



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим число A . Оно состоит из 4 одинаковых цифр, т. е. оно имеет вид $\overline{nnnn}$, где n — цифра от 1 до 9. Значит, оно делится на 1111 ($A = n \cdot 1111$), $\Rightarrow A : 1111$. Но $1111 = 101 \cdot 11 \Rightarrow A : 101$ и $A : 11$ (числа 101 и 11 простые). Т. к. $A \cdot B \cdot C = 177^2$, и оно делится на 101 (т. к. $A : 101$), то число 101 входит в $A \cdot B \cdot C$ в четной степени. В число A оно входит 1 раз ($A < 100^2 < 101^2$).

Значит, $BC : 101 \Rightarrow B : 101$ и $C : 101$.

Но по условию C — двузначное $\Rightarrow 9 < C < 100 \Rightarrow C \neq 101$, значит $B : 101$.

B — трехзначное, значит $B : 101$ и в B есть цифра 2. Из трехзначных чисел только 9th делится на 101: 901, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808 и 909. И только одно из них содержит цифру 2 $\Rightarrow B = 202$, $B \neq 11$.

Аналогично, число 11 входит в A 1 раз ($A < 100^2 < 111 \cdot 11^2 = 111 \cdot 121$) $\Rightarrow BC \neq 11$, т.

$B \neq 11 \Rightarrow C \neq 11$.

Все двузначные числа, делящиеся на 11, заканчиваются 2 одинаковыми цифрами



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Но в чисе C есть цифра 3 $\Rightarrow C = 33$

$$BC = 202 \cdot 33 = 101 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 3 = 1111 \cdot 6$$

$$ABC = 12 \cdot 1111 \cdot 1111 \cdot 6 = 64 \cdot (1111)^2 = 1n^2$$

$\Rightarrow 64$ - точный квадрат, $1 \leq n \leq 9$,

единственный вариант, $n = 6$, $A = 6666$

$$ABC = 6666 \cdot 202 \cdot 33 = (6666)^2 - \text{точный квадрат}$$

Ответ. $[6666, 202; 33]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть } M = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$M = \frac{(y+1) + (x-1) + 2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$$

$$\text{По условию } K = M \Rightarrow \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{xy}$$

$$\text{По условию } xy(x+y+2) = (x+y+2)(x-1)(y+1)$$

$$\text{П.ч. } x > 0, y > 0, \text{ то } x+y+2 > 0, x+y+2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = x + x - y - 1$$

$$x - y - 1 = 0, \quad x = y + 1, \quad x - y = 1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy =$$

$$= 1(x^2 + xy + y^2) - 3xy = x^2 + xy + y^2 - 3xy = (x^2 - 2xy + y^2) =$$

$$= (x-y)^2 = 1^2 = 1.$$

Ответ. 1.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$1. \text{ Пусть } \pi x = a, \quad \pi y = \beta$$

$$(\sin a + \sin \beta) \cdot \sin a = (\cos a + \cos \beta) \cdot \cos a$$

$$\sin^2 a + \sin \beta \cdot \sin a = \cos^2 a + \cos a \cdot \cos \beta$$

$$\sin^2 a - \cos^2 a = \cos a \cdot \cos \beta - \sin a \cdot \sin \beta$$

$$-(\cos^2 a - \sin^2 a) = \cos(a + \beta)$$

$$-\cos 2a = \cos(a + \beta)$$

$$\cos(a + \beta) + \cos 2a = 0$$

$$\begin{cases} 2a + a + \beta = 2\pi n + \pi \\ 2a - (a + \beta) = 2\pi m + \pi \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 3a + \beta = 2\pi n + \pi \\ a - \beta = 2\pi m + \pi \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

2. Возвращаясь к исходным переменным

$$\begin{cases} 3\pi x + \pi y = 2\pi n + \pi \\ \pi x - \pi y = 2\pi m + \pi \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 2n + 1 \\ x - y = 2m + 1 \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Решением обрасси следующие и
множества значений функции $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4}$

$$- \frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \arccos \frac{y}{4} \leq \pi.$$

$$- \frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$$

Равенство $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4}$ достигается при

$$\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \arccos \frac{y}{4} = \pi.$$

$$\begin{cases} \arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} \\ \arccos \frac{y}{4} = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = 1 \\ \frac{y}{4} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -4 \end{cases}$$

$(5; -4)$ — не подходит

$$0 \rightarrow 0 \text{ пр}; -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1.$$

$$-4 \leq y \leq 4, \quad -5 \leq x \leq 5.$$

При этом выполняются также и эти условия

$$\exists x + y = 2k + 1, \quad x - y = 2m + 1, \quad x, y, k, m \in \mathbb{Z}$$

Если x и y — один чётный, то $x+y$ и $x-y$ — чётны. Значит x и y — оба чётны

~~Чётны~~ x и y Составим таблицу всех возможных пар $(x; y)$, удовлетв. \(\Delta\)/ пар,

подходящие условия, исключив пару $(5; -4)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5
+4	✓		✓		✓		✓		✓	
+3		✓		✓		✓		✓		✓
2	✓		✓		✓		✓		✓	
1		✓		✓		✓		✓		✓
0	✓		✓		✓		✓		✓	
-1		✓		✓		✓		✓		✓
-2	✓		✓		✓		✓		✓	
-3		✓		✓		✓		✓		✓
-4	✓		✓		✓		✓		✓	

Подсчитаем $5 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 49$
пар. $(x; y)$

Ответ. а)
$$\begin{cases} 3x + y = 2n + 1 \\ x - y = 2m + 1 \end{cases}, m, n \in \mathbb{Z}.$$

∩ 49.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть y и x — количество месяцев,
 y дней в конце месяца, $y > 4$.

A — Петя и Вова пошли на каток в начале мес.

B — Петя и Вова пошли на каток в конце мес.

$$P(A) = \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{12}{x(x-1)}$$

$$P(B) = \frac{y}{x} \cdot \frac{y-1}{x-1} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$$

$$\text{По условию } 2,5 \cdot P(A) = P(B)$$

$$2,5 \cdot \frac{12}{x(x-1)} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$$

$$\frac{30}{x(x-1)} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$$

$$y(y-1) = 30$$

$$y^2 - y - 30 = 0$$

Или заметим

$$y_1 + y_2 = 1$$

$$y_1 \cdot y_2 = -30$$

$$y_1 = 6, \quad y_2 = -5$$

$y = -5$ — не удовлетворяет неравенству $y > 4$

$$y = 6$$

6 дней будут кататься в конце месяца

Ответ, 6

October. 45



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

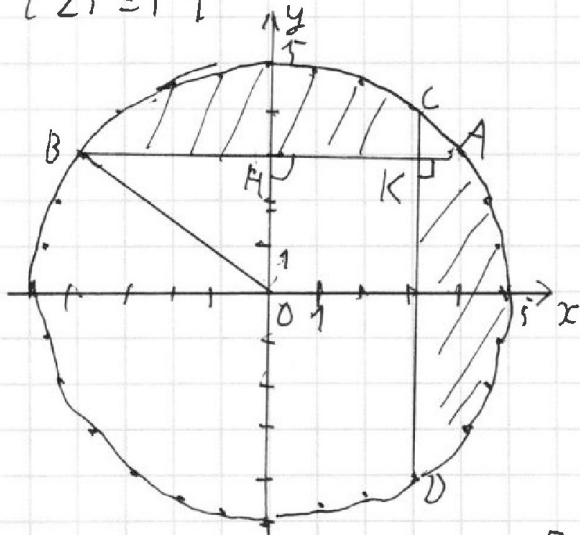
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin a)(y - 3\sqrt{2} \cos a) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

Второе неравенство задаёт множество точек, лежащих внутри круга, ограниченного окружностью с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 5 ($25 = 5^2$).



Второе неравенство + ограниченность 2 областей, ограниченных прямой $y = 3\sqrt{2} \cos a$ и $x = 3\sqrt{2} \sin a$, которые пересекаются в точке $K(3\sqrt{2} \sin a; 3\sqrt{2} \cos a)$.

Пусть $3\sqrt{2} \sin a = m$, $3\sqrt{2} \cos a = n$, тогда
 $m^2 + n^2 = 18 \sin^2 a + 18 \cos^2 a = 18(\sin^2 a + \cos^2 a) = 18$
 $K(m; n)$

ГОО: К лежит в первом, втором, третьем, четвертом квадрантах, поэтому ограничением на O_x, O_y совпадают.

$$AB = 2\sqrt{25 - n^2}, \quad CD = 2\sqrt{25 - m^2}$$

$$AB = AK + BK, \quad CD = CK + DK$$

$$M = BK + CK + BC + AK + DK = AB + CD + BC + AD$$

$$\angle BKD = \angle ACB + \angle ADB = 90^\circ$$

$$(\text{так как } KD \parallel O_y, BK \parallel O_x, O_x \perp O_y, \text{ то } BK \perp KD)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle BC + \angle AC + \angle AB + \angle BD = 360^\circ$$

$$\angle AC + \angle BD = 90^\circ \cdot 2 = 180^\circ \Rightarrow \angle BC + \angle AD = 180^\circ,$$

$$\angle AC + \angle BD = \angle BC + \angle AD = 180^\circ \Rightarrow \text{пары}$$

смежных или этих углов, и/или смежных углов существуют, $\angle_{\text{сум}} = 2\pi \text{ или } 10\pi$,

$$\angle BC + \angle AD = 5\pi.$$

$$\text{Исследуем } f(u) \text{ или } 2\sqrt{25-u^2} + 2\sqrt{u^2+7} + 5\pi$$

$$\text{По } u^2 + u^2 = 18, \quad u^2 = 18 - u^2$$

$$M = 2\sqrt{25-(18-u^2)} + 2\sqrt{u^2+7} + 5\pi =$$

$$= 2\sqrt{u^2+7} + 2\sqrt{u^2+7} + 2\sqrt{25-u^2} + 5\pi, \quad u \geq 0, \quad u \leq \sqrt{18}$$

Найдем минимальное значение с помощью производной

$$M' = (2\sqrt{u^2+7})' + (2\sqrt{25-u^2})' + (5\pi)' = 2 \cdot \frac{2u}{2\sqrt{u^2+7}} + 2 \cdot \frac{(-2u)}{2\sqrt{25-u^2}} = \frac{2u}{\sqrt{u^2+7}} - \frac{2u}{\sqrt{25-u^2}}$$

Поскольку нам нужна экстремум, где это равенство

$$\frac{2u}{\sqrt{u^2+7}} = \frac{2u}{\sqrt{25-u^2}}$$

$$2u \geq 0, \quad u \geq 0, \quad \text{или}$$

$$\sqrt{u^2+7} = \sqrt{25-u^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$h^2 + 7 = 25 - 4?$$

$$2h^2 = 25 - 7$$

$$2h^2 = 18$$

$$h^2 = 9$$

$$h = 3$$

$h = 0$ и $h = 3$ - четыре эквивалента

$$\text{Ал. при } h = 0: M = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{25 + 5i} =$$

$$= 2\sqrt{7} + 10 + 5i$$

$$\text{при } h = 3: M = 2\sqrt{9 + 7} + 2\sqrt{25 - 9 + 5i} =$$

$$= 2\sqrt{16} + 2\sqrt{16 + 5i} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 5i = 16 + 5i$$

Определим, какое из $2\sqrt{7} + 10 + 5i$ и $2\sqrt{9 + 7} + 2\sqrt{16 + 5i} = 16 + 5i$ является максимумом.
при $h = 3$, и равен $16 + 5i$.

$$m^2 = 18 - h^2 = 18 - 9 = 9, \quad m = 3$$

$$K(1; 3), \quad K(3\sqrt{2}\sin\alpha, 3\sqrt{2}\cos\alpha)$$

$$3\sqrt{2}\sin\alpha = 9, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

Но если α лежит в $[0, \pi]$ мы не проверяем, не лигатура определена: $|\sin\alpha| = |\cos\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Ответ $16 + 5i$, при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

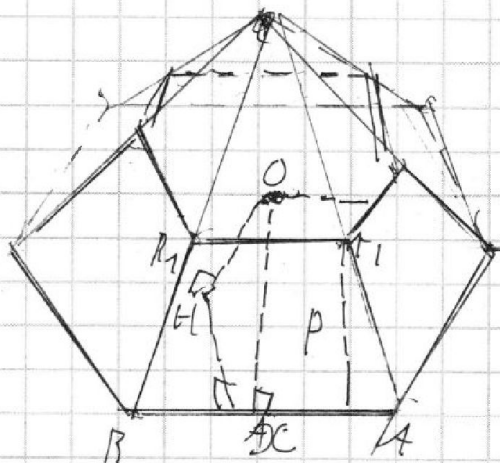
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Нужно найти площадь
всех граней, ребер.
Точка O - его центр,
из O
опущены перпендикуляры
на все грани

Т.к. мы нашли все ребра, то рассмотрим
от O до этих ребер отсюда

Итог: площадь 6 3 треугольников

$H \perp AB \Rightarrow H$ - центр вписанной окружности
основания.

На все грани - ~~одна~~ площадь

$$S_{\text{бок}} = S_{AB A_1 A_2} \cdot 2 = \left(\frac{A_1 B_1 \cdot AB}{2} \right) \cdot 2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} A_1 B_1 + \frac{1}{2} AB \right) \cdot 2 = (P_1 + P_2) \cdot \frac{1}{2},$$

где 1 - кол-во сторон основания, 2 - апофема

$$S_{\text{осн}} = R \cdot \frac{P_1}{2}, \text{ где } R - \text{радиус вписанной окр-ли}$$