МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} \left(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha\right)\left(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha\right) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.

Рассмотрим число A. Оно состоит из 4 одинаковых цифр, т. е оно имеет вид $\overline{nnnn}$, где n – цифра от 1 до 9
Значит оно делится на 1111 ($A = n \cdot 1111$), $\Rightarrow A \vdots 1111$ Но $1111 = 101 \cdot 11 \Rightarrow A \vdots 101$ и $A \vdots 11$ (числа 101 и 11 простые).
Т. к. $A \cdot B \cdot C = m^2$, и оно делится на 101 (т. к $A \vdots 101$), но число 101 входит в ABC в чётной степени. В число A оно входит 1 раз ($A < 100^2 < 101^2$).

Значит $BC \vdots 101 \Rightarrow B \vdots 101$ и $C \vdots 101$.

Но по условию C – двузначное $\Rightarrow 9 < C < 100 \Rightarrow C \not\vdots 101$, значит $B \vdots 101$.

B – трехзначное, при этом $B \vdots 101$ и в B есть цифра 2. Из трёхзначных чисел только 9 чисел делятся на 101: 101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808 и 909. И только одно из них содержит цифру 2 $\Rightarrow B = 202$, $B \not\vdots 11$

Аналогично, число 11 входит в A 1 раз. ($A < 100^2 < 111 \cdot 11^2 = 111 \cdot 121$) $\Rightarrow BC \vdots 11$, но $B \not\vdots 11 \Rightarrow C \vdots 11$.

Все двузначные числа, делящиеся на 11, записываются 2 одинаковыми цифрами

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Но в числе C есть цифра 3 $\Rightarrow$ $C = 33$

$BC = 202 \cdot 33 = 101 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 3 = 1111 \cdot 6$

$ABC = n \cdot 1111 \cdot 1111 \cdot 6 = 6n \cdot (1111)^2 = m^2$.

$\Rightarrow$ $6n$ – точный квадрат, $1 \le n \le 9$.

единственный вариант, $n = 6$, $A = 6666$

$ABC = 6666 \cdot 202 \cdot 33 = (6666)^2$ – точный квадрат.

Ответ. $(6666; 202; 33)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть $M_1 = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$

$M_1 = \frac{(y+1)+(x-1)+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$

$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{y+x+2}{xy}$

По условию $K = M_1 \Rightarrow \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{xy}$

По пропорции $xy(x+y+2) = (x+y+2)(x-1)(y+1)$

Т.к. $x>0$, $y>0$, то $x+y+2>0$, $x+y+2 \neq 0 \Rightarrow$

$xy = (x-1)(y+1)$

$xy = x\cancel{y} + x - y - 1$

$x-y-1=0$, $x=y+1$, $x-y=1$

$M = x^3 - y^3 - 3xy = (x-y)(x^2+xy+y^2) - 3xy =$

$= 1(x^2+xy+y^2) - 3xy = x^2+xy+y^2-3xy = (x^2-2xy+y^2) =$

$= (x-y)^2 = 1^2 = 1$

Ответ. 1.

а) $(\sin \pi x + \sin \pi y)\sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$

1. Пусть $\pi x = a$, $\pi y = B$

$(\sin a + \sin B) \cdot \sin a = (\cos a + \cos B) \cdot \cos a$

$\sin^2 a + \sin B \cdot \sin a = \cos^2 a + \cos a \cdot \cos B$

$\sin^2 a - \cos^2 a = \cos a \cdot \cos B - \sin a \cdot \sin B$

$-(\cos^2 a - \sin^2 a) = \cos(a + B)$

$-\cos 2a = \cos(a+B)$

$\cos(a+B) + \cos 2a = 0$

$$\left[\begin{array}{l} 2a + a + B = 2\pi n + \pi \\ 2a - (a+B) = 2\pi m + \pi \end{array}\right. m, n, \in Z$$

$$\left[\begin{array}{l} 3a + B = 2\pi n + \pi \\ a - B = 2\pi m + \pi \end{array}\right., m, n, \in Z$$

2. Вернёмся к исходным переменным

$$\left[\begin{array}{l} 3\pi x + \pi y = 2\pi n + \pi \\ \pi x - \pi y = 2\pi m + \pi \end{array}\right., m, n, - \text{целые}$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x + y = 2n + 1 \\ x - y = 2m + 1 \end{array}\right., m, n \in Z$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Б) Рассмотрим области определения и множества значений функций $\arcsin\frac{x}{5}$ и $\arccos\frac{y}{4}$

$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin\frac{x}{5} \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \arccos\frac{y}{4} \le \pi$.

$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin\frac{x}{5} + \arccos\frac{y}{4} \le \frac{3\pi}{2}$

Равенство $\arcsin\frac{x}{5} + \arccos\frac{y}{4}$ достигается при $\arcsin\frac{x}{5} = \frac{\pi}{2}$ и $\arccos\frac{y}{4} = \pi$.

$$\begin{cases} \arcsin\frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} \\ \arccos\frac{y}{4} = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = 1 \\ \frac{y}{4} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -4 \end{cases}$$

($(5; -4)$ — не подходит)

О.О.Ф.: $-1 \le \frac{x}{5} \le 1$, $-1 \le \frac{y}{4} \le 1$.

$-4 \le y \le 4$, $-5 \le x \le 5$.

При этом выполняется хотя бы одно условие:

$\exists\ x+y = 2n+1$, $x-y = 2m+1$, $x, y, m, n \in \mathbb{Z}$

Если x и y — одной чётности, то $x+y$ и $x-y$ — чётны. Значит x и y — разной чётности

~~Чётный x~~ и x Составим таблицу всевозможных пар $(x; y)$, отметим \/ пары, подходящие условию, исключив пару $(5; -4)$

y \ x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
+4	✓		✓		✓		✓		✓		✓
+3		✓		✓		✓		✓		✓	
2	✓		✓		✓		✓		✓		✓
1		✓		✓		✓		✓		✓	
0	✓		✓		✓		✓		✓		✓
-1		✓		✓		✓		✓		✓	
-2	✓		✓		✓		✓		✓		✓
-3		✓		✓		✓		✓		✓	
-4	✓		✓		✓		✓		✓		

Подходит $5\cdot 5 + 4\cdot 6 = 49$ пар. $(x;y)$

Ответ. а) $\left[\begin{array}{l} 3x+y=2n+1 \\ x-y=2m+1 \end{array}\right.$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

б) 49.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть у нас x одиннадцатиклассников,

y билетов в конце месяца, $y > 4$.

A – Петя и Вася пошли на концерт в начале мес.

B – Петя и Вася пошли на концерт в конце мес.

$P(A) = \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{12}{x(x-1)}$

$P(B) = \frac{y}{x} \cdot \frac{y-1}{x-1} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$

По условию $2,5 \cdot P(A) = P(B)$

$2,5 \cdot \frac{12}{x(x-1)} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$

$\frac{30}{x(x-1)} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$

$y(y-1) = 30$

$y^2 - y - 30 = 0$

По т. Виета

$y_1 + y_2 = 1$

$y_1 \cdot y_2 = -30$

$y_1 = 6, \quad y_2 = -5$

$y = -5$ – не удовлетворяет неравенству $y > 4$

$y = 6$

6 билетов будет выделено в конце месяца

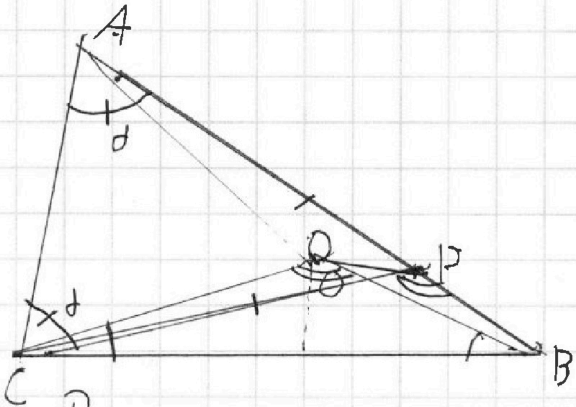
Ответ. 6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$,
O – центр описанной окружности
$P = AB \cap$ окр.(BOC)
~~AB~~ $AP = \frac{15}{2}$
$BP = 5$, $AC = 9$.
Найти: S_{ABC}

Решение

Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BAC$ – вписанный в окружность (ABC), $\angle BOC$ – центральный $\Rightarrow$ $\angle BOC = 2\alpha$.

Т.к. точки B, O, P, C лежат на одной окружности, то $BCOP$ – вписанный $\Rightarrow$ $\angle BPC = \cancel{2\alpha}$ $= \angle BOC = 2\alpha$

$\angle BPC$ – внешний для $\triangle ACP$ $\Rightarrow$
$\angle BPC = \angle CAP + \angle PCA = \angle BAC + \angle PCA$,
$\angle PCA = -\angle BAC + \angle BPC = -\alpha + 2\alpha = \alpha$
$\angle PCA = \angle PAC \Rightarrow \triangle PAC$ – р/б, $\Rightarrow AP = PC$.
В $\triangle PAC$: $AP = PC = 7,5$, $AC = 9$
По т. косинусов: $AP^2 = AC^2 + CP^2 - 2\,AC\cdot CP\cdot\cos\angle ACP$.

$(7,5)^2 = 9^2 + (7,5)^2 - 2\cdot 9\cdot 7,5\cdot\cos\alpha$
$81 = 18\cdot 7,5\cdot\cos\alpha = 135\cdot\cos\alpha$, $\cos\alpha = \frac{81}{135} = 0,6$
Т.к. $\alpha < 90^\circ$, то $\sin\alpha > 0$, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-(0,6)^2} = 0,8$
$AB = AP + PB = 7,5 + 5 = 12,5$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot\sin\angle BAC\cdot AB\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{10}\cdot 12,5\cdot 9 = 0,4\cdot 12,5\cdot 9 = 5\cdot 9 = 45.$

Ответ. 45

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

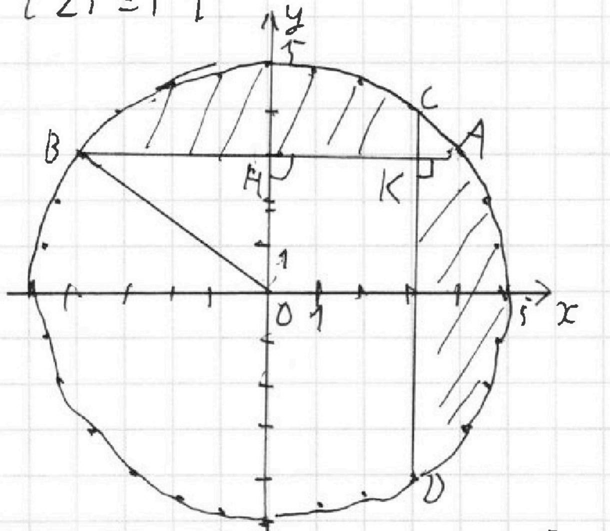
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases}(x-3\sqrt{2}\sin a)(y-3\sqrt{2}\cdot\cos a)\le 0\\ x^2+y^2\le 25\end{cases}$$

Второе неравенство задаёт множество точек, ~~лежащих~~ образующих круг, ограниченный окружностью с центром в точке $(0;0)$ и радиусом 5 $(25=5^2)$



Второе неравенство - ограничивает 2 области, ограниченные прямыми $y=3\sqrt{2}\cos a$ и $x=3\sqrt{2}\sin a$, которые пересекаются в точке $K(3\sqrt{2}\sin a;\ 3\sqrt{2}\cos a)$

Пусть $3\sqrt{2}\sin a=m$, $3\sqrt{2}\cos a=n$, тогда
$m^2+n^2=18\sin^2 a+18\cos^2 a=18(\sin^2 a+\cos^2 a)=18$
$K(m;n)$
БОО: K лежит в I четверти, Аналогичные K во II, III и IV получаем отражением от O_y, O и O_x соответственно

$AB=2\sqrt{25-n^2}$, $CD=2\sqrt{25-m^2}$
$AB=AK+BK$, $CD=CK+DK$

~~M~~ $M=BK+CK+\cup BC+AK+DK=AB+CD+$
$+\cup BC+\cup AD$

$\angle BKD=\dfrac{\cup AC+\cancel{BD}\cup BD}{2}=90^\circ$

(так как $KD\parallel O_y$, $BK\parallel O_x$, $O_x\perp O_y$), то $BK\perp KD$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\cup BC + \cup AC + \cup AD + \cup BD = 360^\circ$

$\cup AC + \cup BD = 90^\circ \cdot 2 = 180^\circ \Rightarrow \cup BC + \cup AD = 180^\circ$,

$\cup AC + \cup BD = \cup BC + \cup AD = 180^\circ \Rightarrow$ равны суммарные длины этих дуг, и они равны половине длины окружности, $l_{окр} = 2\pi r = 10\pi$,

$\cup BC + \cup AD = 5\pi$.

Периметр $\Phi(a)$ равен $2\sqrt{25-n^2} + 2\sqrt{25-m^2} + 5\pi$

Но $m^2+n^2=18$, $m^2 = 18-n^2$

$M = 2\sqrt{25-(18-n^2)} + 2\sqrt{25-n^2} + 5\pi =$

$= \cancel{2\sqrt{n^2+7}} + 2\sqrt{n^2+7} + 2\sqrt{25-n^2} + 5\pi$, $n \geq 0$, $n \leq \sqrt{18}$

Найдём минимальное значение с помощью производной

$M' = (2\sqrt{n^2+7})' + (2\sqrt{25-n^2})' + (5\pi)' = 2 \cdot 2n \cdot \frac{1}{2\sqrt{n^2+7}} + 2 \cdot (-2n) \cdot \frac{1}{2\sqrt{25-n^2}} = \cancel{\frac{4n}{2\sqrt{25-n^2}}} \cancel{- 4n}$

$= \frac{2n}{\sqrt{n^2+7}} - \frac{2n}{\sqrt{25-n^2}}$

Находим точки экстремума, для этого решаем уравнение $M' = 0$

$\frac{2n}{\sqrt{n^2+7}} = \frac{2n}{\sqrt{25-n^2}}$

$2n = 0$, $n = 0$, m

$\sqrt{n^2+7} = \sqrt{25-n^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$n^2+7=25-n^2$

$2n^2=25-7$

$2n^2=18$

$n^2=9$

$n=3$

$n=0$ и $n=3$ - точки экстремума

при $n=0$: $M=2\sqrt{7}+2\sqrt{25}+5\pi=$
$=2\sqrt{7}+10+5\pi$

при $n=3$; $M=2\sqrt{9+7}+2\sqrt{25-9}+5\pi=$

$=2\sqrt{16}+2\sqrt{16}+5\pi=2\cdot4+2\cdot4+5\pi=16+5\pi$

~~Определим это выра~~ $2\sqrt{7}+10+5\pi<2\sqrt{9}+10+5\pi=$
$=2\cdot3+10+5\pi=16+5\pi$ => максимум достигается при $n=3$, и равен $16+5\pi$.

$m^2=18-n^2=18-9=9$, $m=3$

$K(3;3)$, $K(3\sqrt{2}\sin a;\ 3\sqrt{2}\cos a)$ =>

$3\sqrt{2}\sin a=3$, $\sin a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a=\frac{\pi}{4}+2\pi n$

Но если K лежит во II, III или IV четверти, не стоит отличий: $|\sin a|=|\cos a|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

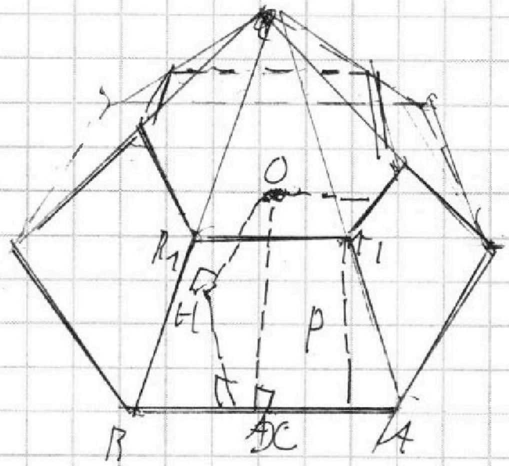
$a=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $16+5\pi$, при $a=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Шар и касается всех ~~граней~~ ребер.

Пусть O – его центр, из O опустим перпендикуляр на все грани

Т.к. он касается всех ребер, то расстояние от O до этих ребер одинаково

По теореме о 3 перпендикулярах $HX \perp AB \Rightarrow H$ – центр вписанной окружности основания.

Т.к. все грани – ~~Отс~~ описанные многоугольники

$S_{бок} = S_{ABB_1A_1} \cdot n = \left(\frac{A_1B_1 + AB}{2}\right) \cdot p \cdot n =$

$= (nA_1B_1 + nAB) \cdot \frac{p}{2} = (P_н + P_в) \cdot \frac{p}{2}$,

где n – кол-во сторон основания, p – апофема

$S_{осн} = R \cdot \frac{P_н}{2}$, где R – радиус вписанной окр-и