



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 4, а  $y$  — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 12xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 16$ ,  $BP = 8$ ,  $AC = 22$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☒

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

из условия  $A = 1111 \cdot a$ , где  $a$  - цифра от 1 до 9.

$A = 11 \cdot 101 \cdot a \Rightarrow$  так как  $A \cdot B \cdot C$  - квадрат натурального числа, то у  $B \cdot C$  есть множители 11 и 101. (11 и 101 - простые числа)

$B \cdot C : 11$  и  $101$

$C$  - двузначное число  $\Rightarrow C \cdot 101 \Rightarrow \overset{B}{\text{число}} : 101$ . Одна из цифр числа  $\overset{B}{\text{число}}$  равна 7  $\Rightarrow$  единственный вариант

$B = 707$ .  $707 : 11 \Rightarrow C : 11 \Rightarrow C = 11$  (из условия)

$A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 7 \cdot 101 \cdot 11$  Чтобы это был квадрат натур. числа  $a$  должно равняться 7  
Тогда  $A = 7777$ ;  $B = 707$ ;  $C = 11$

$$A \cdot B \cdot C = (11 \cdot 101 \cdot 7)^2 = (7777)^2$$

Ответ:  $A = 7777$   $B = 707$   $C = 11$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sim 2$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+x+3}{xy} = \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)}$$

Ограничение (по условию  $x > 0, y > 0$ );  $x-4 \neq 0$   $y+4 \neq 0$

$\downarrow$   
 $x \neq 4$

$$\begin{cases} y+x+3=0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-4)(y+4)} & (2) \end{cases}$$

(1) не имеет решений так как  $x, y > 0 \Rightarrow x+y+3 > 0$

$$(2): xy = (x-4)(y+4) \Leftrightarrow xy = xy + 4x - 4y - 16 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = x - 4 \quad (3)$$

Подставим (3) в М:

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 12xy = x^3 - (x-4)^3 - 12x(x-4) = \\ &= x^3 - (x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 4 + 3 \cdot x \cdot 4^2 - 4^3) - 12x^2 + 48x = 12x^2 - 48x + 64 - 12x^2 + \\ &+ 48x = 64 \end{aligned}$$

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N3)

При  $y=0$ :

$$\begin{cases} 0 = \frac{1+x+2k}{3} \\ 0 = 1-x+2k \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1-2k \\ x = 1+2k \end{cases}$$

$x = 1; 3; 5; 7$  удовлетворяют  $0 \leq x \leq 7$

При  $y=1$ :

$$\begin{cases} 1 = \frac{1+x+2k}{3} \\ 1 = 1-x+2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-2k = x \\ x = 2k \end{cases} \Rightarrow x = 0; 2; 4; 6 \text{ подходит}$$

При  $y=2$ :

$$\begin{cases} 2 = \frac{1+x+2k}{3} \\ 2 = 1-x+2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2k = x \\ x = 2k-1 \end{cases} \Rightarrow x = 1; 3; 5; 7 \text{ подходит}$$

При  $y=3$ :

$$\begin{cases} 3 = \frac{1+x+2k}{3} \\ 3 = 1-x+2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8-2k = x \\ x = -2+2k \end{cases} \Rightarrow x = 0; 2; 4; 6 \text{ подходит}$$

При  $y=4$ :

$$\begin{cases} 4 = \frac{1+x+2k}{3} \\ 4 = 1-x+2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11-2k = x \\ x = -3+2k \end{cases} \Rightarrow x = 1; 3; 5; 7 \text{ подходит}$$

Исключение составит пара  $x=7, y=4$

так как:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N3)

$$0 \leq \arccos \frac{x}{7} \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{y}{4} \leq \frac{\pi}{2}$$

Оценим:

$$\arccos \frac{x}{7} \neq \arcsin \frac{y}{4} \text{ берга } \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Когда } \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2} :$$

$$\frac{x}{7} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{y}{4} = 1 : \arccos(1) = 0 \quad 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$
$$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

Получается (7; 4) не удовлетворит условию.

Ответ: а)  ~~$(x; 1-x+2k)$~~ ;  ~~$(x; \frac{1+x+2k}{3})$~~   ~~$(x; x+2k+1)$~~ ,  $k \in \mathbb{Z}$

б)  ~~$x=0; 2; 4; 6$~~  парей  $x=0; 2; 4; 6$ ,  $y=1; 3$

парей  $x=1; 3; 5; 7$  и  $y=0; 2; 4$  кроме парей  $x=7, y=4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

Введем замену  $\pi y = \alpha$ ,  $\pi x = \beta$

$$(\sin \alpha - \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta$$

$$0 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos(\alpha - \beta)$$

$$0 = \cos 2\alpha + \cos(\alpha - \beta)$$

$$0 = 2 \cdot \cos\left(\frac{3\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{3\alpha - \beta}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\alpha - \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Вернемся к прежним переменным

$$\begin{cases} \frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi y + \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - x = 1 + 2k \\ y + x = 1 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1+x+2k}{3} \\ y = 1-x+2k \end{cases} \Rightarrow y = x+2k+1, k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ограничение: } \begin{cases} 0 \leq \frac{x}{7} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 7 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{При } y = \frac{1+x+2k}{3}; k \in \mathbb{Z}:$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 7 \\ 0 \leq \frac{1+x+2k}{3} \leq 4 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☒

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть в классе  $n$  человек; в конце месяца выданные  $k$  билетов.

Вероятность в начале месяца мальшкан попасть на концерт:

$$P(A) = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} - \text{количество хороших вариантов группы из 4 человек (где есть пете и васе)}$$

общее число вариантов группы из 4 человек

$$P(A) = \frac{\frac{(n-2)!}{2!(n-4)!}}{\frac{n!}{4!(n-4)!}} = \frac{(n-2)! \cdot 4!}{2 \cdot n!} = \frac{12}{n(n-1)}$$

Вероятность в конце месяца:

$$P(B) = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-2-k+2)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{(n-2)! \cdot k!}{(k-2)! \cdot n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

по условию  $P(A) = P(B)$

$$11 \cdot \frac{12}{n(n-1)} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \Rightarrow 11 \cdot 12 = k(k-1) \Rightarrow k = 12$$

Ответ: 12



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☒7  
☐СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

периметр  $M = BC + AD + l$ , где  $l = 6\pi$  (сумма длин дуг)

$$BC = 2\sqrt{6^2 - y^2} \text{ по теореме Пифагора}$$

$$AD = 2\sqrt{6^2 - x^2}$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

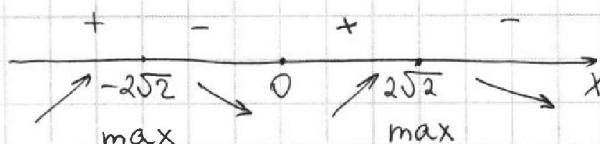
$$M = 2\sqrt{6^2 - y^2} + 2\sqrt{6^2 - x^2} + l = 2\sqrt{6^2 - 16 + x^2} + 2\sqrt{6^2 - x^2} + l$$

$$M = 2\sqrt{20 + x^2} + 2\sqrt{36 - x^2} + l$$

$$M' = 2 \cdot \frac{1}{2} (20 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + 2 \cdot \frac{1}{2} (36 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = 0$$

$$\frac{2x}{\sqrt{20 + x^2}} + \frac{-2x}{\sqrt{36 - x^2}} = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ \frac{1}{\sqrt{20+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{36-x^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 20+x^2 = 36-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$



Значит, при  $x = \pm 2\sqrt{2}$  значение  $M$  максимумно

$$x = -4\sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} -4\sin\alpha = 2\sqrt{2} \\ -4\sin\alpha = -2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$M = 2\sqrt{20 + (2\sqrt{2})^2} + 2\sqrt{36 - (2\sqrt{2})^2} + 6\pi = 2\sqrt{20 + 8} + 2\sqrt{36 - 8} + 6\pi = 2 \cdot 2\sqrt{7} + 2 \cdot 2\sqrt{7} + 6\pi = 8\sqrt{7} + 6\pi$$

$$\text{Ответ: } M = 8\sqrt{7} + 6\pi; \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$



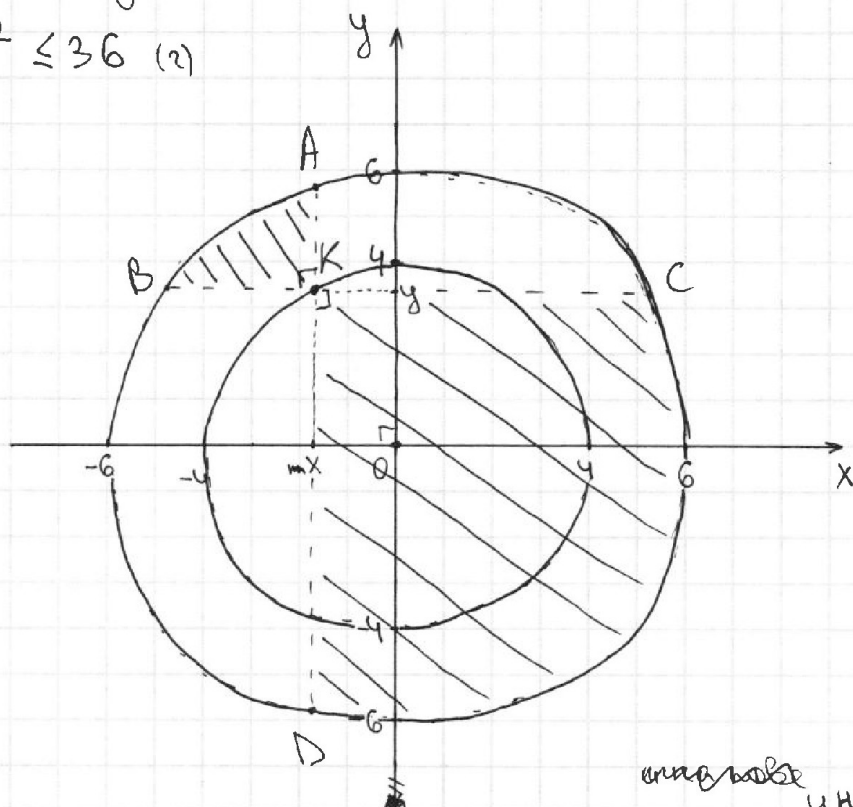
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+4\sin 2)(y-4\cos 2) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 36 & (2) \end{cases}$$



Неравенству (2) удовлетворяют точки <sup>внутри</sup> окружности радиуса 6 с центром (0;0) <sup>и на границе</sup>

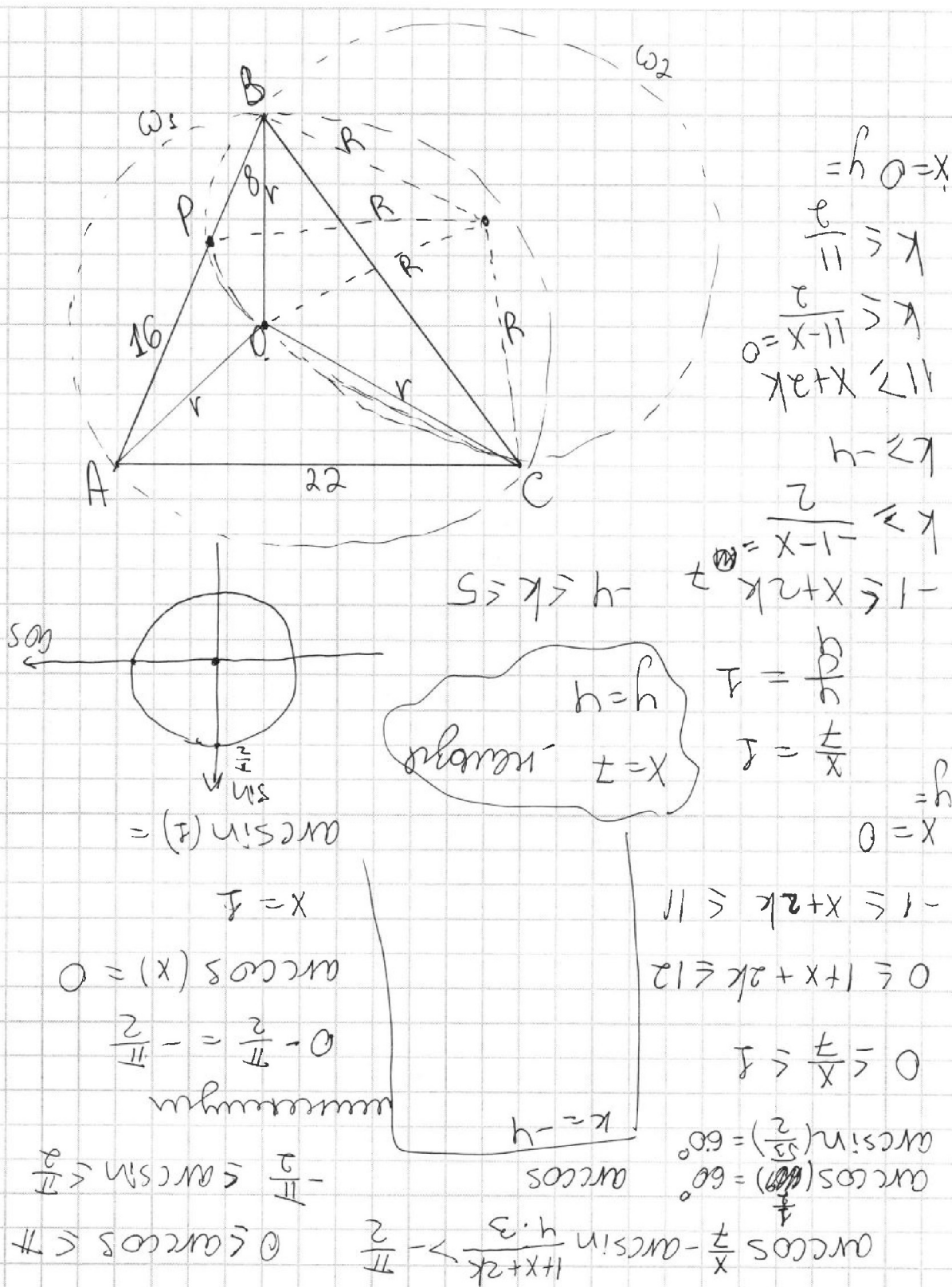
Множество  $P(2)$  состоит из точек, лежащих в заштрихованной области и на её границе.

$$\begin{cases} x = -4\sin 2 \\ y = 4\cos 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4^2(\sin^2 2 + \cos^2 2) = 16 \Rightarrow$$

точки с координатами  $x, y$  лежат на окружности радиуса 4 с центром (0;0) ( $x$  и  $y$  показаны на рисунке)

$$\angle BKA = \angle DKC = 90^\circ \Rightarrow \angle AB + \angle CD = 180^\circ = \text{const} \Rightarrow$$

сумма <sup>всегда</sup> длин дуг  $AB$  и  $CD$  равна длине полуокружности:  $(6\pi)$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$n = 12$

$$1) P(A) = P(B)$$
$$P(A) = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\frac{(n-2)!}{2!(n-4)!}}{\frac{n!}{4!(n-4)!}} = \frac{(n-2)! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot n!} = \frac{12}{n \cdot (n-1)}$$

$n = 12$

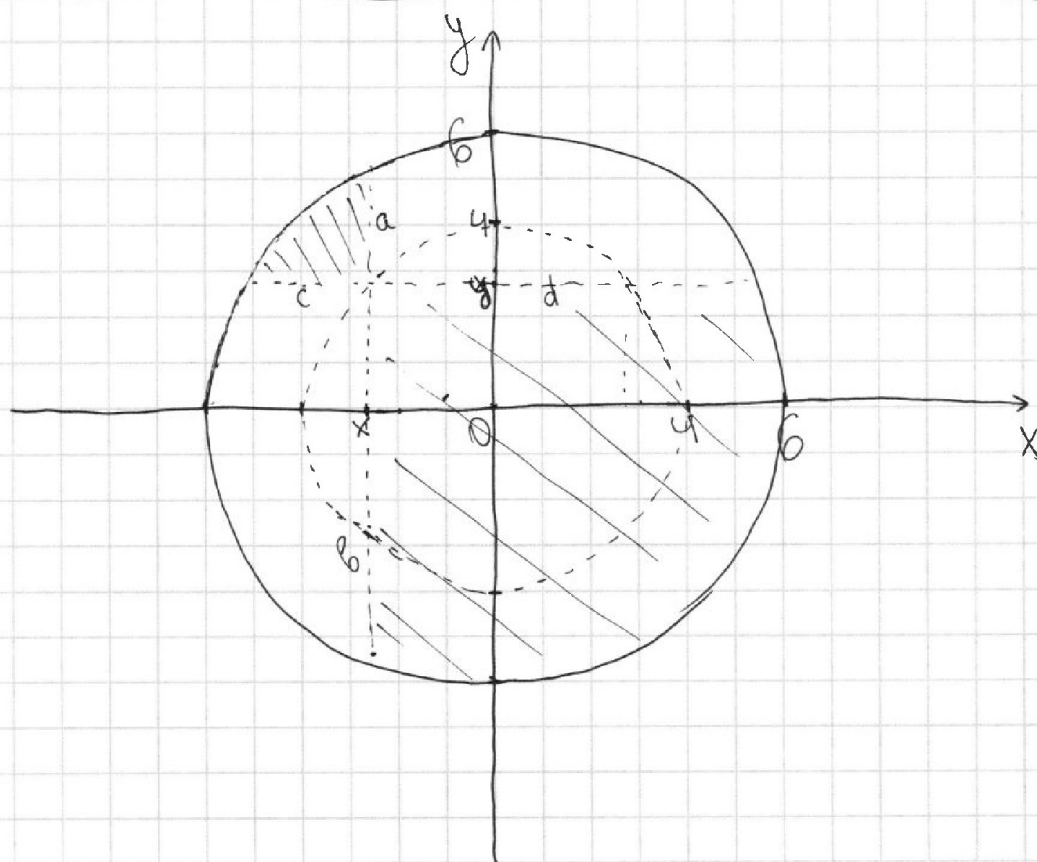
$$P(B) = 11P(A) = \frac{12 \cdot 11}{n(n-1)}$$

числов k

$$P(B) = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-2-k+2)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{(n-2)! \cdot k! \cdot (n-k)!}{(k-2)! \cdot (n-k)! \cdot n!} =$$
$$= \frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{11 \cdot 12}{n(n-1)} \quad (k=12)$$

$$-4 \leq 4 \sin \alpha \leq 4$$

$$-4 \leq -4 \cos \alpha \leq 4$$





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 \_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+4)(y-3) \leq 0$$

$$x = -4 \sin \alpha$$

$$y = 4 \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = -2\sqrt{2}$$

$$y = 2\sqrt{2} \approx 1,4$$

$$\max a+b+c+d$$

$$12 + 2\sqrt{6^2 - y^2}$$

$$x^2 + y^2 = 16 \quad y^2 = 16 - x^2$$

$$a+b \leq 12 \quad a \cdot b = c \cdot d$$

$$c+d \leq 12$$

$$\Delta P = \sqrt{6^2 - x^2} \cdot 2 + 2\sqrt{6^2 - y^2}$$

$$\Delta P = 2\sqrt{36 - x^2} + 2\sqrt{36 - 16 + x^2}$$

$$\Delta P = 2(36 - x^2)^{\frac{1}{2}} + 2(20 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta P' = 2 \cdot \frac{1}{2}(36 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) + 2 \cdot \frac{1}{2}(20 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x) =$$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{36 - x^2}} + \frac{2x}{\sqrt{20 + x^2}} = 0 \quad 1) \quad x = 0$$

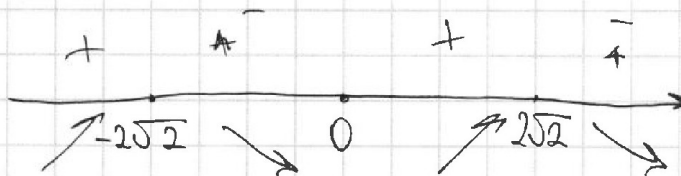
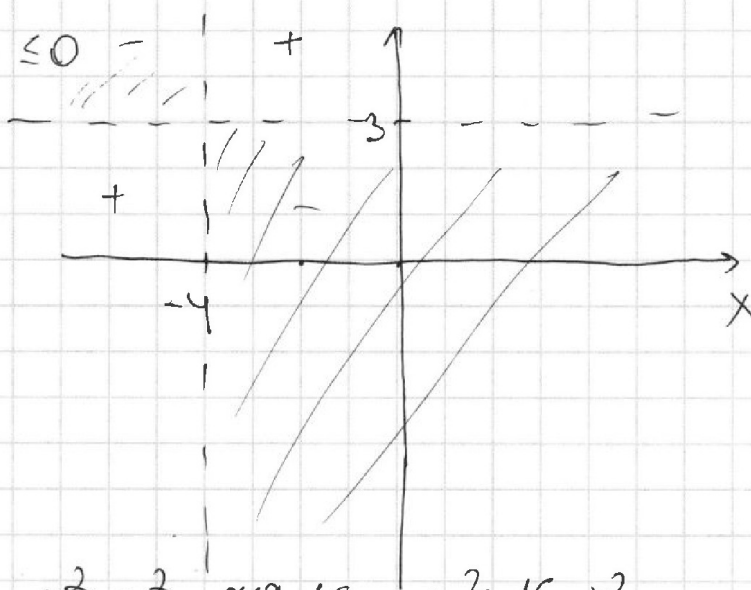
$$2) \quad \frac{1}{\sqrt{20 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{36 - x^2}}$$

$$20 + x^2 = 36 - x^2$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$2x^2 = 16$$

$$\sqrt{2}x = \pm 4 \quad x = \pm \frac{4}{\sqrt{2}}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

если  $y=4$   $x=0$

$$\Delta P = 12 + 2\sqrt{\underset{36}{6^2} - \underset{16}{4^2}} = 12 + 2\sqrt{\underset{54}{20}} = 12 + 4\sqrt{5}$$

если  $x=2\sqrt{2}$

$$\Delta P = 2(\sqrt{6^2 - (2\sqrt{2})^2} \cdot 2) = 4\sqrt{\underset{74}{36-8}} = 4\sqrt{\underset{4}{28}} = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{7}$$

$$12 + 4\sqrt{5} \quad \wedge \quad 4\sqrt{28}$$

$$144 + 48 \cdot 2\sqrt{5} + 16 \cdot 5 \quad \wedge \quad 16 \cdot 28$$

80

$$224 + 48 \cdot 2\sqrt{5} \quad \wedge \quad 16 \cdot 28$$

$$48 \cdot 2\sqrt{5} \quad \wedge \quad 224$$

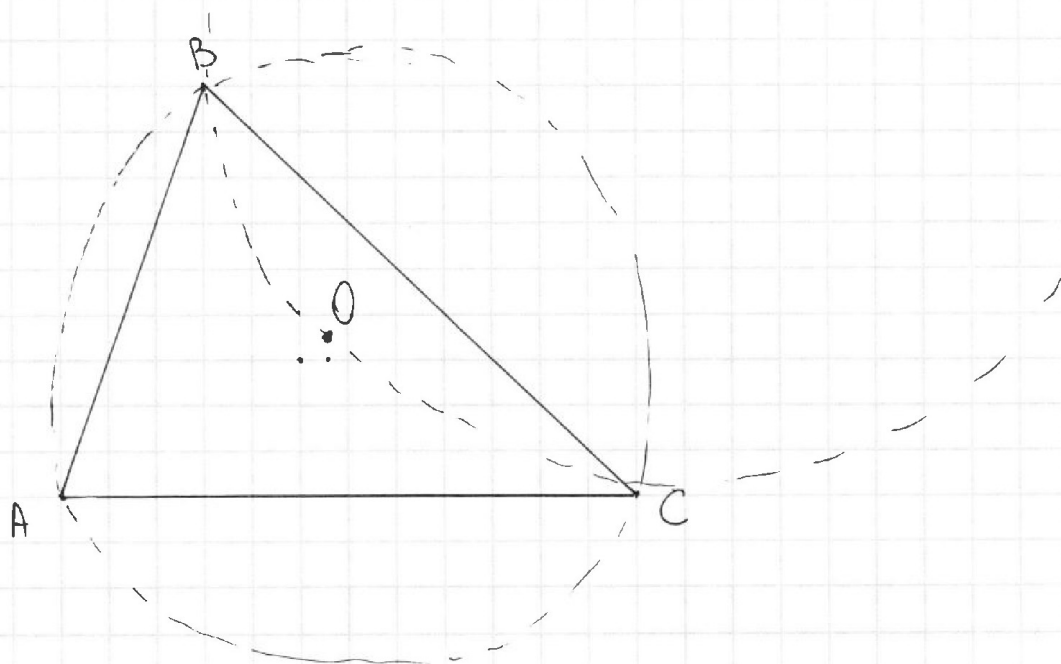
12  
3

$$9.5$$

$$49$$

$$\begin{array}{r} \times 48 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 28 \\ \hline + 128 \\ 32 \\ \hline - 448 \\ 224 \\ \hline 224 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y \quad \begin{cases} \alpha = \frac{x+y}{2} \\ 2\alpha = x+y \\ \alpha - \beta = x-y \end{cases}$$

$$\pi y = \alpha \quad \pi x = \beta$$

$$(\sin \alpha - \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \cos(\alpha - \beta)$$

$$0 = \cos 2\alpha + \cos(\alpha - \beta)$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y =$$

$$= 2(\cos x \cos y)$$

$$0 = 2 \cos \frac{3\alpha - \beta}{2} \cos(-\frac{\alpha + \beta}{2})$$

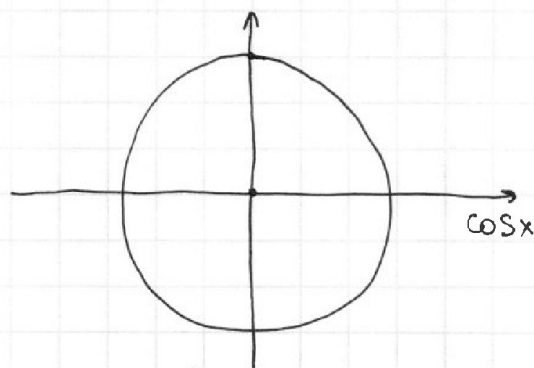
$$1) \cos \frac{3\alpha - \beta}{2} = 0$$

$$2) \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 0$$

$$\frac{3\alpha - \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$3\pi$$



$$\begin{cases} 2\alpha = x+y \\ \alpha - \beta = x-y \end{cases}$$

$$3\alpha - \beta = 2x$$

$$\boxed{x = \frac{3\alpha - \beta}{2}}$$

$$y = x - 2\alpha = \frac{3\alpha - \beta}{2} - 2\alpha = -\frac{\alpha + \beta}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa}$$

$$A = 1111 \cdot a = a \cdot 11 \cdot 101$$

$$1; 4; 9; 6; 5; 0$$

$$B = .7.$$

$$C = 1.$$

$$B \cdot C: 11 \text{ и } 101$$

↓

$$B: 101 \Rightarrow B = 707 = 7 \cdot 101; C = 11; a = 7$$

$$A \cdot B \cdot C = \overline{7 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 7 \cdot 101 \cdot 11}$$

$$\begin{array}{r} \overline{111111} \\ 11 \overline{) 101} \\ \underline{11} \\ 11 \\ \underline{11} \\ 0 \end{array}$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\begin{array}{l} y, x \neq 0 \\ x \neq 4 \\ y \neq -4 \end{array}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) - 12xy$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$M = x^3 + (x+3)^3 + 12x(x+3)$$

$$x^3 + x^3 + 9x^2 + 27x + 27 + 12x^2 + 36x$$

$$2x^3 + 21x^2 + 63x + 27$$

$$(x+y+3) \left( \frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-4)(y+4)} \right) = 0$$

$$(x+y+3) \frac{xy+4x-4y-16}{xy(x-4)(y+4)} = 0$$

$$xy(x-4)(y+4)$$

$$(x+y+3)(x-y-4) = 0$$

$$x^2 - xy - 4x + xy - y^2 - 4y + 3x - 3y - 12 = 0$$

$$x^2 - x - y^2 - 7y - 12 = 0$$

$$M = x^3 - (x-4)^3 - 12xy =$$

$$x(x-1) - y(y+7) - 12 = 0 = x^3 - (x^3 - 3x^2 \cdot 4 + 3x \cdot 4^2 - 4^3) - 12xy =$$

$$= +12x^2 - 48x + 64 - 12xy(x-4)$$

$$12x^2 - 48x + 64 - 12x^2 + 48x$$

$$\begin{cases} y+x+3=0 \\ xy=(x-4)(y+4) \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x-3 \\ y = x-4 \end{cases}$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$0 = x - y - 4$$

$$y = x - 4$$

$$\begin{aligned} (115)^3 &= 1 + 27 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 18 \\ &= 1 + 27 + 15 + 54 \\ &= 97 \end{aligned}$$