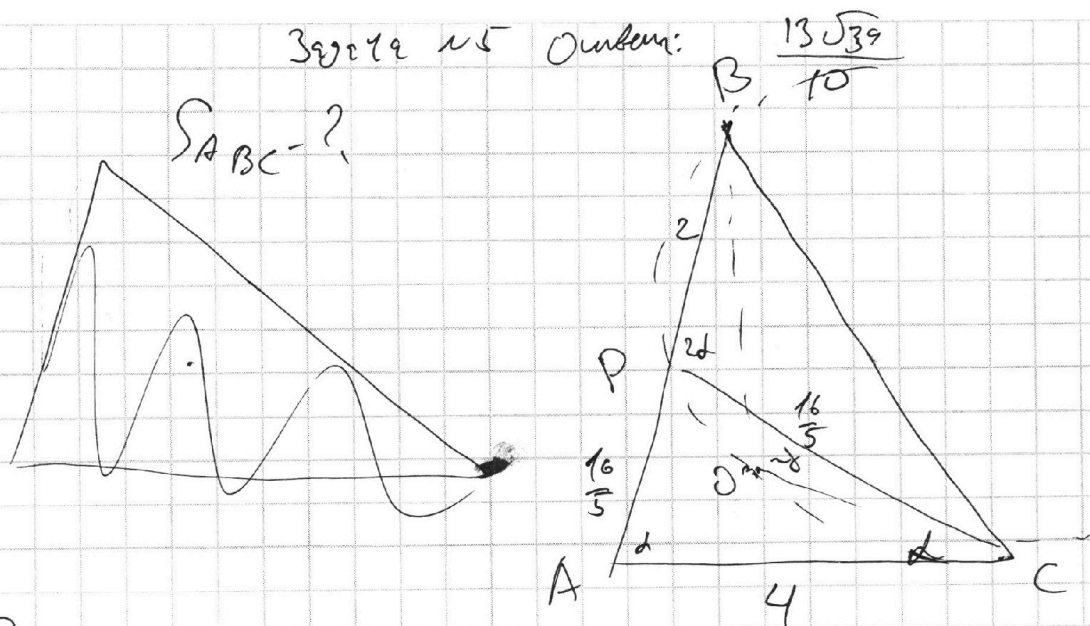
сф



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение.

Пусть $\angle A = \alpha$. Тогда $\angle BOC = 2\alpha$, т.к. O — центр

(ABC). Тогда $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$, т.к. B, P, O, C лежат

на одной окружности. Тогда $\angle PCA = \angle BPC - \angle PAC =$

$= 2\alpha - \alpha \Rightarrow \triangle APC$ — равнобедренный $\Rightarrow AP = PC \Rightarrow$

$\Rightarrow PC = AP = \frac{16}{5}$. По теореме косинусов для $\triangle APC$:

$$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot AC \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{16}{5} \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 4 \cdot \frac{16}{5} \cos \alpha = 4^2 \Rightarrow \frac{128}{5} \cos \alpha = 16 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{8}.$$

$$\text{Тогда } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{64} = \frac{64-25}{64} = \frac{39}{64}$$

$$\text{Тогда } \sin \alpha = \frac{\sqrt{39}}{8}, \text{ т.к. } \alpha \in [0, 90^\circ]. \text{ Тогда по теореме}$$

$$\text{Синуса } S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot \sin \alpha = \left(\frac{16}{5} + 2\right) \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{26\sqrt{39}}{10} = \frac{13\sqrt{39}}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= \frac{26}{5} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{26\sqrt{39}}{20} = \frac{13\sqrt{39}}{10}.$$

лист 9



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

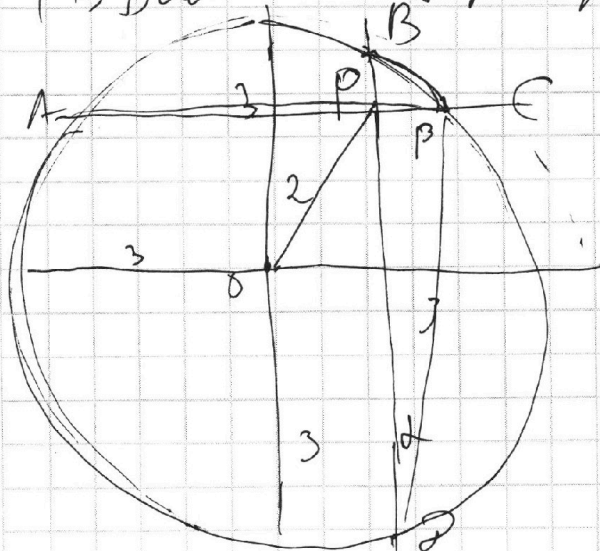
СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6. Дана: $3\pi + 45^\circ$

Заметим, что условие $x^2 + y^2 \leq 9$ эквивалентно, что (x, y) лежит внутри окружности $x^2 + y^2 = 9$ и



Кроме того $2\cos\alpha \in [-2; 2]$
 $2\sin\alpha \in [-2; 2]$
 $\Rightarrow x = 2\cos\alpha$

Нарисуем прямые

$x = 2\cos\alpha$, $y = 2\sin\alpha$. Тогда

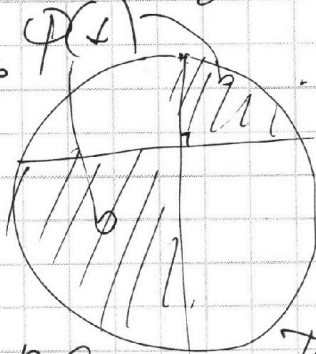
они пересекают нашу окружность

и.е. $[-2; 2] \subset [-3; 3]$.

Пусть AC - дуга пересечения $y = 2\sin\alpha$ с окружностью, а BD - дуга пересечения $x = 2\cos\alpha$ с окружностью. Тогда по Т. Паскаля мы хотим посчитать периметр

объединения 2 дуг и 2

отрезков.



Эта фигура -

много

Заметим, что $AC \perp BD$.

Тогда $\angle BOC = \alpha$

$\Rightarrow \angle BOC = 2\alpha$, и.е. O - центр описанной $\triangle BOC$. Пусть $\beta =$

$= \angle AOC = \angle AOD = 2\beta \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = \angle BOC + \angle AOD = 90^\circ \cdot 2 = 180^\circ$

и.е. $\alpha + \beta = 90^\circ$ в треугольнике BOC, P - пересечение AC и BD строим



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

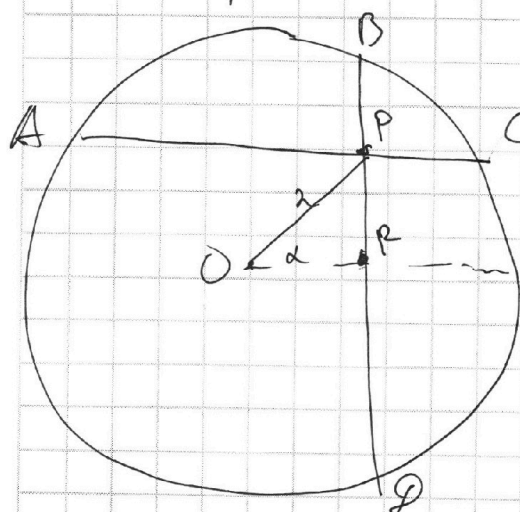
СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Потому что } \widehat{BC} = \frac{2\pi R \cdot 2}{360^\circ} \text{ и } \widehat{AD} = \frac{2\pi R \cdot 2}{360^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R \widehat{BC} + \widehat{AD} = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot 180^\circ = \frac{2\pi R}{2} = \pi R = \pi \cdot 3 = 3\pi.$$

Потому что сумма дуг не зависит от α , рассмотрим теперь периметр. Заметим, что $OP = \sqrt{4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha} = \sqrt{4} = 2$



Заметим, что $BP^2 = OR^2 + BR^2$,

и $OP^2 = OR^2 + PR^2$

$$\Rightarrow OP^2 = OR^2 + PR^2$$

$$\Rightarrow OB^2 - OP^2 = BR^2 - PR^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 - 4 = 5 = BR^2 - (2\sin\alpha)^2$$

$$\Rightarrow BR^2 = 5 + 4\sin^2\alpha.$$

Заметим, что $BR^2 = RP^2$, так $OR \perp BD$ и

$$OB = OP (\triangle BOP - \text{равнобедренный}) \text{ Потому } BD^2 = 4BR^2 = 20 + 16\sin^2\alpha.$$

$$\text{Аналогично что } AC^2 = 20 + 16\cos^2\alpha.$$

$$\text{Потому } AP + PD + BR + PC = AC + BD = \sqrt{20 + 16\sin^2\alpha} + \sqrt{20 + 16\cos^2\alpha}.$$

Мы хотим максимизировать эту сумму. Пусть

$$\sin^2\alpha = x, \cos^2\alpha = y. \text{ Тогда } x, y \geq 0 \text{ и } x + y = 1.$$

и т.д.

стр. 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда мы хотим найти максимум $\sqrt{20+16y} + \sqrt{20+16x}$. Заметим, что ~~ва~~ по неравенству между средним арифметическим и квадратическим имеем:

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{20+16y})^2 + (\sqrt{20+16x})^2}{2}} \geq \frac{\sqrt{20+16y} + \sqrt{20+16x}}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{40+16}{2}} \geq \frac{\sqrt{20+16y} + \sqrt{20+16x}}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{20} \geq \sqrt{20+16y} + \sqrt{20+16x} \Rightarrow 4\sqrt{7} \geq \sqrt{20+16y} + \sqrt{20+16x}$$

~~Вот~~ Приём равенства тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{20+16y} = \sqrt{20+16x} \Leftrightarrow x=y. \text{ Поэтому периметр этой}$$

$$\text{фигуры не превосходит } 3\pi + 4\sqrt{7} \leq 3\pi + 4\sqrt{7}.$$

$$\text{Заметим, что } x=y \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} = \sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Поэтому нам видны: } 3\pi + 4\sqrt{7}, \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}.$$

Здесь я использую очевидное утверждение про равенство 0 средних для 2 чисел.

ИМСТ 11

CTP1
unct(2)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
2 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что данная величина симметрична
относительно x_i и x_{i+1} . Кроме того, если одна из них
известна, то вторая определяется однозначно, и, к
полученным линейным уравнениям относительно T , которое
имеет не более одного решения. Следовательно, если известно
одно $\cos \alpha$ $(2a + 2a \cos \alpha (a + x_i) - (a + x_{i+1})^2 = 2a^2 + 2ax_i + 2ax_{i+1} - x_{i+1}^2)$
 $\Rightarrow a + 2a \cos \alpha (a + x_i) - 2a^2 - 2ax_i = x_{i+1}^2 - (2a + 2x_i)$
 $= x_{i+1}^2 (2a - 2x_i - 2a \cos \alpha (a + x_i))$
при $\cos \alpha = \frac{2a^2 + 2a(x_i + x_{i+1}) - x_i x_{i+1}}{2(a + x_i)(a + x_{i+1})} =$
 $= \frac{2(a - x_i)(a + x_{i+1}) - x_i x_{i+1}}{2(a + x_i)(a + x_{i+1})} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 1 - \cos \alpha = \frac{x_i x_{i+1}}{(a + x_i)(a + x_{i+1})} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{(1 - \cos \alpha)(a + x_i)}{2x_i} = \frac{x_{i+1}}{a + x_{i+1}} = 1 - \frac{a}{a + x_{i+1}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{a + x_{i+1}}{a} = \frac{1 - (1 - \cos \alpha)(a + x_i)}{2x_i}$
П.к. x_{i+1} уже известно, то $\frac{a + x_{i+1}}{a}$ будет определено.
и наоборот

Итого
СТР. 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☒

СТРАНИЦА

2 ИЗ 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $x_i = y_{i+1}$.

Далее так, т.к. $f(x_i, y_i) = f(x_{i+1}, y_{i+1}) = f(y_i, y_{i+1}) =$

$= f(y_{i+1}, y_i)$, т.к. $y_i = x_i$, т.к. отрезки касательны

$\Rightarrow x_i = y_{i+1}$. Тогда все $\triangle A_i A_{i+1}$ равны между собой,

что и по I признаку.

Заметим, что если n — нечетно,

то заметим еще, что $A_i A_{i+1} = \text{const}$.

Кроме того, $x_i = x_{i+1}$ и $x_{i+1} = x_{i+2}$ для любых i (по

первому признаку). Тогда $A A_i = A A_{i+1}$ для всех i .

Тогда рассмотрим нечетные i . Для них есть точки

A_i — точки касания (также хотя бы 3 точки касания n).

Если n — нечетно, то $A A_i = \text{const}$ для всех $i \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~А. имеет усеченную конусную поверхность остовления.~~

Если n — четно, то n — четно, и тогда $A_i A_{i+1} = \text{const}$ для всех i .

Если n — четно, то n — четно, и тогда $A_i A_{i+1} = \text{const}$ для всех i .

Проведем через A_i и A_{i+1} плоскость, параллельную плоскости $A A_i A_{i+1}$.

Проведем через A_i и A_{i+1} плоскость, параллельную плоскости $A A_i A_{i+1}$.

Проведем через A_i и A_{i+1} плоскость, параллельную плоскости $A A_i A_{i+1}$.

стр. 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

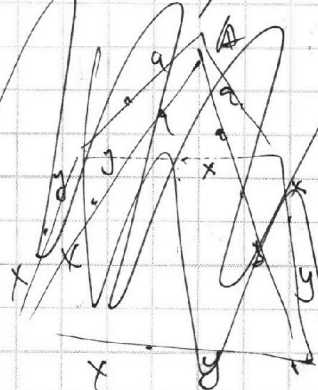
СТРАНИЦА

4 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда эти плоскости будут содержать одну точку
Но тогда эти плоскости параллельны плоскости, и, следовательно, они содержат все точки с индексами одной четности и для каждого такого индекса k_i C_i имеем $AA_i = \text{const}$. Заметим, что при гомотетии с центром A и коэффициентом k_i плоскость переходит в плоскость, содержащую сторону, эти плоскости равны $\Rightarrow AA_{i+1} = AA_i =$
 $\Rightarrow AA_i = \text{const}$ для всех i .

Если $n=4$, то: основные углы равнобедренной трапеции равны все стороны



лист 15

Проведем через A_1 плоскость Π основанию и через A_2 тоже. Тогда первая плоскость содержит в себе все нечетные точки, а вторая все четные. Заметим, что AA_i зависит только от четности i . Заметим, что стороны, эти плоскости гомотетичны с центром A с коэффициентом $\frac{AA_{i+1}}{AA_i}$. Значит, они совпадают, т.е. $n \geq 8$ (знаем на каждой стороне по 7 точек)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
6 ИЗ 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проведем темер, через точки (A_1, A_2) и (A_3, A_4)
плоскости, // основанию. Получим картинку Рис. 2
Построим все пересечения обозначим так, как
на картинке (там все B_i). У нас A_1, A_2, A_3, A_4
лежат в одной плоскости. Заметим, что
середина A_1A_3 совпадает с серединой A_2A_4
 $\Rightarrow$ эти плоскости пересекаются, но они перпендикулярны.
Тогда они совпадают.
Таким образом мы доказали, что усеченная пирамида
// плоскости основания. Тогда в таком случае она
полностью совпадает. Если R радиус σ , а r — радиус ω ,
остается только отметить, как посчитать угол между
бровками.

ИМСТ 17



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

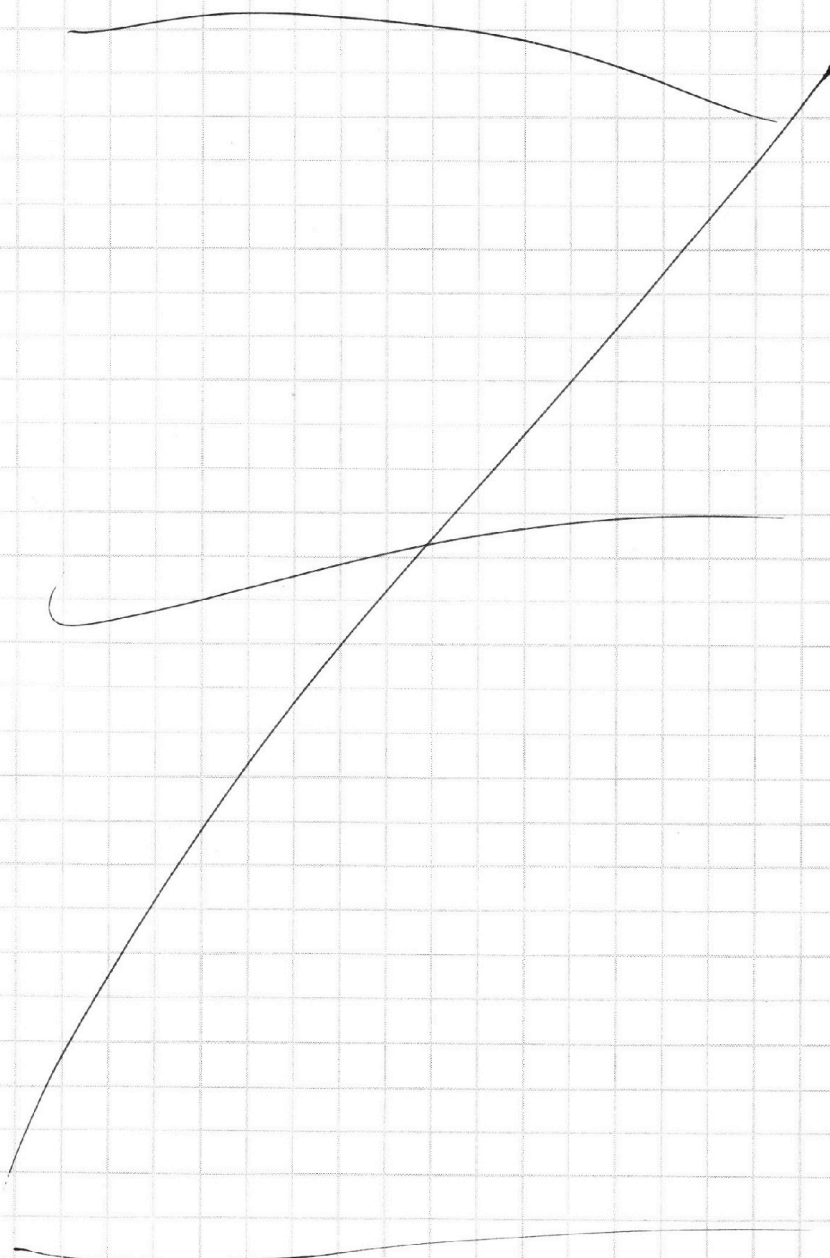
6
☒

7
☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

черновик





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

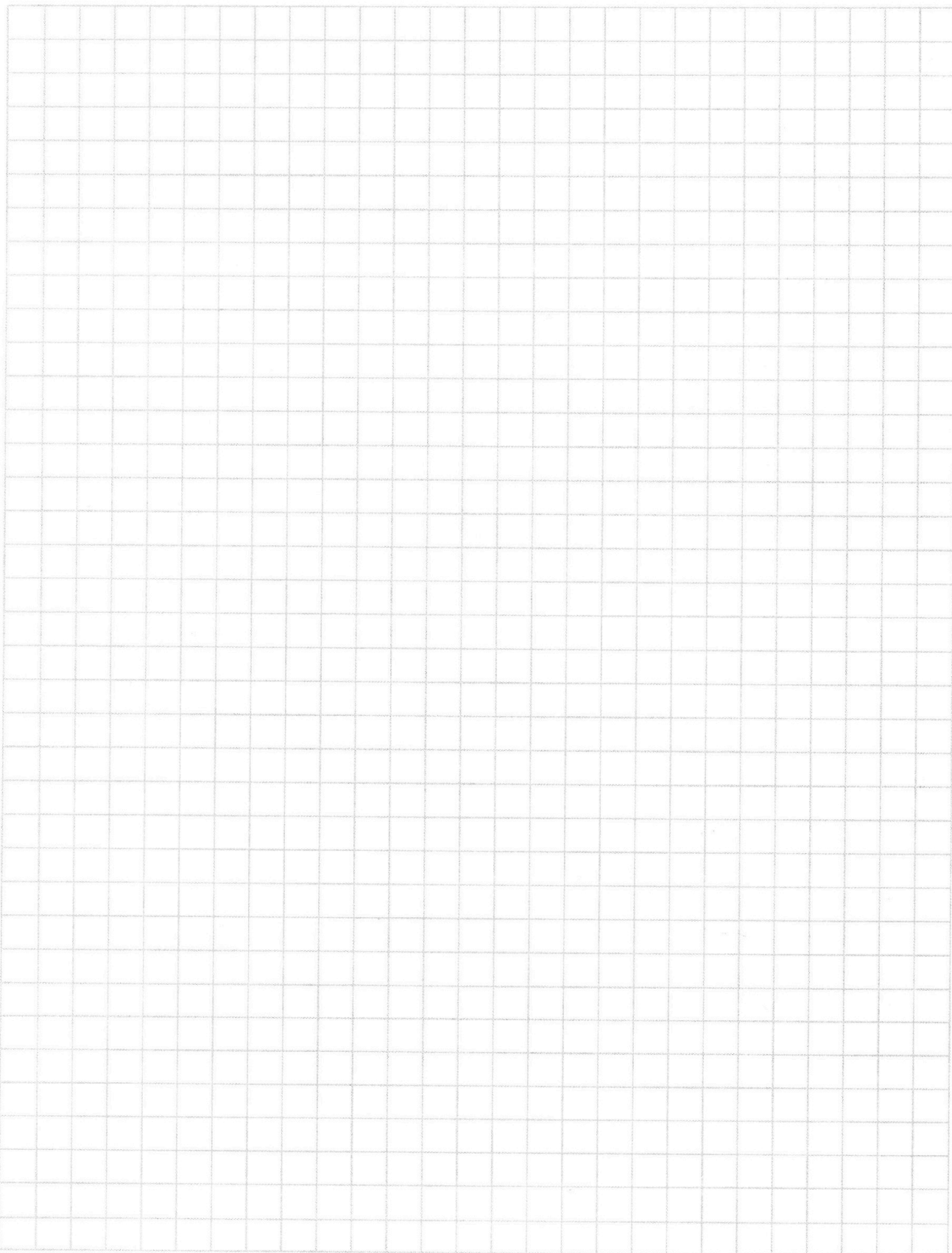
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



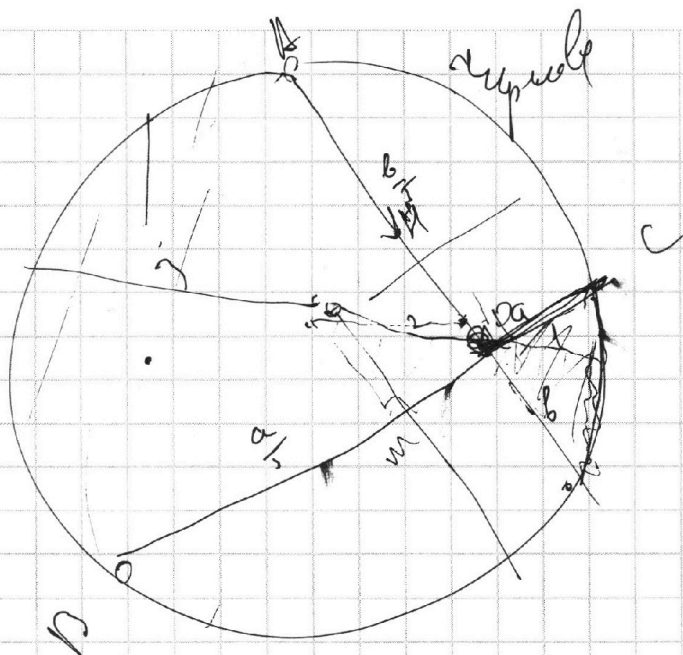


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

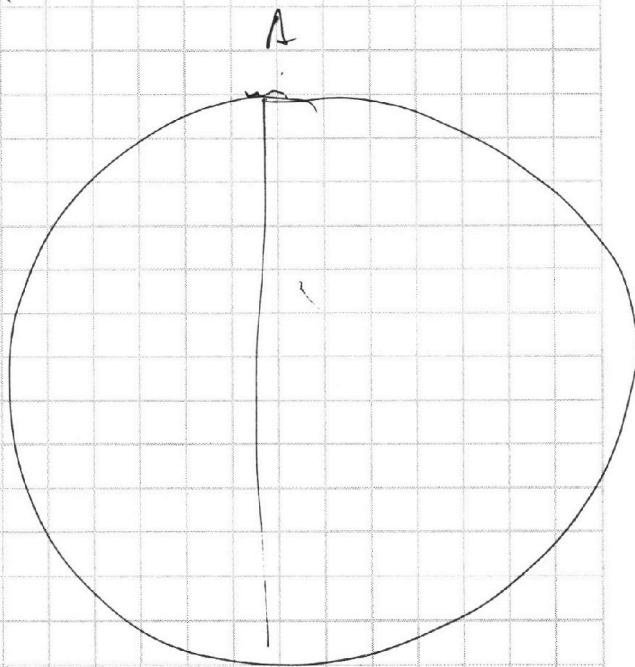
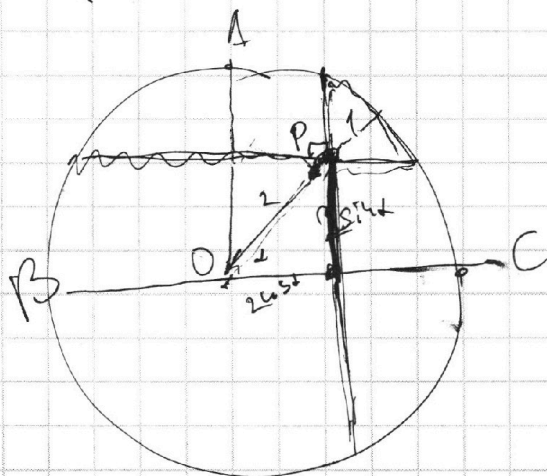
1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1.5-3

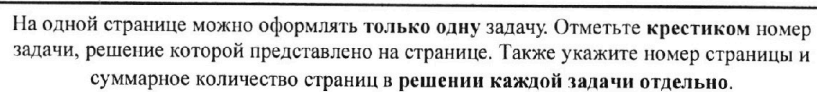


9-7

$$3^2 - 2^2 = x_1^2 - 4 \sin^2 \alpha$$
$$\Rightarrow 5 + 4 \sin^2 \alpha = x_1^2$$

$y_1 =$

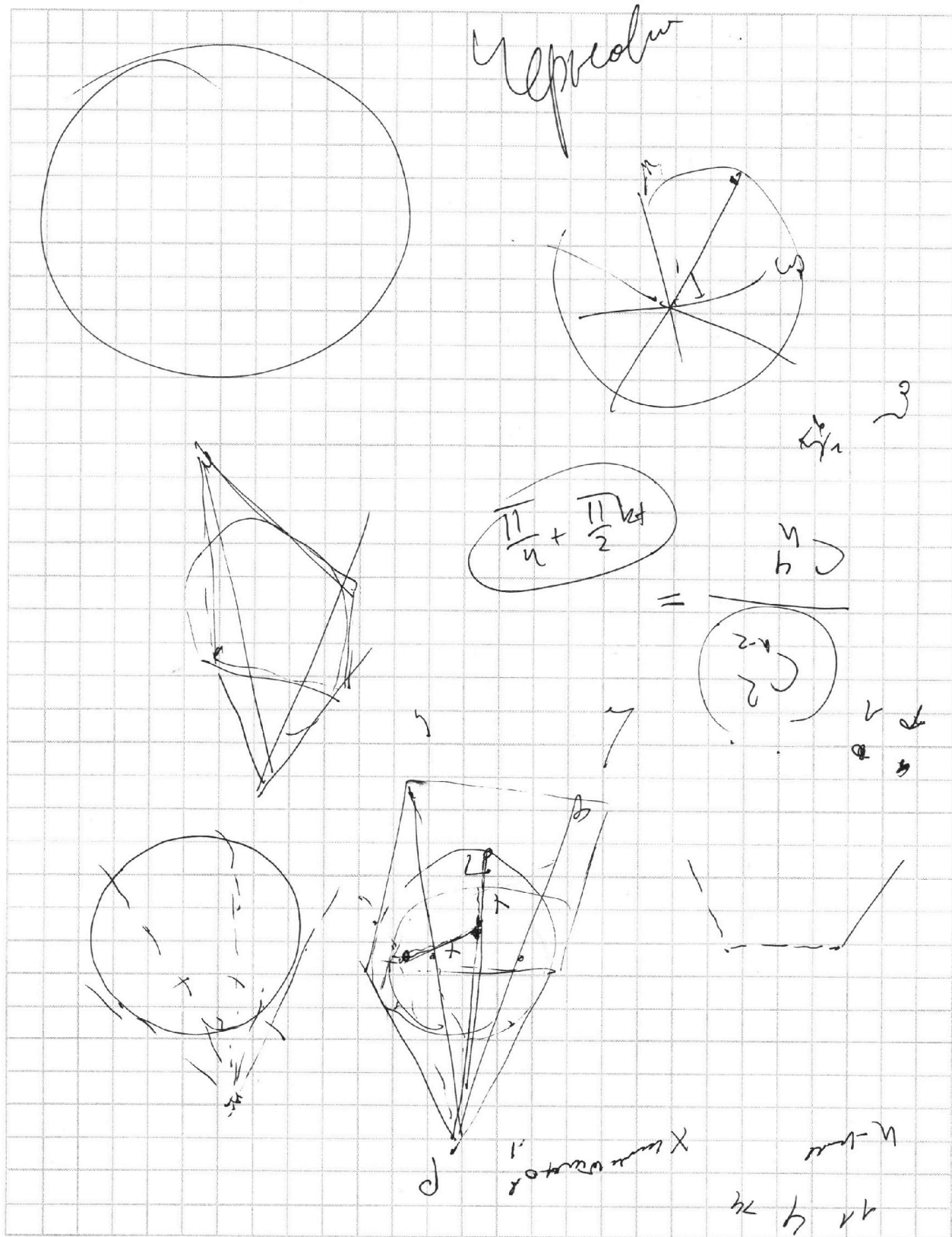
x_1



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a pyramid.

Top Diagram: A pyramid with apex A and base a square. A point O is marked on the base. A line segment is drawn from A to O. A right triangle is formed with hypotenuse $\sqrt{2}a^2 + 5$ and one leg $a+x$. Other labels include a , x , $2x$, and r .

Equations:

$$r \cdot (4S + S_1) = V = S_1 h$$
$$S_1 h = \frac{V}{4+x}$$
$$\frac{S_1 h}{4S + S_1} = \frac{S_1}{4+x}$$

Bottom Diagram: A pyramid with apex A and base a square. A point O is marked on the base. A line segment is drawn from A to O. A right triangle is formed with hypotenuse $\sqrt{R^2 + a^2}$ and one leg $R^2 + \sqrt{a^2}$. Other labels include a , x , and R .

Equations:

$$\sqrt{R^2 + a^2}$$
$$\sqrt{R^2 + \sqrt{a^2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновики

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = \cos \pi x + \cos \pi y$$

$$\pi x = x$$

$$\pi y = y$$

$$(\sin x - \sin y) \sin x = \cos x + \cos y$$

$$\sin^2 x - \sin y \sin x = \cos^2 x + \cos y \cdot \cos x$$

> $\cos$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin y \sin x + \cos y \cdot \cos x$$

$$-\cos(2x)$$

$$\cos \cos(y-x)$$

$$\cos \cos x$$

$$= \cos(y-x)$$

$$\pi - 2x \pm (y-x) = 2\pi k$$

$$\pi - 2\pi x \pm (\pi y - \pi x) = 2\pi k$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$A = \overline{xxx} \subset x \cdot (1111) 11(101)$$

$$B = \overline{abc} : 101$$

$$\overline{abc} : 101 \Rightarrow B : 101$$

$$C = \overline{de} : 101$$

ABC $\rightarrow$

$$\Rightarrow B = 101$$

$$de = 55$$

$$x, y \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{l} (101) \\ 202 \\ 303 \\ 404 \\ 505 \\ 606 \\ 707 \\ 808 \\ 909 \end{array}$$

$$M = (x^3 - y^3 - 9xy)$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

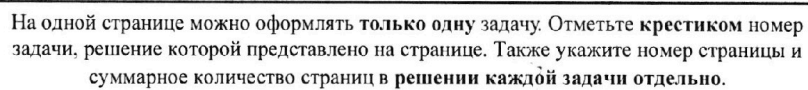
$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3) = xy - 3y + 3x$$

$$0 = -3 - y + x \quad M = (3+y)^3 - y^3 - 9y(3+y) =$$

$$3+y=x$$

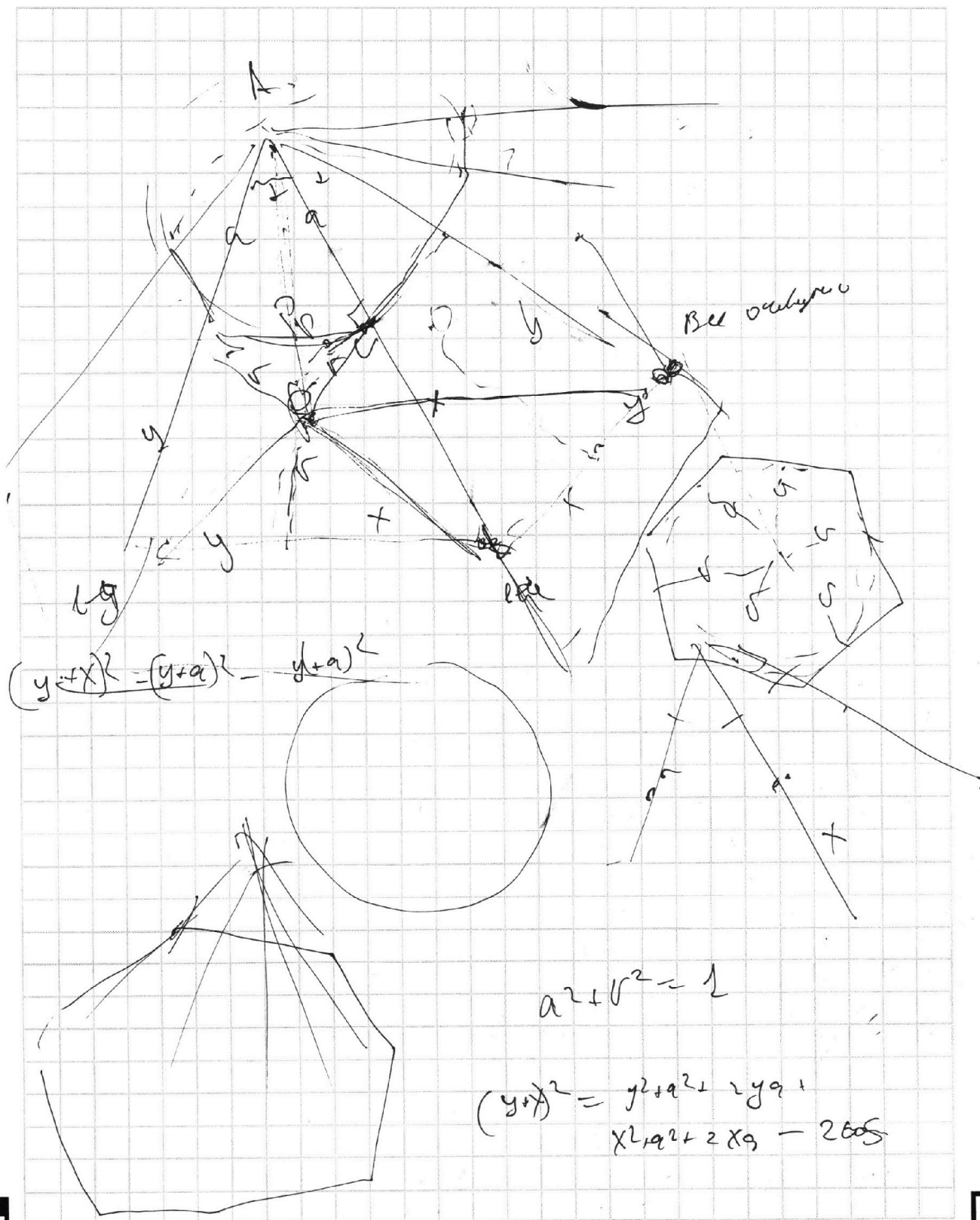
$$= 27 + 9y + 3y^2 + 3y^3 - 27y - 9y^2 = 27 + 3y^3 - 18y - 6y^2 = 27$$



1 2 3 4 5 6 7

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





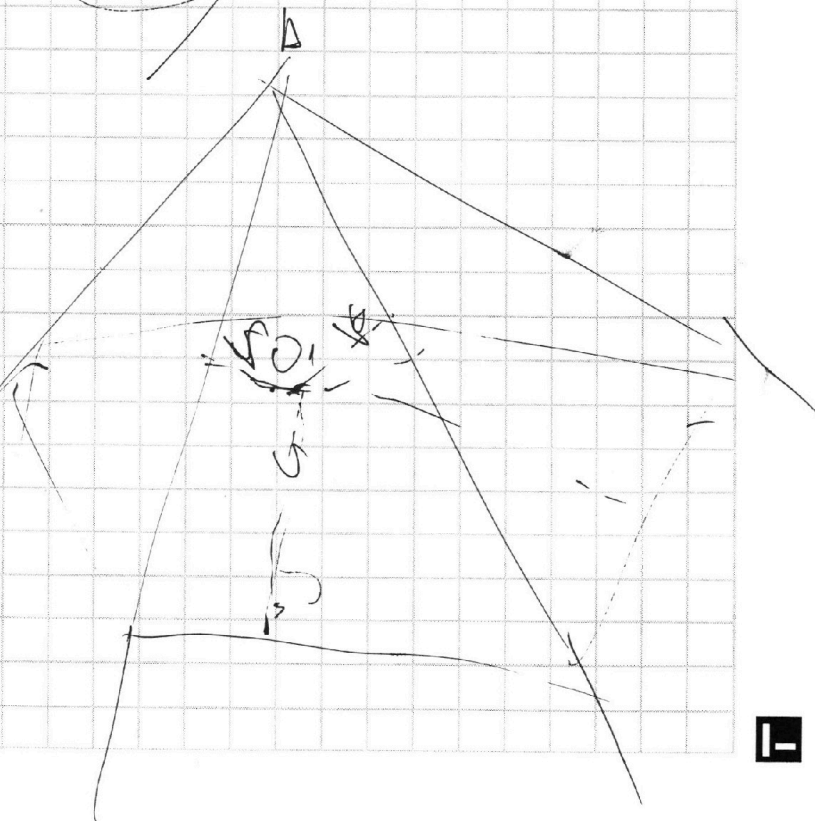
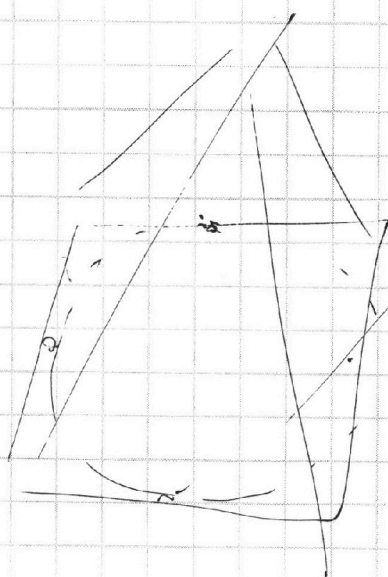
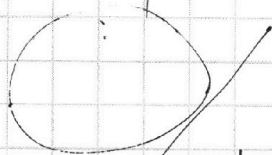
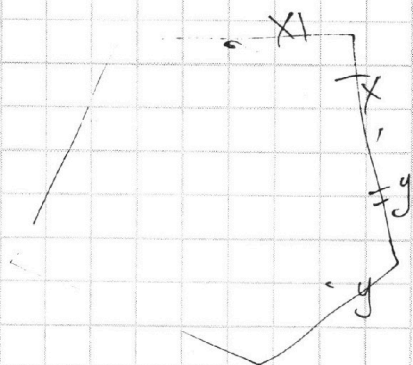
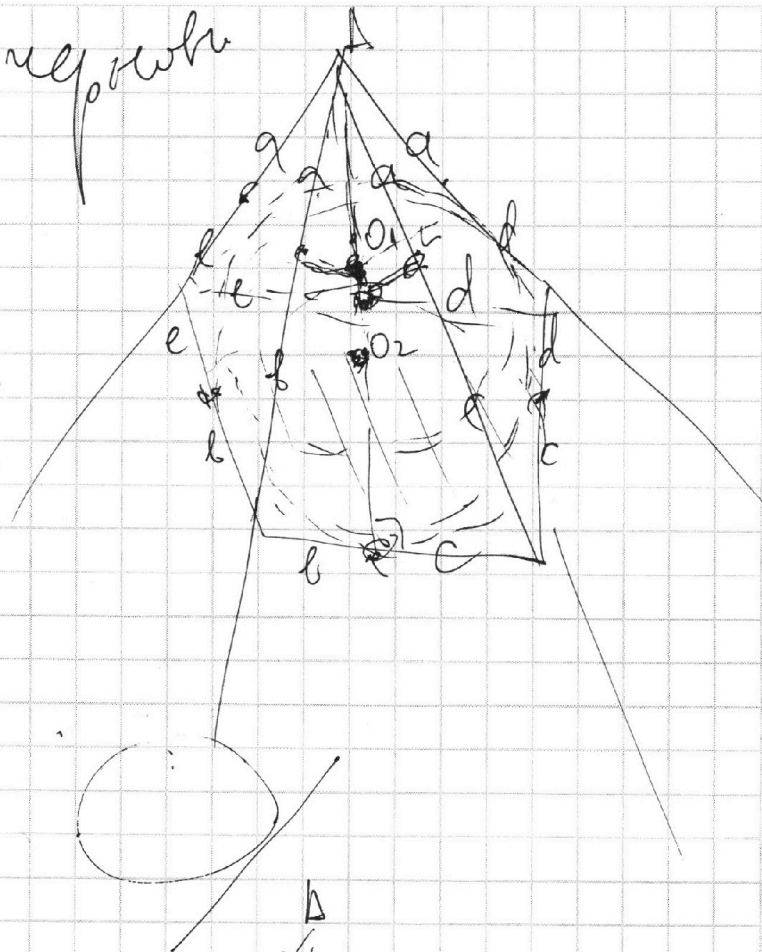
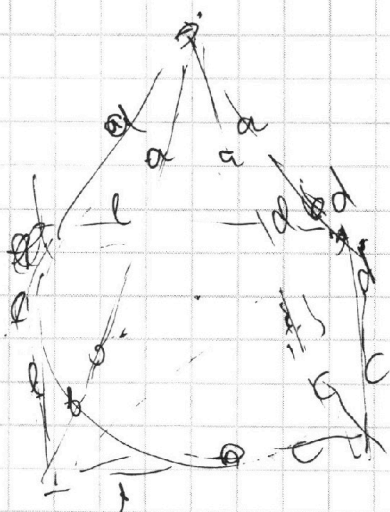
На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

чернови





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

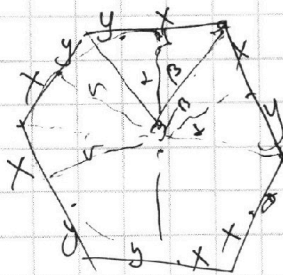
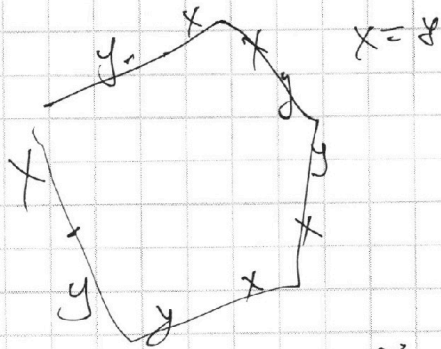
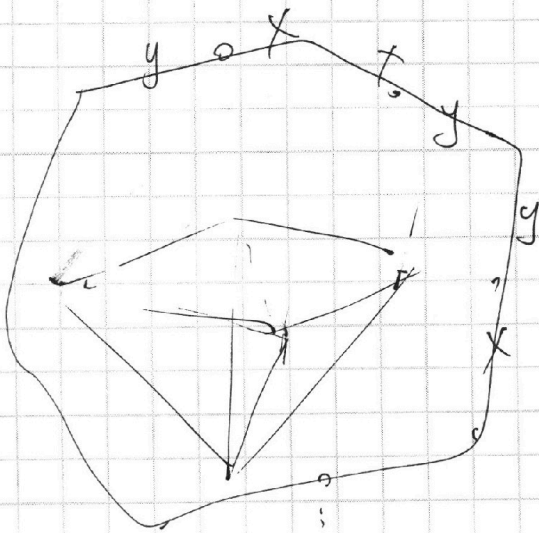


СТРАНИЦА
__ ИЗ __

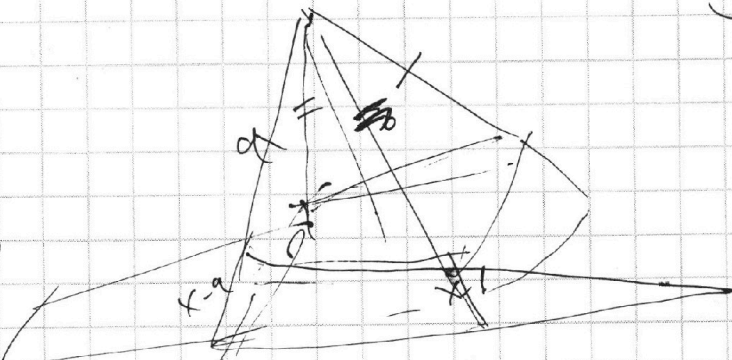
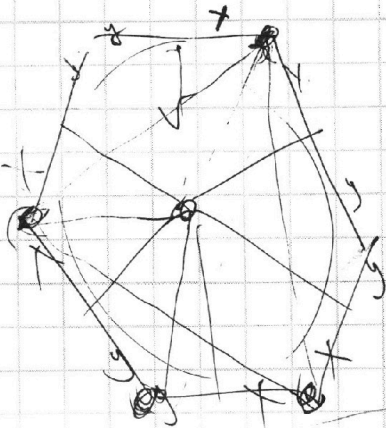
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(y+x)^2 = y^2 + x^2$ черновики $(y+a)^2 + (x+a)^2 - 2(y+a)(x+a) \cos \alpha =$

$$\frac{2a^2 + 2a(y+x) - 2yx}{(y+a)(x+a)} = \cos \alpha$$
 w $a = x_i + \cos(\alpha_i) x_i$



$$2x_i = (1 - \cos \alpha) (a + x_i)$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

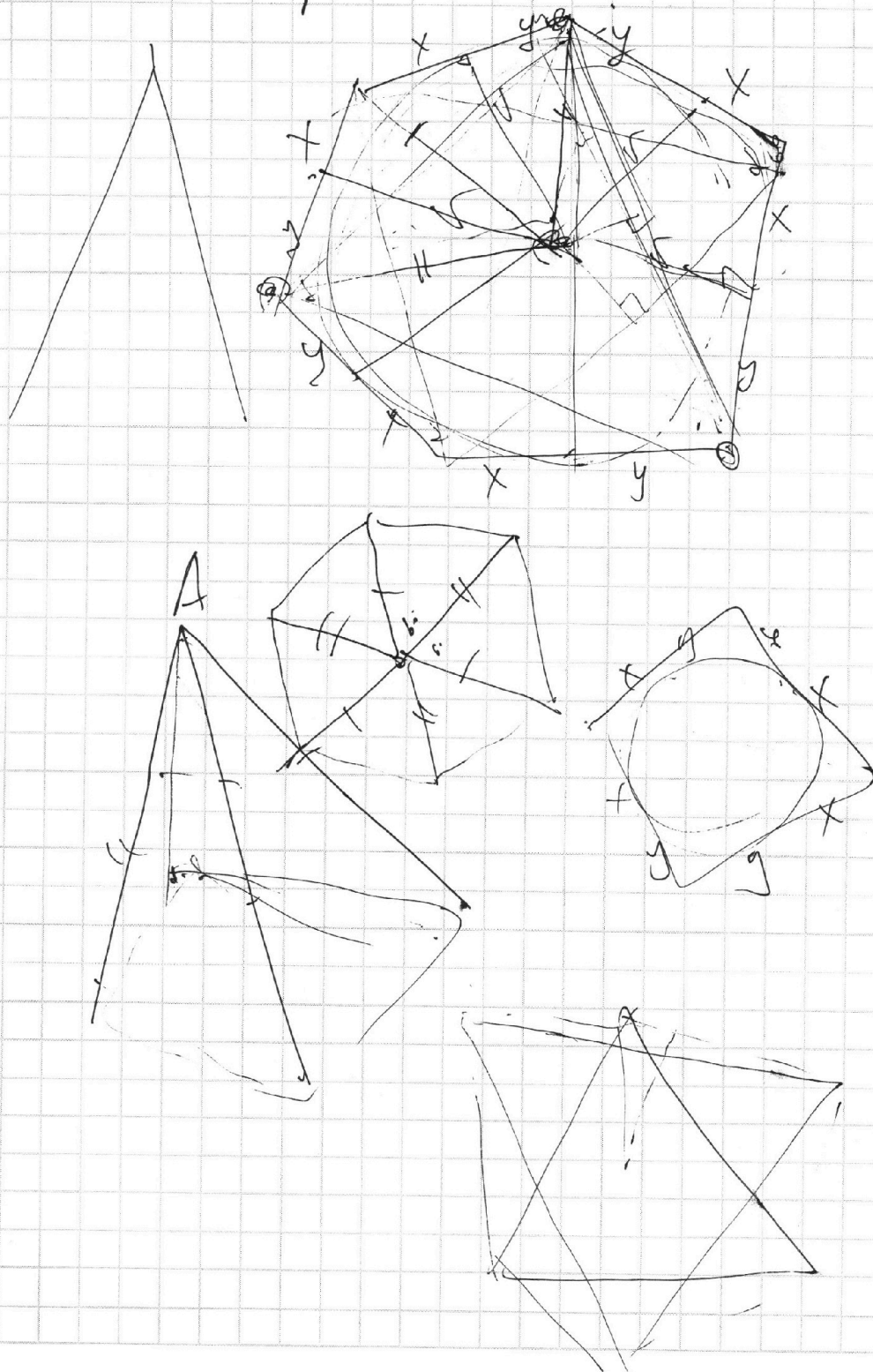


СТРАНИЦА

— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновики





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

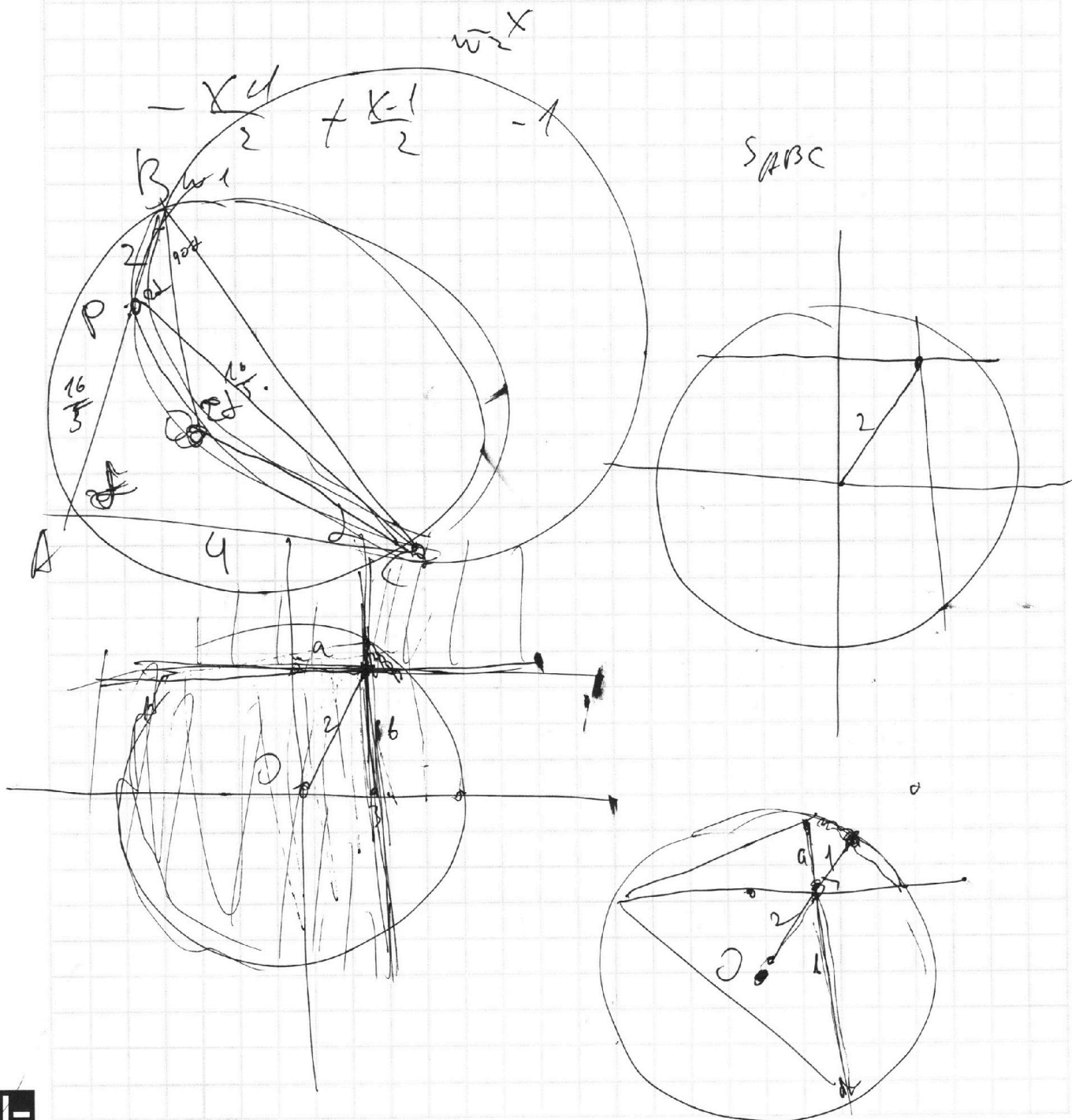
$k_1 = 2,5$ $k_2 = 2,5$

$$S - 2x - x = 2k_1 =$$

$w = x$

$$- \frac{x-4}{2} + \frac{x-1}{2} - 1$$

S_{ABC}





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

черновики

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{2k_3 + 1 - x}{9} < 2\pi$$

||
 α_1

||
 α_2

$$\cos \alpha_1 = \frac{x}{4}$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{2k_3 + 1 - x}{9}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 < 2\pi$$

$$1 \geq \frac{x}{4} \geq -1$$

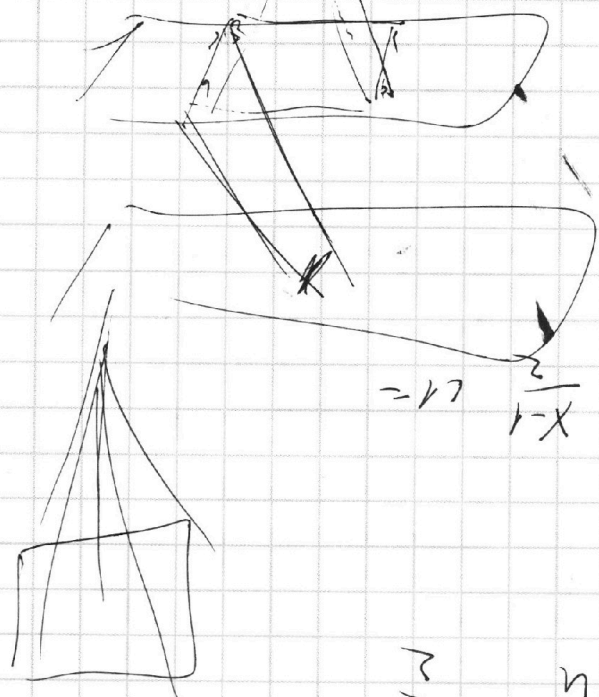
$$\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \geq 1 \Rightarrow \frac{2k_3 + 1 - x}{9} \geq -1$$

$$-4 \leq x \leq 4$$

$$9 > 2k_3 + 1 - x \geq -9$$

$$8 - 3 \times 2,264$$

$$8 - 3 \times 2,264 - \frac{3 \times 1}{2} \times 2,264$$



$$= 1,7 \times \frac{2}{1-x} + \frac{2}{1+x}$$

$$1,7 \times 2 - 9$$

$$\frac{2}{1-x} \geq \frac{2}{1+x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА

__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

черновик.

(x > 0)

$$\left(\frac{u}{u} = p\right) \frac{1}{3,5} = \frac{\binom{u-2}{u-2}}{\binom{u}{u}} = \frac{(u-2)!}{2! (u-4)!} \cdot \frac{u!}{4! \cdot u!}$$

$$\frac{u}{p}$$

$$= \frac{3 \cdot 4}{u(u-4)}$$

$$\rightarrow u(u-4) = 12 \cdot 3,5 = 6 \cdot 7$$

$$u = 6.$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p} \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{p}$$

$$\frac{x}{u} = p'$$

$$1 \cdot 1$$

$$2 \cdot 2$$

$$\{3,5\} p \cdot p \cdot (1-p)^{u-2} = p' \cdot p' \cdot (1-p')^{u-2}$$

$$\{3,5\} \cdot \frac{46}{u^2} \cdot \left(1 - \frac{4}{u}\right)^{u-2} = x^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{u}\right)^{u-2}$$

$$56 \left(1 - \frac{4}{u}\right)^{u-2} = x^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{u}\right)^{u-2}$$

$$u \rightarrow u-5$$

$$\Rightarrow 56 (u-4)^{u-2} = x^2 (u-x)^{u-2}$$

$$\Rightarrow \frac{56}{x^2} = \left(\frac{u-4}{u-x}\right)^{u-2}$$

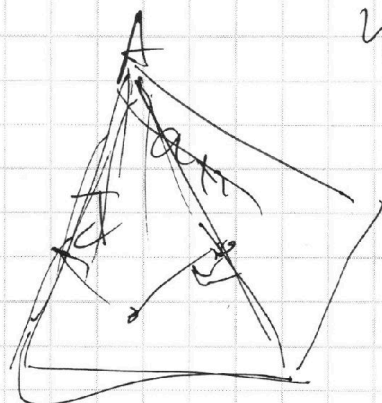


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

