



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



✦ 1. ✓ [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

✦ 2. ✓ [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

✦ 3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

✦ 4. ✓ [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

✦ 5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

✦ 6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По усл A имеет $\text{long } A = k \cdot 1111$ где $k \in [4; 9]$.

$$A = k \cdot 11 \cdot 101$$

Заметим, что 101 — простое.

Поскольку ABC — квадрат и $C \leq 100$, то

$B : 101$. Из тех $: 101$ содержащих двойку

подходят только $B = 202 = 2 \cdot 101$

Итак, что $B \nmid 11$, тогда $C : 11$.

Тогда $C = 3 \cdot 11 = 33$. (поскольку других подходящих нет).

$$ABC = k \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 6 \cdot k$$

$6k$ — квадрат, тогда $k = 6$ ~~или 24~~

$$T(A; B; C) = (6666; 202; 33)$$

Ответ: $(6666; 202; 33)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y}{xy} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$$

Пусть $k' = \frac{(x-1) + (y+1) + 2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$

По усл. $k' = k$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$(x+y+2) \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-1)(y+1)} \right) = 0$$

Отсюда
$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ xy = (x-1)(y+1) = xy - y + x - 1 \end{cases}$$

поскольку $x, y > 0$ то первое равенство невозможно. $xy = xy - y + x - 1$

$$y = x - 1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-1) = x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 3x^2 + 3x =$$

$$= x^3 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 3x^2 + 3x = 1.$$

Ответ: 1.

~~XXX~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\text{пусть } a = \pi x \quad b = \pi y.$$

$$(\sin a + \sin b) \sin a = (\cos a + \cos b) \cos a$$

$$\sin^2 a + \sin a \sin b = \cos^2 a + \cos a \cos b$$

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos^2 a - \sin^2 a = \cos(a+b) + \cos 2a = 0$$

$$\cos(a+b) = -\cos 2a$$

$$\begin{cases} a+b = 2a + \pi + 2\pi k \\ a+b = -2a + \pi + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + \pi + 2\pi k \\ b = -3a + \pi + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 + 2k \\ y = -3x + 2k + 1 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(x; y) \Leftrightarrow (x; x + 2k + 1) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$d) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} < \frac{3\pi}{2} - \arccos \frac{y}{4}$$

$$\sin(\arcsin \frac{x}{5}) < \sin(\frac{3\pi}{2} - \arccos \frac{y}{4})$$

$$\frac{x}{5} < -\frac{y}{4}$$

$$\frac{y}{4} + \frac{x}{5} < 0$$

$$\frac{x + 2k + 1}{4} + \frac{x}{5} < 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5x + 10k + 5 + 4x < 0$$

$$x < -\frac{(10k+5)}{9}$$

Ясно, что решений у такого нер-ва бесконечно много. А еще есть пара решений $y = -3x + 2k + 1$.

Ответ: а) $(x; x + 2k + 1) \quad x \in \mathbb{Q}$
 $(x; -3x + 2k + 1) \quad k \in \mathbb{Z}$

↗ бесконечно много.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n - кол-во учащихся классов.

k - кол-во добавляемых билетов.

C_n^4 - кол-во способов выбрать 4 людей из 11 классов.

C_{n-2}^{4-2} - кол-во способов выбрать двух людей из $n-2$ человек среди которых нет Васи и Пети.

Вер-ть того, что они вместе пойдут на концерт равна $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$.

Аналогичные рассуждения для $k+4$ билетов.

C_n^{4+k} - кол-во способов выбрать $4+k$ людей.

C_{n-2}^{4+k-2} - кол-во способов выбрать $4+k-2$ людей из $n-2$, среди которых нет Пети и Васи.

Вероятность, что Петя и Вася пойдут на концерт равна $\frac{C_{n-2}^{2+k}}{C_n^{4+k}}$

По у.ч.:

$$\frac{C_{n-2}^{2+k}}{C_n^{4+k}} = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \cdot 2,5$$

$$\frac{(n-2)!}{(n-4-k)! \cdot (k+2)!} = 2,5 \cdot \frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!}$$

$$\frac{n!}{(n-4-k)! \cdot (k+4)!} = \frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(n-2)!}{n!} \cdot \frac{(n-4-k)!}{(n-4-k)!} \cdot \frac{(k+4)!}{(k+2)!} = 2,5 \cdot \frac{(n-2)!}{n!} \cdot \frac{(n-4)!}{(n-4)!} \cdot \frac{4!}{2!}$$

$$(k+4)(k+3) = 2,5 \cdot \frac{4!}{2!} = 30$$

$$k^2 + 7k + 12 = 30$$

$$k^2 + 7k - 18 = 0$$

$$(k+9)(k-2) = 0$$

$$\begin{cases} k = -9 & - \text{ не имеет физ смысла.} \\ k = 2 & - \text{ подходит.} \end{cases}$$

Ответ: выделено 6 билетов.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AC = 9$$

$$AP = \frac{15}{2}$$

$$PB = 5$$

Пусть $\angle A = \alpha$.

$$\text{Тогда } \angle BOC = 2\alpha$$

посколькy он центральный.

$$\angle OBC = \angle OCB = \frac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$$

$OB = OC$ — как радиусы окруж. ω_1 . Тогда $\triangle BOC$ равноб.

$\angle OBC = \angle OCB$ посколькy опираются на 1 дугу

OC в окруж. ω_2 .

$\angle BPC = \angle BOC$ т.к. опираются на дугу BC в окруж. ω_2 .

$$\angle APO = 180 - \angle BPC - \angle OBC = 180 - 2\alpha - (90 - \alpha) = 90 - \alpha$$

т.е. PO — биссектриса $\angle APC$, посколькy $\angle APO = \angle OPC = 90 - \alpha$.

Пусть H — т. пересечения PO и AC .

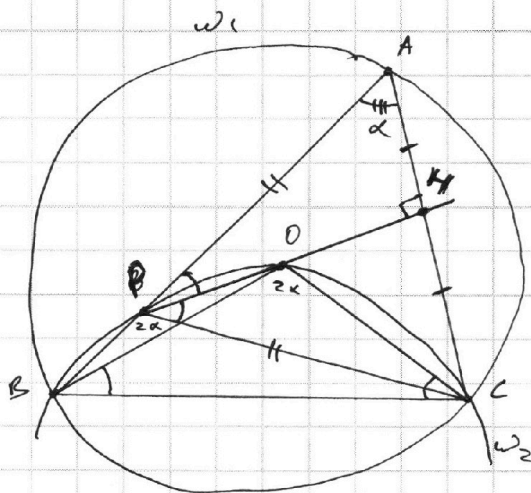
$$\text{Рассмотрим } \triangle APC, \angle AHC = 180 - (\angle A + \angle APO) =$$

$$= 180 - (90 - \alpha + \alpha) = 90^\circ \text{ т.е. } PH \perp AC \text{ и}$$

PH — биссектриса угла APC . соотв. $\triangle APC$ равнобедр.

Тогда $PC = AP$ и $AH = HC$, посколькy PH еще

$$\text{и медиана. } AH = \frac{9}{2}.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Тогда } \cos \alpha = \frac{AK}{AP} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Отсюда } \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Тогда } S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot AC \cdot AB$$

$$AB = AP + PB = \frac{15}{2} + 5 = \frac{25}{2} \quad AC = 9.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot 9 \cdot \frac{25}{2} = 45.$$

От вет: 45.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

Заменим $a = 3\sqrt{2} \sin \alpha$ $b = 3\sqrt{2} \cos \alpha$

$$\begin{cases} (x - a)(y - b) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

ур - с окружности

с центром в точке

$O(0; 0)$. и радиусом $R = 5$

Будем решать графически.

Пусть $T. A, B, C, D$ т. пересечения

прямых $x = a$ и $y = b$ с окр $x^2 + y^2 = 25$.

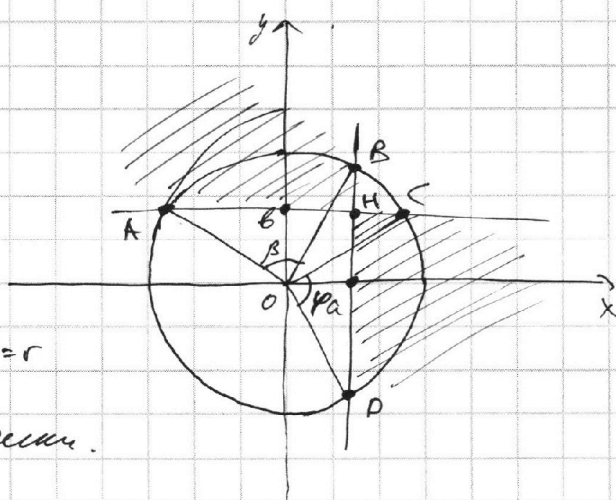
Обозначим $\angle BOA = \beta$ $\angle COD = \varphi$.

Область удовл. неравенству $(x - a)(y - b) \leq 0$ обозначим на рисунке штрихом. (///).

Заметим, что $\varphi(x)$ - это дуга AB , дуга CD ,

AK, BK, CK, DK . (K - т. пересечения $x = a$ и $y = b$).

$$M = |\overline{AB}| + |\overline{CD}| + AK + CK + BK + DK = (\beta + \varphi)R + AC + BD.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = |\vec{OD}| = r$$

$$\text{Решение } A: (-\sqrt{25-b^2}; b) \quad B: (a; \sqrt{25-a^2}) \quad C(\sqrt{25-b^2}; b) \\ D: (a; -\sqrt{25-a^2})$$

Пот. косинусов для $\triangle ABO$ и $\triangle COD$:

$$\cos \beta = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB}$$

$$\cos \varphi = \frac{OC^2 + OD^2 - CD^2}{2 \cdot OC \cdot OD}$$

$$|AB|^2 = a^2 + 25 - b^2 + 2a\sqrt{25-b^2} + 25 - a^2 + b^2 - 2b\sqrt{25-a^2} = \\ = 50 + 2a\sqrt{25-b^2} - 2b\sqrt{25-a^2}$$

$$|CD|^2 = 50 - 2a\sqrt{25-b^2} + 2b\sqrt{25-a^2}$$

$$\cos \beta = \frac{50 - (50 + 2a\sqrt{25-b^2} - 2b\sqrt{25-a^2})}{2 \cdot 25} = \frac{b\sqrt{25-a^2} - a\sqrt{25-b^2}}{25}$$

$$\cos \varphi = \frac{a\sqrt{25-b^2} - b\sqrt{25-a^2}}{25}$$

Невозможно, поскольку $\angle \angle AB < \pi$

Поскольку $\cos \beta = -\cos \varphi$, то $\beta = \pi + \varphi$. или $\beta = \varphi = \frac{\pi}{2}$.

$$AC = 2\sqrt{25-b^2} \quad BD = 2\sqrt{25-a^2}$$

$$M = 2(\sqrt{25-b^2} + \sqrt{25-a^2}) + \pi r$$

чтобы M было макс. то надо чтобы 2φ было макс.

$$\text{и } \sqrt{25-b^2} + \sqrt{25-a^2} \text{ было макс.}$$

$$\text{При этом } a^2 + b^2 = (3\sqrt{2})^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 18.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{25-b^2} + \sqrt{25-a^2} = \sqrt{b^2+7} + \sqrt{25-b^2} \quad \wedge$$

по ~~пр~~ пер. о средних между ср Аристарха и ср. ибара.

$$\frac{\sqrt{b^2+7} + \sqrt{25-b^2}}{2} \leq \sqrt{\frac{b^2+7+25-b^2}{2}} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{b^2+7} + \sqrt{25-b^2} \leq 8$$

max достигается при $b^2 = 9$. $a^2 = 9$

$$\varphi = \arccos \left(\frac{a\sqrt{25-b^2} - b\sqrt{25-a^2}}{25} \right)$$

φ максимально при $\frac{a\sqrt{25-b^2} - b\sqrt{25-a^2}}{25} = 0$, т.е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$$a = \pm \sqrt{18-b^2}$$

$$\pm \sqrt{18-b^2} \cdot \sqrt{25-b^2} - b\sqrt{7+b^2} = 0$$

$$b^4 + 7b^2 = b^4 - 18b^2 + 18 \cdot 25$$

$$10b^2 = 18 \cdot 25$$

$$b^2 = 9, \quad a^2 = 9.$$

Т.е. max $\{M\}$ достигается при $a^2 = 9$ и $b^2 = 9$.

$$a^2 = 18 \sin^2 \alpha \quad b^2 = 18 \cos^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \wedge \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \mu(\alpha) &= 2 \cdot (\sqrt{25-6^2} + \sqrt{25-4^2}) + (2\pi \cdot \cancel{r})r = 2 \cdot (4+3) + (\pi + \cancel{\pi})r = \\ &= 16 + \pi r. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k; \quad \mu = 16 + \pi r$$

[illegible]



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

из

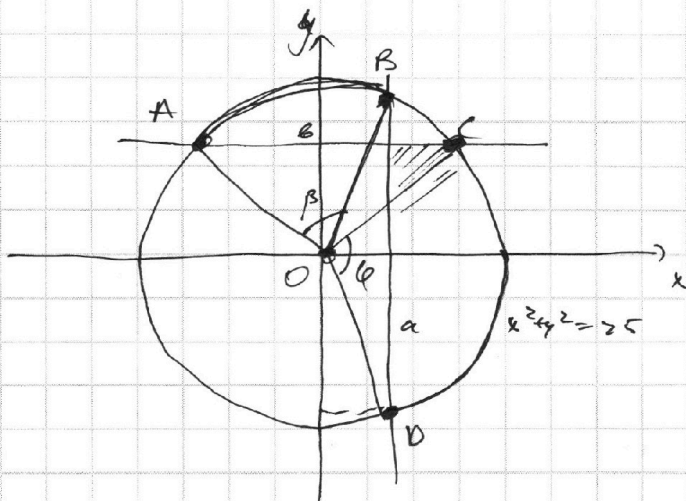
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A: (-\sqrt{25-b^2}; b)$$

$$B: (a; \sqrt{25-a^2})$$

$$C: (\sqrt{25-b^2}; b)$$

$$D: (a; -\sqrt{25-a^2})$$



$$|OA|^2 = |OB|^2 = |OC|^2 = |OD|^2 = 25$$

$$\overline{AB} = (a + \sqrt{25-b^2}; \sqrt{25-a^2} - b)$$

$$\overline{CD} = (a - \sqrt{25-b^2}; -\sqrt{25-a^2} - b)$$

$$|AB|^2 = a^2 + 25 - b^2 + 2a\sqrt{25-b^2} + 25 - a^2 + b^2 - 2b\sqrt{25-a^2}$$

$$\cos \beta = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = \frac{50 - (50 + 2a\sqrt{25-b^2} - 2b\sqrt{25-a^2})}{2 \cdot 25}$$

$$= \frac{b\sqrt{25-a^2} - a\sqrt{25-b^2}}{25}$$

$$|CD|^2 = a^2 + 25 - b^2 - 2a\sqrt{25-b^2} + 25 - a^2 + b^2 + 2b\sqrt{25-a^2} = 50 - 2a\sqrt{25-b^2} + 2b\sqrt{25-a^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{OC^2 + OD^2 - CD^2}{2 \cdot OC \cdot OD} = \frac{2a\sqrt{25-b^2} - 2b\sqrt{25-a^2}}{50}$$

$$= \frac{a\sqrt{25-b^2} - b\sqrt{25-a^2}}{25}$$

$$|\beta - \varphi| = \pi$$

$$\arccos(t) + \arccos(-t) = \pi$$

$$\beta + \varphi = \pi + 2\arccos(t)$$

$$\cos \beta = t$$

$$\cos \varphi = -t$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{b\sqrt{25-a^2} - a\sqrt{25-b^2}}{25}$$

$$a^2 + b^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$$

$$a = \pm \sqrt{18 - b^2}$$

$$25 - (a^2) = 25 - (18 - b^2) = b^2 + 7$$

$$b\sqrt{b^2 + 7} - (\pm \sqrt{18 - b^2} \sqrt{25 - b^2})$$

$$\min b\sqrt{b^2 + 7} - \sqrt{18 - b^2} \sqrt{25 - b^2}$$

$$\sqrt{b^4 + 7b^2} - \sqrt{18 \cdot 25 - 43b^2 + b^4}$$

$$b \leq 3\sqrt{2}$$

$$b^4 + 7b^2 \geq b^4 - 43b^2 + 18 \cdot 25$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ + 18 \\ \hline 43 \end{array}$$

$$\text{so } b^2 > 18 - 25$$

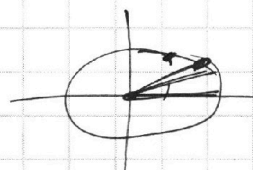
$$b^2 > 9$$

$$b > 3$$

$$b^4 + 7b^2 = b^4 - 43b^2 + 18 \cdot 25$$

$$\text{so } b^2 = 18 - 25$$

$$b = 3$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
7 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По усл $A = k \cdot 1111$, где k - цифра > 0 .

Заметим, что 1111 - простое.

Тогда, чтобы произведение ABC было и квадратом.

Итого, чтобы 1111 входило в него в четной степени.

Но так как B и $C \leq 1000$. Такое невозможно.

Ответ: ~~таких троек нет~~. Таких троек нет.

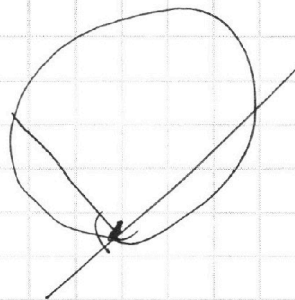
$$A = k \cdot 1111 = 11 \cdot 101 \cdot k \quad 11 \cdot 101 \cdot k$$

$$B = 202$$

$$33$$

$$C = 3 \cdot 11$$

$$k = 6$$

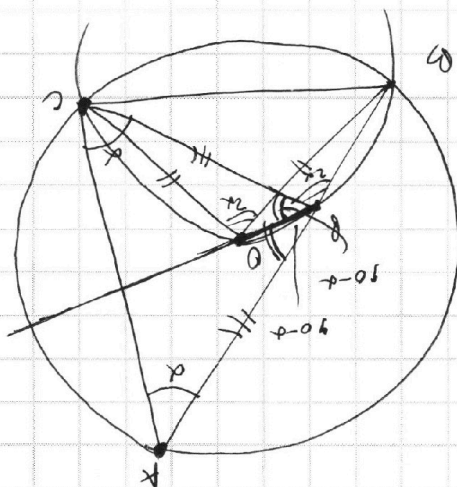


$$\begin{array}{r} 59 \\ 291 \\ \hline 522 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 291 \\ 182 - 522 \\ \hline \end{array}$$

$$AC = 5$$

$$AP = \frac{2}{5} \quad BP = 5$$



$$\begin{array}{r} 81 \\ 3+3+2+4+3 \\ \hline 15 \end{array}$$

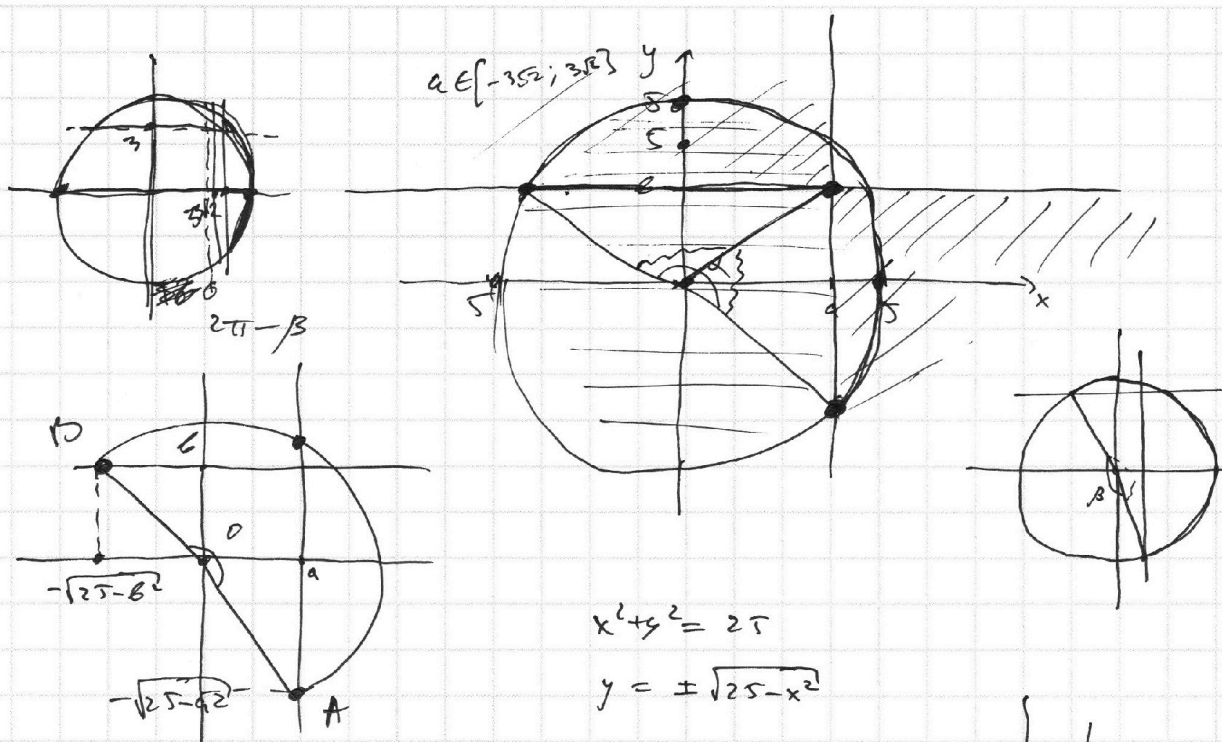


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$A: (a; -\sqrt{25-a^2})$$

$$B: (b; -\sqrt{25-b^2})$$

$$\overrightarrow{OA} = (a; -\sqrt{25-a^2})$$

$$\overrightarrow{OB} = (\sqrt{25-b^2}; b)$$

$$|OA|^2 = 25 - 2a\sqrt{25-a^2}$$

$$|OB|^2 = 25 - 2b\sqrt{25-b^2}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (a + \sqrt{25-b^2}; b + \sqrt{25-a^2})$$

$$|AB|^2 = a^2 + 25 - b^2 + 2a\sqrt{25-b^2} + b^2 + 25 - a^2 + 2b\sqrt{25-a^2} =$$

$$= 50 + 2(a\sqrt{25-b^2} + b\sqrt{25-a^2})$$

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} =$$

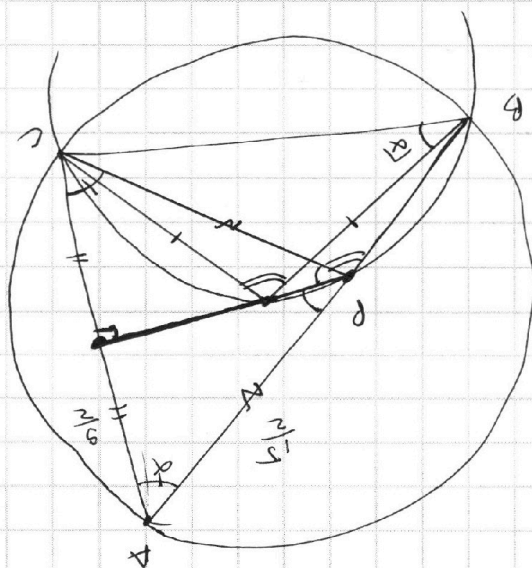


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{n-2} \cdot \frac{\binom{n-2}{n-2}}{\binom{n+k}{n-2}} = 2,5 \cdot \frac{\binom{n-2}{n-2}}{\binom{n+k}{n-2}}$$

$$\frac{\frac{(n-2)!}{(n-4-k)! \cdot (k+2)!}}{n!} = 2,5 \cdot \frac{\frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!}}{\frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!}}$$

$$\frac{(n-2)!}{n!} \cdot \frac{(n-4-k)! \cdot (k+2)!}{(n-4-k)! \cdot (k+2)!} = 2,5 \cdot \frac{(n-2)!}{n!} \cdot \frac{(n-4)! \cdot 4!}{(n-4)! \cdot 2!}$$

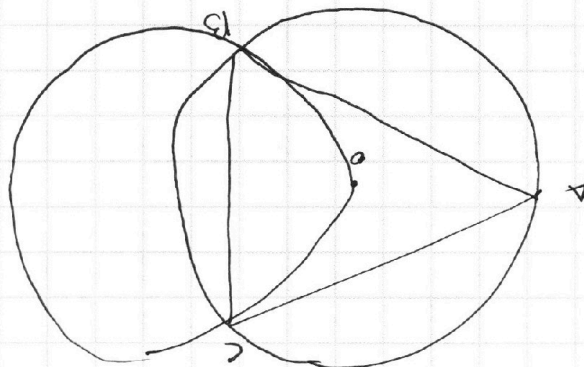
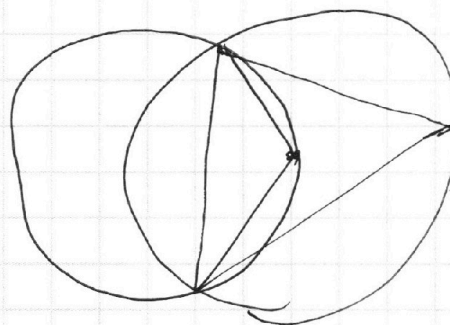
$$(k+4)(k+5) = 2,5 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 2,5 \cdot 12 = 30$$

$$k^2 + 7k + 12 = 30$$

$$k^2 + 7k - 18 = 0$$

$$(k+9)(k-2) = 0$$

$$\begin{cases} k = -9 \\ k = 2 \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \pi y = \pi x + 2\pi k \\ \pi y = -3\pi x + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 2k \\ y = -3x + 2k \end{cases}$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{5}\right) + \arccos\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right) = \arcsin a +$$

$$\arcsin a < \frac{3\pi}{2} \leftarrow \arccos \frac{y}{4}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (a + \frac{2\pi}{2})\right) = \cos(\pi + a) =$$

$$\cos 302 = \cos 120 = -\cos a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (-a - \frac{\pi}{2})\right) = \sin(-\cos \frac{\pi}{2})$$

$$-\sin(a + \frac{\pi}{2}) = -\cos(-a) = \cos a$$

$$\arcsin \frac{x}{5} < \left(\frac{3\pi}{2} - \arccos \frac{y}{4}\right)$$

$$\sin\left(\arcsin \frac{x}{5}\right) < \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \arccos \frac{y}{4}\right) = -\cos\left(\arccos \frac{y}{4}\right)$$

$$\frac{x}{5} < -\frac{y}{4}$$

$$y < -\frac{4}{5}x$$

$$4x < -5y$$

4 бунета

и 11 человек

$$y < -\frac{4}{5}x = -\frac{4}{5}x$$

$$x + 2k < -\frac{4}{5}x$$

$$\frac{9}{5}x + 2k < 0$$

С_н - кон-во способов выбрать 9 бунет

С_{н-2} - кон-во способов выбрать 11 человек и 9 бунет



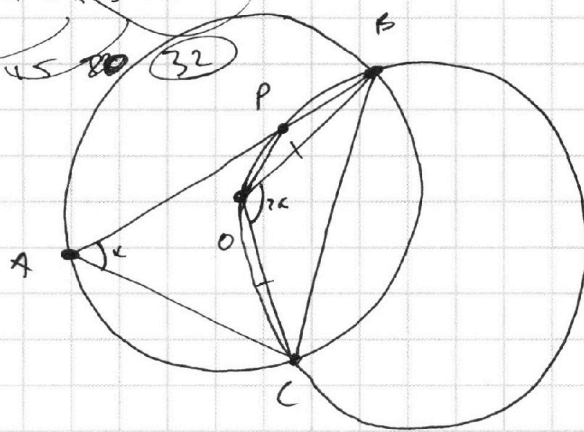
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \times 3 \times 5 + 4 \times 5 + 6 \times 2 = 32$$



$$AP = \frac{15}{2}$$

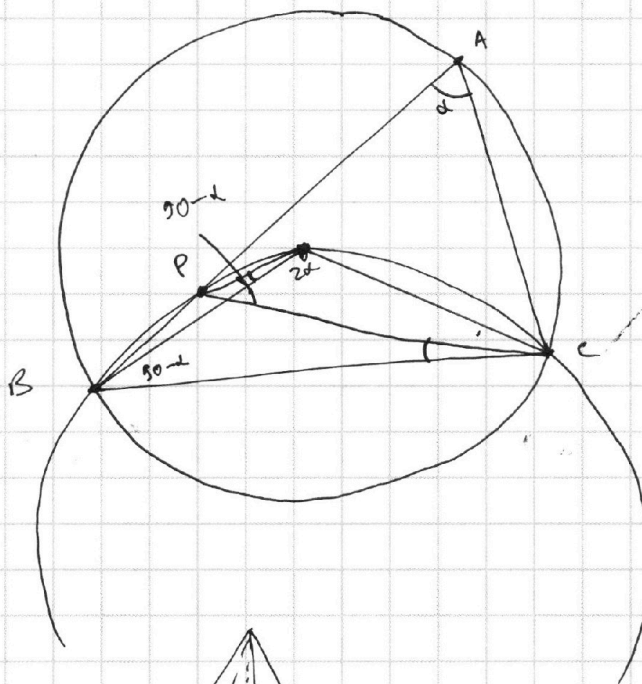
$$BP = 5$$

$$AC = 9$$

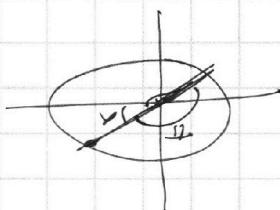
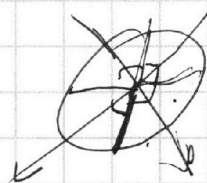
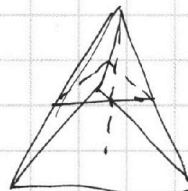
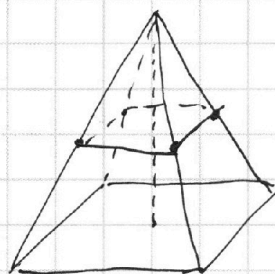
$$8 \pm \frac{15-5}{2}$$

$$AB = \frac{15}{2} + 5 = \frac{25}{2}$$

$$\frac{25}{2} \cdot \frac{15}{2} \neq 81$$



90-1



$$AC = 2\sqrt{2}$$

accsin



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2-x)g \leq (2-x)h$$

$$\frac{2-x}{g-gx} \leq y$$

$$\frac{1111}{1111}$$

$$2g + h - gx - hx,$$

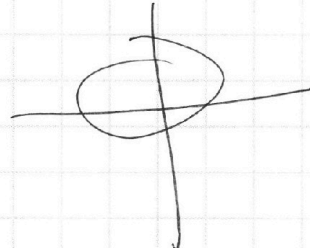
$$\begin{matrix} 1001 \\ 110 \\ 255 \end{matrix}$$

$$2g - gx \leq h - hx$$

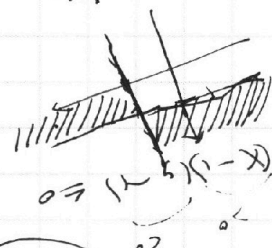
$$(2-g)(1-x) \leq 0$$

$$\frac{2}{g} \leq y(1-x)$$

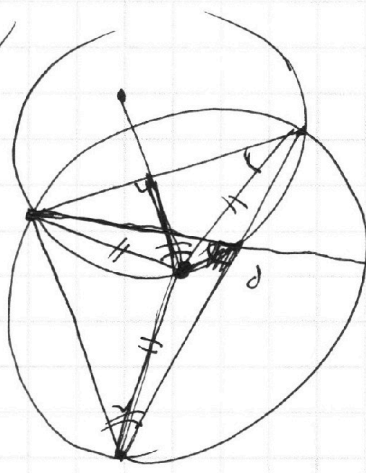
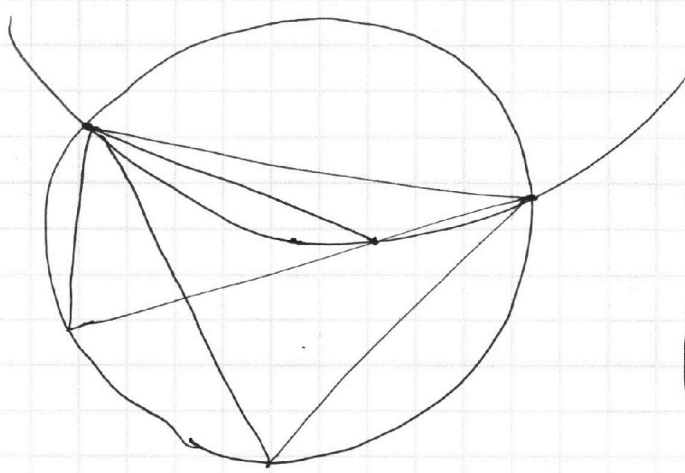
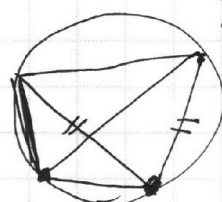
$$xy - x \cdot 3\sqrt{2} \cos x - 3\sqrt{2} \sin x \cdot y + (3\sqrt{2})^2 \cdot \sin x \cos x \leq 0$$



$$xy - y \cdot 3\sqrt{2} \sin x + 18 \sin x \cos x$$



$$\left. \begin{matrix} x^2 + y^2 \leq 25 \\ (x - 3\sqrt{2} \sin x)(y - 3\sqrt{2} \cos x) \leq 0 \end{matrix} \right\}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x}(1 + \frac{1}{y}) + \frac{1}{y}(1 + \frac{1}{x})$$

$$k = \frac{x+y}{xy} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$$

$$k = \frac{(x-1) + (y+1) + 2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = xy - y + x - 1$$

$$y = x - 1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x(x-1)} = \frac{x-1+x+2}{x(x-1)} = \frac{2x+1}{x(x-1)}$$

$$x^3 - y^3 - 3xy = x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-1) =$$

$$= x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 3x^2 + 3x =$$

$$= x^3 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 3x^2 + 3x = 1$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = \cos 5\pi x + \cos \pi y \cos 5\pi x$$

$$\pi x = a$$

$$\pi y = b$$

$$(\sin a + \sin b) \sin a = (\cos a + \cos b) \cos a$$

$$\sin^2 a + \sin a \sin b = \cos^2 a + \cos a \cos b$$

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos 2a$$

$$\cos(a+b)$$

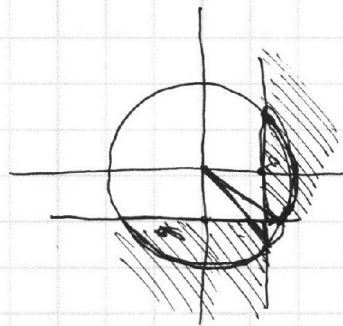
$$\cos(3a+b) = \cos 3a \cos b - \sin 3a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos 2a$$



$$\begin{cases} a+b = 2a + 2\pi k \\ a+b = -2a + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = a + 2\pi k \\ b = -3a + 2\pi k \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = a - 1111$$

$$B =$$

$$C =$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ 1111 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \div 7 \\ 15 \\ \hline 61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \div 15 \\ \hline \end{array}$$

$$1111 \sqrt{1000} = 25$$

$$\begin{array}{r} 1111 \div 17 \\ 102 \\ \hline 91 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 115 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 92 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ 87 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \div 19 \\ 95 \\ \hline 161 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 85 \\ \hline 17 \end{array} \quad 6 \cdot 8 = 5$$

$$\begin{array}{r} 1111 \div 23 \\ 92 \\ \hline 151 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 161 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ 87 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 95 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ 54 \\ \hline 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 95 \\ 7 \\ \hline 102 \end{array}$$

$$8$$

$$29$$

$$\begin{array}{r} 1111 \div 29 \\ 87 \\ \hline 241 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 161 \\ 102 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \div 23 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ 38 \\ \hline 152 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 104 \\ 5 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 270 \\ 25 \end{array}$$

$$3 \cdot 10 + 11$$

$$1111$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ \hline \end{array}$$

$$1111 \div 1000$$

$$A = 1111$$

$$\frac{5x}{2} - \frac{(1+5)(1-x)}{2}$$

$$\frac{(1-x)x}{1} = \frac{x}{1} - \frac{1-x}{1}$$

$$+ \frac{(1-x)x}{1} = \frac{(1+5)x}{1}$$

$$\frac{(1+5)x}{1} = \frac{1+5}{1} - \frac{1}{1}$$

$$\frac{(1+5)(1-x)}{2} + \frac{1+5}{1} + \frac{1-x}{1} = \frac{5x}{2} + \frac{5}{1} + \frac{x}{1}$$

$$\frac{(1+5)(1-x)5x}{2+5x-5x} =$$

$$\frac{(1+5)(1-x)}{2} + \frac{1+5}{1} + \frac{1-x}{1}$$

$$= \frac{(1+5)(1-x)5x}{2+5x-5x}$$

$$\frac{5x}{2} + \frac{5}{1} + \frac{x}{1} = 11$$