



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

П.к A - пятизначное и состоит из одинаковых цифр, то $A : 1111 = 11 \cdot 101$, тогда одно из чисел B или $C : 101$ (п.к если B и C не делится на 101 , то $ABC \neq 101$, но $ABC \neq 101^2 \Rightarrow ABC$ не квадрат натурального числа), п.к C двузначное, то $C \neq 101$ ($C < 101$) $\Rightarrow B : 101$, $B = 707$ (из чисел $101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909$: всего в 1 числе есть цифра "7"), $B \neq 11 \Rightarrow C : 11$, тогда $C = 11$ (из чисел $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$ всего 1 число, в котором есть цифра "7"), тогда если $B = 707$, то $B : 7$, тогда одно из чисел A и $C : 7$, $C = 11 \Rightarrow A : 7$, $A : 1111 \Rightarrow A = 7777$

Ответ: $A = 7777$, $B = 707$, $C = 11$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

Вспомогательное условие в виде $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$ приведем к общему знаменателю отдельно левую часть равенства и отдельно правую.

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)} \quad \text{из того, что } x > 0, y > 0$$

следует, что $y+4 > 0$, $xy > 0$, $x+y+3 > 0$, тогда

если y градусов равен числителю, числитель не равен 0, градусы равны, то знаменатель градусов равен $xy = (x-4)(y+4)$ ($x \neq 4$)

$$xy = xy + 4x - 4y - 16 \quad x - y = 4, \text{ заметим, что}$$

$$x^3 - y^3 - 12xy - 64 = (x - y - 4)(x^2 + y^2 + 16 + xy + 4x - 4y),$$

$$\text{тогда } x^3 - y^3 - 12xy = (x - y - 4)(x^2 + y^2 + 16 + xy + 4x - 4y) + 64$$

$$x - y = 4 \Rightarrow x^3 - y^3 - 12xy = 64 = M$$

Ответ: $M = 64$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

 $\sqrt{3}$

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \cdot \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cdot \cos \pi y$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \text{ тогда}$$

$$\sin \pi y - \sin \pi x = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} (y - x) \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} (x + y) \right)$$

$$\cos \pi y + \cos \pi x = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} (x + y) \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} (y - x) \right),$$

$$\text{получаем: } \cancel{\sin \pi y} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} (x + y) \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} (y - x) \right) \cdot \cos \pi y =$$

$$= \sin \left(\frac{\pi}{2} (y - x) \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} (y + x) \right) \cdot \sin \pi y$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} (x + y) \right) = 0 \text{ или } \cos \pi y \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} (y - x) \right) -$$

$$- \sin \pi y \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} (y - x) \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} (x + y) \right) = 0 \quad x + y = 1 + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \pi y \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} (y - x) \right) - \sin \pi y \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} (y - x) \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{3\pi}{2} y - \frac{\pi}{2} x \right) = 0 \quad 3y - x = 1 + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Получаем решения } (t_1; 2k + 1 - t_1) \text{ и}$$

$$(t_2; \frac{2n + 1 + t_2}{3}), \quad t_1 \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

(также эти решения могут пересекаться)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Задача 1~~

~~Задача 2~~

~~Задача 3~~

~~Задача 4~~

~~Задача 5~~

~~Задача 6~~

№3 (продолжение)

$$\text{Д} \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2} \quad \text{ОДЗ:}$$

$x \in [-7; 7]$, $y \in [-4; 4]$, заметим, что

$$\arccos \frac{x}{7} \geq 0, -\arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2} \text{ не подходит}$$

только $\arccos \frac{x}{7} = 0$, $-\arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$ одновременно;

$x \neq 7$, $y \neq 4$ одновременно тогда ~~не~~ неравенство

удовлетворяют парам: $x \in [-7; 6]$, $y \in [-4; 4]$

и $x \neq 7$, $y \in [-4; 3]$, заметим, что тогда

$x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, заметим, что уравнение из

пункта „а“ удовлетворяют те пары x и y ,

где x - нечетное, y - четное или

y - нечетное, x - четное, при x - нечетном

есть варианты $x = 7$; $y \in \{-4; -2; 0; 2\}$ и вар.

и $x \in \{-7; -5; -3; -1; 1; 3; 5\}$ $y \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$

35 вариантов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

При x - четном: $x \in \{-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6\}$,

$y \in \{-3; -1; 1; 3\}$ 28 вариантов

Всего вариантов: $4 + 35 + 28 = 67$ вариантов

Ответ: а) $(t_1; 2k+1-t_1)$, $(t_2; \frac{2n+1+t_2}{3})$,

$t_1 \in \mathbb{R}$, $t_2 \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$

5) 67 пар



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4 (продолжение)

Пусть дополнительно было куплено a билетов, тогда всего билетов $n+a$, всего вариантов распределения билетов среди олимпийцев. В конце

месяца: $C_{n+a}^{a+4} = \frac{n!}{(a+4)!(n-a-4)!}$, вариантов, когда

Петя и Вова купят билеты в конце

месяца: $C_{n-2}^{a+2} = \frac{(n-2)!}{(a+2)!(n-a-4)!}$ (здесь два

билета Петя и Вова, каждый по одному, а

оставшиеся $a+4$ билета распределить по ост.

$n-2$ олимпийцам), вероятность покупки

билетов Петей и Вовой одновременно в конце

месяца: $\frac{(n-2)!}{(a+2)!(n-a-4)!} \cdot \frac{(a+4)!(n-a-4)!}{n!} = \frac{(a+3)(a+4)}{(n-1)n}$

Поскольку по условию 11. $\frac{12}{(n-1)n} = \frac{(a+3)(a+4)}{(n-1)n} \Rightarrow$

$a = -15$ (не пошло) или $a = 8$ (пошло), в конце

месяца выделено $a+4 = 12$ билетов

Ответ: 12



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓4

Пусть всего x — опрадуати классиков, тогда
всего вариантов распределения билетов в начале
месяца $C_x^4 = \frac{x!}{(x-4)! \cdot 4!}$ ($x > 4$, т.к. если $x \leq 4$, то
вероятность получить билеты у Васе и Пете

в начале 1, в конце месяца 11, а вероятности
не больше 1), ~~вероятности~~ ^{всего вариантов} того, что Пети и
Вася получат билеты в начале месяца

$C_{x-2}^2 = \frac{(x-2)!}{2! \cdot (x-4)!}$ (дадим по 1 билету Васе
и Пете, а остальные 2 распределим по остальн.)

вероятность получения билетов в начале месяца

одновременно Пети и Васи: $\frac{(x-2)!}{2! \cdot (x-4)!} \cdot \frac{(x-4)! \cdot 4!}{x!} =$

$$= \frac{12}{(x-1) \cdot x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

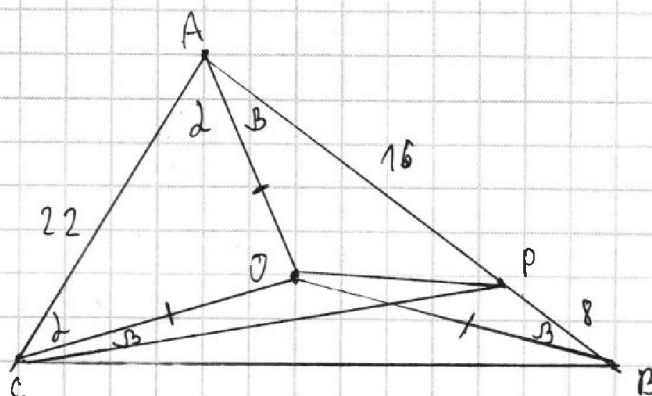
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{5}$



П.к. O - центр описанной окружности $\triangle ABC$, но

$AO = OB = OC$, пусть $\angle CAO = \alpha$, $\angle BAO = \beta$, тогда

$\angle ACO = \alpha$ ($\triangle AOC$ - равнос.), $\angle ABO = \beta$ ($\triangle AOB$ - равнос.),

из вписанности $COPB \Rightarrow \angle OCP = \angle OBP = \beta$

(заметим, они радиусы на 1 хорду), тогда

$\triangle APC$ - равнос. ($\angle ACP = \angle PAC = \alpha + \beta$) $\Rightarrow CP = 16$

по Т. кос-ов для $\triangle APC$: $16^2 = 22^2 + 16^2 -$

$- 2 \cos(\alpha + \beta) \cdot 22 \cdot 16$ $\cos(\alpha + \beta) = \frac{11}{16}$, $\alpha + \beta < 60^\circ$

тогда $\sin(\alpha + \beta) > 0$, $\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)}$

$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{135}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot AC \cdot AB =$

$= \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 24 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$ Ответ: $\frac{99\sqrt{15}}{2}$

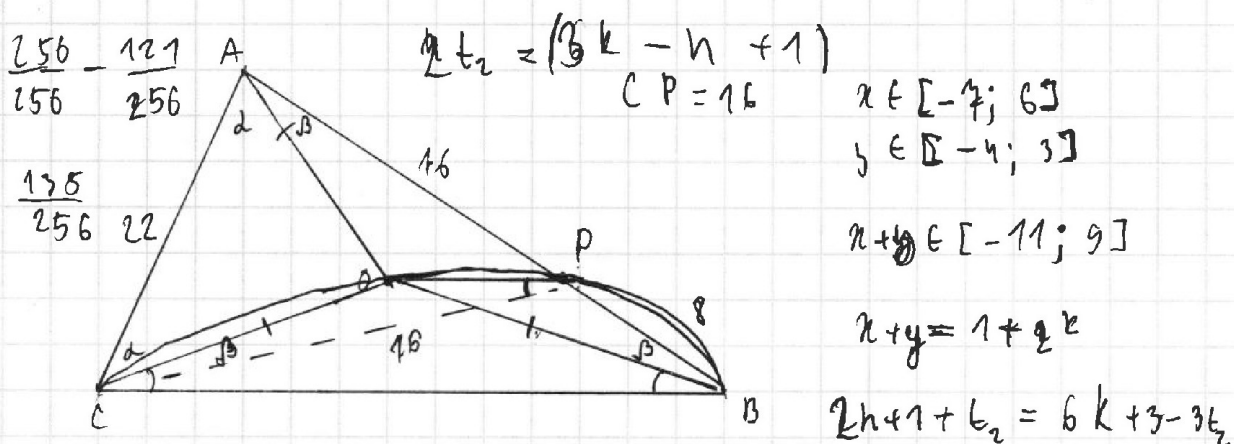


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$14^2 = 22^2 + 16^2 - 2 \cos(\alpha + \beta) \cdot 22 \cdot 16$$

$$11 = \cos(\alpha + \beta) \cdot 16 \quad \cos(\alpha + \beta) = \frac{11}{16}$$

x отрицательна. α — ост. дуга

$$(\sin(\pi y) - \sin(\pi x)) \sin(\pi y) = (\cos(\pi y) + \cos(\pi x)) \cos(\pi y)$$

$$\sin^2(\pi y) - \sin(\pi x) \sin(\pi y) = \cos^2(\pi y) + \cos(\pi x) \cos(\pi y)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \quad 11 \cdot 2^k \cdot \frac{5\sqrt{15}}{16} = \frac{95\sqrt{15}}{2}$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin^2 \pi y + \cos(\pi x + \pi y) - \cos(\pi x - \pi y) =$$

$$= 2 \cos^2 \pi y + \cos(\pi x + \pi y) + \cos(\pi x - \pi y)$$

$$2(\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$(x+y-1)(x^2+y^2+16+xy+4x-4y) = x^3+x^2y+16x+x^2y+4x^2-4xy-$$

$$-5x^2-y^3-16y-x^2y-4xy+xy^2-4x^2-4y^2-64-4xy-16x+16y=$$

2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1111 = 11 \cdot 101 \quad 12$$

$$A: 1111 = 11 \cdot 101$$

$$B: 101 \quad B = 707 \quad C = 11$$

$$A = 7777 \quad B = 707 \quad C = 11$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} \quad x^3 - y^3 - 12xy$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y+y} + \frac{3}{xy+4x-4y-16}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy+4x-4y-16}$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16 \quad x - y = 4 \quad x = y + 4$$

$$x^3 - y^3 - 3 \cdot 4xy = (x - y - 4)(x^2 + y^2 + 16 + xy - 4y + 4x)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) =$$

$$= a^3 + \cancel{ab^2} + \cancel{ac^2} - \cancel{a^2b} - abc - \cancel{a^2c} + \cancel{ba^2} + b^3 +$$

$$\cancel{bc^2} - \cancel{ab^2} - \cancel{b^2c} - abc + \cancel{a^2c} + \cancel{b^2c} + c^3 -$$

$$-abc - \cancel{bc^2} - \cancel{ac^2} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$(x - y - 4)(x^2 + y^2 + 16 + xy - 4y + 4x) =$$

$$= (x^3 + xy^2 + 16x + x^2y - 4xy + 4x^2) -$$

$$-y^3 - 16y - xy^2 + y^2 - 4xy - 4x^2 - 4y^2 - 64$$

$$-4xy + 16y - 16x = x^3 - y^3 - 12xy - 64$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{2} (y - x) \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} (x + y) \right) \sin \pi y =$$

$$= 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} (x + y) \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} (y - x) \right) \cdot \cos \pi y$$

$$1) \cos \left(\frac{\pi}{2} (x + y) \right) = 0 \quad \frac{\pi}{2} (x + y) = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\cdot x + y = 1 + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sin \left(\frac{\pi}{2} (y - x) \right) \cdot \sin \pi y - \cos \left(\frac{\pi}{2} (y - x) \right) \cdot \cos \pi y =$$

$$= 0; \cos \left(\pi y + \frac{\pi}{2} y - \frac{\pi}{2} x \right) = 0$$

$$\frac{3\pi}{2} y - \frac{\pi}{2} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad 3y - x = 1 + 2k,$$

$$\cdot 3y - x = 1 + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2} \quad \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$x \in [-7; 7], \quad y \in [-4; 4]$$

$$x + y \in [-11; 11] \quad \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\arcsin x + \arcsin y) = x \cdot \cos(\arcsin y) + y \cdot \cos(\arcsin x)$$

$$\cos(\arcsin y) = \sin \frac{\pi}{2} - \arcsin y = t \quad \sin(\arcsin y) = y$$

$$y^2 + t^2 = 1 \quad t^2 = 1 - y^2 \quad t = \pm \sqrt{1 - y^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) всего вар $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}$

Решиваем получим:

1) всего вариантов: $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!} \cdot \binom{x}{4} \cdot \frac{x!}{4!(x-4)!}$
 Реш и вась получили билет: $\frac{(x-2)(x-3)}{2}$

2) всего вариантов: $x(x-1)(x-2)(x-3) \dots (x-a)$

$$\binom{4+a}{x} = \frac{x!}{(4+a)!(x-4-a)!}$$

Реш и вась получили билет: $x-2$ и

$2+a$ билетов $\binom{2+a}{x-2} = \frac{(x-2)!}{(2+a)!(x-4-a)!}$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{2} \cdot \frac{2a}{x(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$= 11 \cdot \frac{(x-2)!}{(4+a)!(x-4-a)!} \cdot \frac{(4+a)!(x-4-a)!}{x!(x-1)x} \cdot (a+3)(a+4)$$

$$\frac{132}{x(x-1)} = \frac{(a+3)(a+4)}{(x-1)x} \quad a=8 \quad \text{всего } 12$$

$$a^2 + 17a - 120 = 0 \quad (a-8)(a+15)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Поря QR-кода недопустима!

$$2\sin^2 \pi y - 2\sin \pi x \sin \pi y = 2\cos^2 \pi y + 2\cos \pi x \cos \pi y$$

$$2\sin^2 \pi y$$

$$\cos(\pi x - \pi y) = \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y$$

$$\cos(\pi x + \pi y) = \cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y$$

$$2\sin^2 \pi y + \cos(\pi x + \pi y) - \cos(\pi x - \pi y) =$$

$$= 2\cos^2 \pi y + \cos(\pi x - \pi y) + \cos(\pi x + \pi y)$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\sin \pi y - \sin \pi x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}(x - y)\right) \cdot \cos$$

$$\sin \pi y - \sin \pi x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right)$$

$$\cos \pi y + \cos \pi x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right)$$

$$\sin \pi y \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right) = \cos \pi y \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right)$$

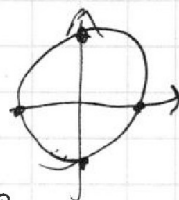
$$1) \cos\left(\frac{\pi}{2}(x + y)\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{2}(x + y) = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x + y = 1 + 2k$$

$$2) \sin\left(\frac{\pi}{2}y - \frac{\pi}{2}x\right) = 0$$

$$\begin{array}{r} \times 101 \\ 11 \\ \hline + 101 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

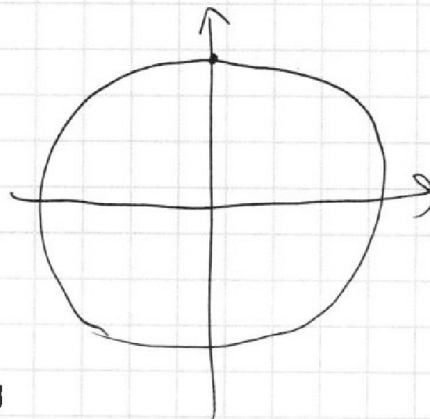
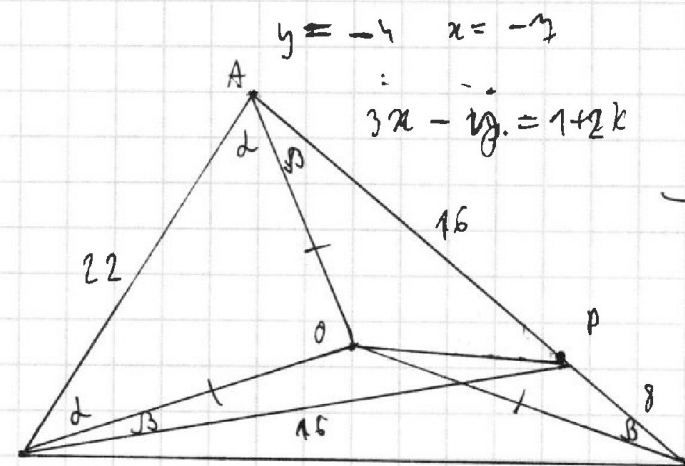
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$16^2 = 22^2 + 16^2 - 2 \cos(\alpha + \beta) \cdot 16 \cdot 22$$

$$22^2 = 2 \cos(\alpha + \beta) \cdot 16 \cdot 22$$

$$11 = 16 \cos(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) = \frac{11}{16}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \sqrt{\frac{256 - 121}{256}} = \frac{\sqrt{135}}{16}$$

$$\frac{\sqrt{135}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 16 \cdot \sin(\alpha + \beta) = 11$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 16 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{33\sqrt{15}}{2}$$

$$\alpha + \beta = 1 + 2k \text{ или } 3\pi - \beta = 1 + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos \frac{11}{16} - \arcsin \frac{3}{4} > -\frac{\pi}{2} \quad \arccos \frac{11}{16} = 0$$

$$\alpha \neq \pi \quad \beta \neq \pi \quad \alpha + \beta = 1 + 2k \quad 3\pi - \beta = 1 + 2k$$

$$\alpha \in [-\pi; 6]$$

$\arcsin$
 $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
 $\arccos$
 $[0; \pi]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

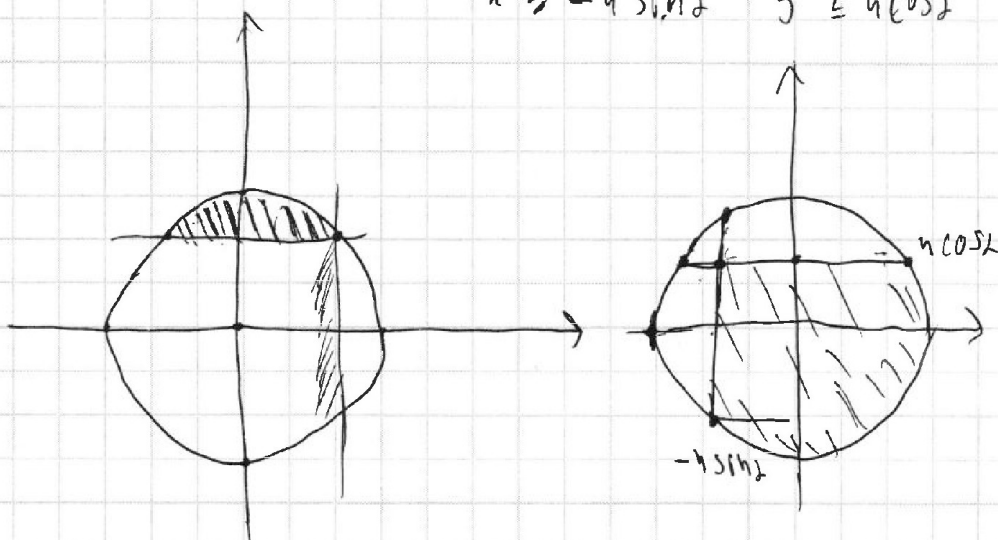
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \leq 4 \sin \alpha \quad y \geq 4 \cos \alpha$$

$$x \geq -4 \sin \alpha \quad y \leq 4 \cos \alpha$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

