



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
  - $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 3, а  $y$  — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 9xy$ .
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .
- б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{16}{5}$ ,  $BP = 2$ ,  $AC = 4$ .
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \quad \sqrt{a^b} = n \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} b : a^n, \text{ но } b \neq a^{n+1}$$

$$A = \overline{aaaa}, \text{ где } a \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

$$\Rightarrow A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101, \quad 11, 101 - \text{простые числа}$$

Заметим, что  $C \nmid 101$ , т.к.  $0 < C < 101$

$$\Rightarrow B : 101, \text{ т.к. } \sqrt[101]{A} = 1, \text{ т.к. } a \text{ и } 11 \nmid 101$$

$$\text{Но ~~также~~ } \sqrt[101]{ABC} = 2k \Rightarrow \sqrt[101]{B} - \text{неч.}$$

$$\text{Но } 101^3 > B \Rightarrow \sqrt[101]{B} = 1 \Rightarrow B = 101 \cdot b, \quad b \in \{1, 2, \dots, 9\}$$

$$\text{Откуда } B \in \{101, 202, 303, \dots, 909\} = \mathcal{D}$$

Заметим, что числа в мн-ве  $\mathcal{D}$  не делятся

$$\text{на } 11 \Rightarrow C : 11 \Rightarrow C \in \{11, 22, 33, \dots, 99\}$$

$$\text{Но т.к. одна из цифр } C = 5 \Rightarrow C = 55$$

$$ABC = \underbrace{(a \cdot 101 \cdot 11)}_A \cdot \underbrace{(b \cdot 101)}_B \cdot 5 \cdot 11 = 5ab \cdot \underbrace{(101 \cdot 11)}_{\text{Точн. квадрат}} \quad \begin{matrix} \text{Точн.} \\ \text{2/квadrat} \end{matrix}$$

$$\text{А) Одна из цифр } B = 1 \Rightarrow B = 101$$

$$\Rightarrow ABC = \underbrace{(a \cdot 101 \cdot 11)}_A \cdot \underbrace{(101)}_B \cdot \underbrace{55}_C - \text{Точн. квадрат}$$

$$\Rightarrow 5a - \text{Точный квадрат} \stackrel{a \in \{1, 2, \dots, 9\}}{\Rightarrow} a = 5$$

Следовательно, подходит только  $(A, B, C) = (5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2

Из условия:

ОДЗ:

$$\begin{array}{l} x \neq 0 \quad y \neq -3 \\ x \neq 3 \\ y \neq 0 \end{array}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \quad \left| \begin{array}{l} ; x+y+1 \neq 0 \\ \text{случай, когда} \\ x+y+1=0 \text{ рассмотреть} \\ \text{потом} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow xy = (x-3)(y+3)$$

$$\Rightarrow 3x - 3y - 9 = 0 \Rightarrow x - y - 3 = 0 \Rightarrow x = y + 3$$

Подставим  $x = y + 3$  в М:

$$M = (y+3)^3 - y^3 - 9y(y+3) = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y = 27$$

Откуда  $M = 27$

Разберём случай  $x + y + 1 = 0$ .

По условию  $x, y > 0$

Следовательно,  $x + y + 1 > 0 + 0 + 1 > 0$

Итак  $x + y + 1 = 0$  не может случиться  
Следовательно подходят только  $M = 27$

Ответ:  $M = 27$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③ д)

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

ОДЗ:  
 $-4 \leq x \leq 4$   
 $-9 \leq y \leq 9$

$$\Leftrightarrow \arccos \frac{x}{4} < 2\pi - \arccos \frac{y}{9}$$

$$\left. \begin{array}{l} \arccos \frac{x}{4} \leq \pi \\ \arccos \frac{y}{9} \leq \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

кроме  $(x, y) = (-4, -9)$

~~Переносим~~ Перенесем полученные в пункте

(а) серии решений в следующем виде:

$$I: (x, y) = (a, 3a - 2k - 1) \quad \text{и} \quad II: (x, y) = (a, 2n + 1 - a)$$

Будем делать перебор по  $x$

т.е. для ~~каждого~~  $\forall a \in \mathbb{Z} \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

нам надо рассмотреть случаи  $x = a$

т.е. это будет перебор 9 случаев.

1)  $x = -4$

в I серии:

$$y = -12 - 2k - 1$$

$$-9 \leq -12 - 2k - 1 \leq 9$$

$$3 \leq -2k - 1 \leq 21$$

$$4 \leq -2k \leq 22$$

$$-11 \leq k \leq -2 \quad \text{исключая } \rightarrow \text{т.е. не все } k \text{ подходят}$$

в II серии:

$$-9 \leq 2n + 1 + 4 \leq 9$$

$$-14 \leq 2n \leq 7$$

$$-7 \leq n \leq 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

у в первой серии:

9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, -5, -7, ~~9~~

(-4; -9) быть нельзя

во второй серии:

-9, -7

такие же

т.е. мы получили 9 реш.

2)  $x = -3$

1-ая серия

$$y = -9 - 2k - 1$$

$$-9 \leq -9 - 2k - 1 \leq 9$$

$$0 \leq -2k - 1 \leq 18$$

$$1 \leq 2k \leq 19$$

$$1 \leq k \leq 9 \Rightarrow 9 \text{ реш.}$$

2-ая серия

идёт по тем же

самым значениям

следует:

УТВ. четн. x без 0-х дают - 10 реш.

т.е. -2, 0, 2 дадут 10 реш.,

а x-неч - 9 реш.

т.е. получим

$$\text{кол-во пар: } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{кол-во} \\ \text{неч}}}{5} \cdot 10 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{кол-во} \\ \text{неч}}}{4} \cdot 9 - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{пара} (-4; -9)}}{1} = 85$$

Ответ: 85



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Шорча QR-кода недопустима!

④ Пусть в классе  $n$  человек.

Посмотрим какая вероятность в начале,  
вероятность  $P_1$  того, что пойдут Петя и  
Вася вместе = вероятность того, что пойдёт Петя  $\times$   
вероятность того, что пойдёт Вася при условии,  
что Петя пошёл =  $\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{(n-1)}$

Аналогично, если билетов  $x$ :

$$P_2 = \frac{x \cdot (x-1)}{n(n-1)}$$

по условию  $P_1 = \frac{P_2}{3,5} \Rightarrow \frac{3,5 \cdot \frac{12}{n(n-1)}}{3,5} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$

$$\Rightarrow x^2 - x - 42 = 0 \Leftrightarrow (x-7)(x+6) = 0 \stackrel{x > 0}{\Rightarrow} x = 7$$

Ответ: 7

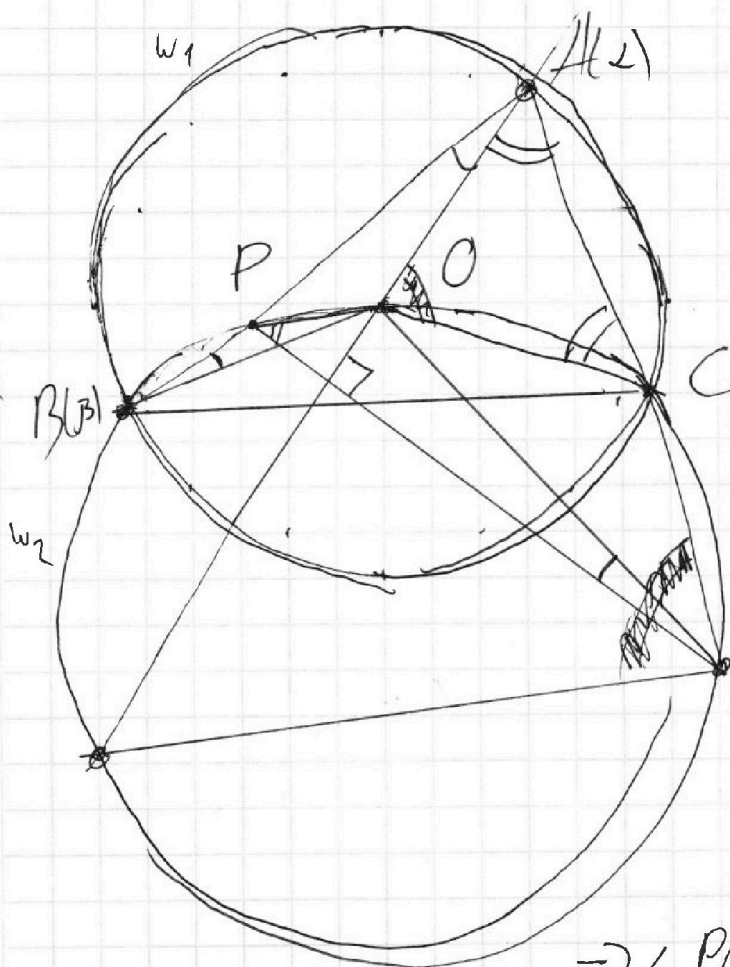


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC \cap w_2 = Q$$

По Th о секущих:

$$AB \cdot AP = AC \cdot AQ$$

$$\Rightarrow AQ = \frac{16 \cdot 26}{5 \cdot 4} = \frac{104}{25}$$

$$\Rightarrow CQ = \frac{4}{25}$$

Известный факт:

$$\triangle APQ \sim \triangle ACB$$

$$\angle OAP = \angle OBA, \text{ т.к. } AO = OB$$

$$\angle OBP = \angle PQO, \text{ т.к. } BPOQ - \text{цикл}$$

$$\Rightarrow \angle PQO = \angle PAO$$

Аналогично  $\angle OAQ = \angle OPQ$

у нас  $\triangle APQ$  подобен  $\triangle ACB$  является  $\triangle APQ$  композ

Есть  $H_A^K$  о  $\triangle ABC$  :  $\triangle ABC \rightarrow \triangle AQP$ , поэтому

направление на центр опис.  $\triangle ABC$

- направление на высоты  $\triangle APQ$

$$\Rightarrow AO \perp PQ, \text{ а мы еще знаем, что } \angle OAP = \angle OBA \text{ и } \angle OBP = \angle PQO$$

$$\Rightarrow O - \text{ортоцентр } \triangle APQ$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $O^*$  — центр опис  $\triangle APQ$

$M$  — середина  $[PQ]$ ,  $R^*$  — радиус  $(APQ)$

Общезвестный факт:

$$AO = 2O^*M \quad (\text{т.к. } O - \text{ортоцентр } \triangle APQ)$$

$$\Rightarrow AO = 2R^* \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{AO}{2R^*} = \frac{1}{2} \frac{R}{R^*}$$

Но  $\frac{R}{R^*}$  — коэффициент подобия  $\triangle APQ$  и  $\triangle ACB$

$$\text{т.е. } \frac{R}{R^*} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \frac{AC}{AB}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{AC \cdot AB}{AB \cdot AP} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{AB \cdot AC^2}{AP} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{26}{5} \cdot 4^2}{\frac{16}{5}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{26 \cdot 4^2}{16} =$$

$$= \frac{13}{2}$$

Ответ:  $\frac{13}{2}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

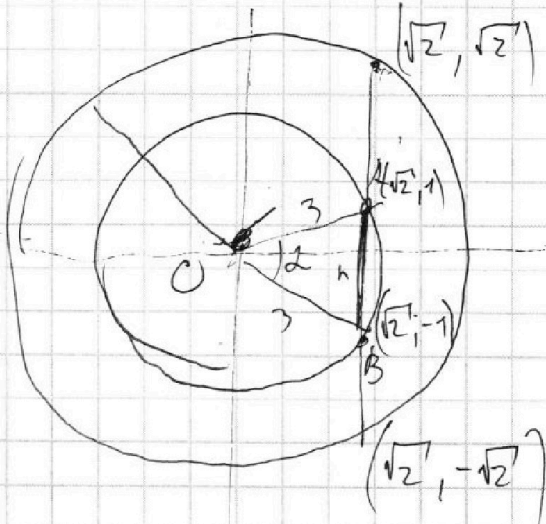
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посчитаем периметр  $M$ :



$$h = 1 - |-1| = 2$$

Тн  $\cos \angle AOB$ :

$$3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos \angle AOB = 2^2$$

$$\Rightarrow \cos \angle AOB = \frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha$$

что  
добавили

$$\Rightarrow \text{Периметр } M = 2\pi R - 2 \cdot \frac{\arccos \angle AOB}{2\pi} \cdot 2\pi R + 2 \cdot AB$$

часть окр., которую  
удалили

$$\Rightarrow \text{Периметр } M =$$

$$= 8\pi - 2 \cdot \left[ 8\pi \left( 1 - \frac{\arccos \frac{7}{9}}{2\pi} \right) + 2 \right]$$

↑  
ОТВЕТ.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

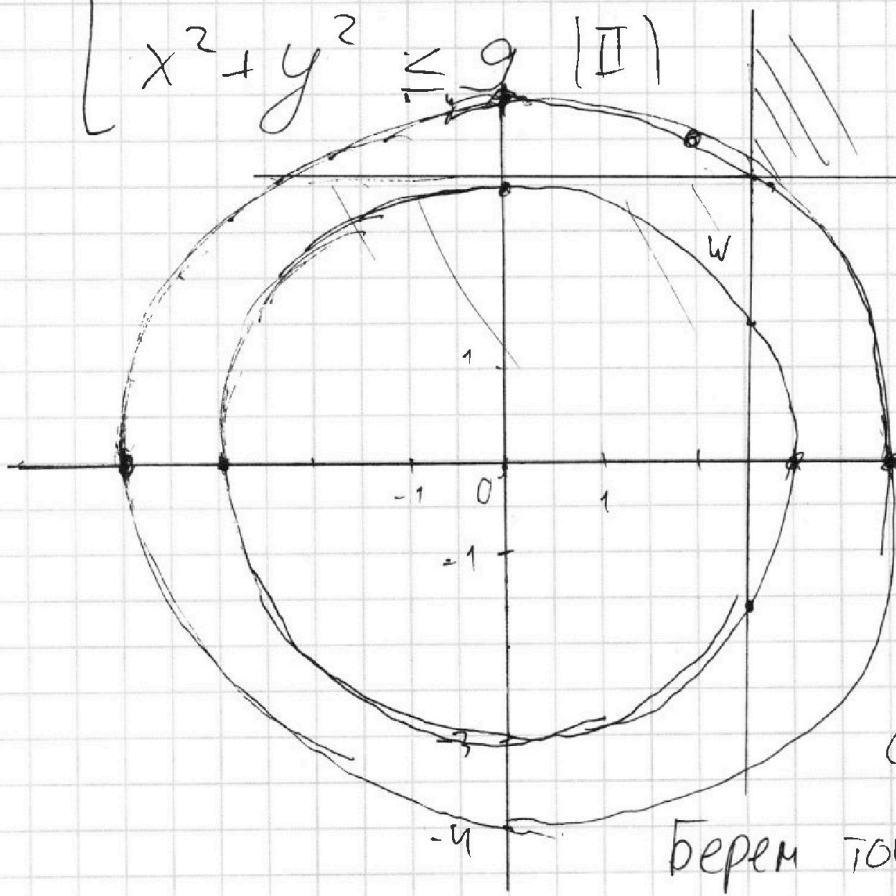
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5

$$\begin{cases} (x - 2 \cdot \cos \alpha)(y - 2 \cdot \sin \alpha) \geq 0 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 \leq 9 & \text{(II)} \end{cases}$$



Второе  
представляет  
собой круг  
радиуса 3

А (I) можно  
интерпретировать  
следующим образом

Берем точку на

окружности радиуса 4 и проводим условную  
Декартову систему координат. Тогда в ней  
нам подходят I и III четверти.

Пусть эта "условная" Декартова система  
координат задана прямыми  $y = a$  и  
 $x = b$ . АИ (понятно <sup>что</sup> <sup>будет</sup> <sup>один</sup> <sup>или</sup> <sup>из</sup> <sup>"четвертей"</sup> <sup>не</sup>)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6

НУО будем считать  $a \geq 0$  и  $b \geq 0$ ,  
т.к. карта. случаи симм. отн.  $O_x, O_y$  и  $a, b$   
дают одинаковый периметр.  $a^2 + b^2 = 4$

$y = a$  пересекает  $w$  в  $(-\sqrt{9-a^2}; a)$  и  $(\sqrt{9-a^2}; a)$   
 $x = b$  пересекает  $w$  в  $(b; -\sqrt{9-b^2})$  и  $(b; \sqrt{9-b^2})$

Когда мы ~~заменяем~~ мы условно заменяем  
периметр окружности на хорды в  
периметре, тем самым мы уменьшаем  
периметр поэтому мы хотим, чтобы то  
что мы изменили было как можно  
меньше. т.е. хотим  $\min(2\sqrt{9-a^2} + 2\sqrt{9-b^2})$   
 $\Rightarrow \min(\sqrt{9-a^2} + \sqrt{9-b^2})$  из условия  $a^2 + b^2 = 4$   
 $b^2 = 4 - a^2$

$$\sqrt{9-a^2} + \sqrt{9-b^2} = \sqrt{9-a^2} + \sqrt{5+a^2} = f(a)$$

$$f'(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2a}{\sqrt{9-a^2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5+a^2}} = a \left( \frac{1}{\sqrt{5+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{9-a^2}} \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 4

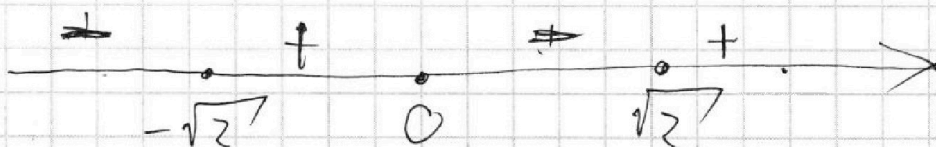
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6

$$f'(a) = 0$$

$$a \left( \frac{-1}{\sqrt{5+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{9-a^2}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{9-a^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 5+a^2 = 9-a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \pm \sqrt{2} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \min \text{ при } a = \sqrt{2} \text{ (т.к. } a > 0)$$

$$\Rightarrow \max \text{ периметра при } a = \sqrt{2}$$

Вспомним, что  $2 \sin \alpha = a \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Но как мы выяснили ранее нам также подходят ~~эти~~ углы полученные из этих отрезков симметрией отн.  $Ox, Oy, O$ , но эти углы для этих для нашего  $\alpha$  попадают в серию  $\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



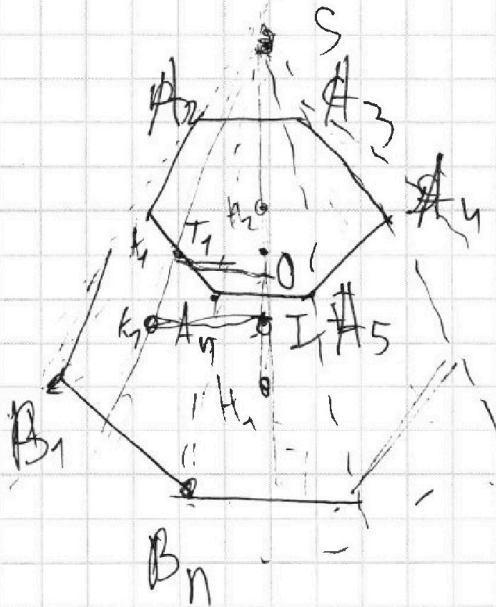
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим полную пирамиду правильную пирамиду. Профиль ребра до пересечения в  $S$ .

Раз существует впис. сфера  $\Rightarrow$  длины высот из  $S$  на ребра равны. Так же известный факт, что сумма углов через один равна другой сумме углов через  $1$  (если  $n \geq 2$ )

У нас есть сфера, которая касается всех рёбер, её центр лежит на прямой  $S-H_1-H_2$  (Перп. из  $S$  на плоскости  $\perp$  плоскости  $H_1-H_2$ ) Также на этой прямой лежит центр впис. сферы



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Отметим точки касания  $T_1$  и  $K_1$

$OI^2 = R^2 - r^2$ . |  $W$  и  $\Omega$  наши сферы  
и отметим

$$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{ST_1}{SK_1} = \frac{\sqrt{SO^2 + OT_1^2}}{\sqrt{ST_1^2 + IK_1^2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{3} \text{ а) } (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \sin \pi y \cdot \sin \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\Leftrightarrow -\cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi x - \pi y) + \cos 2\pi x = 0$$

По формуле суммы косинусов это равносильно:

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi y + 2\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi y - 2\pi x}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \quad (I) \\ x + y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \quad (II) \end{cases}$$

Тогда I даёт систему реш:  $(x, y) = \left(\frac{1+2k+a}{3}, a\right)$ ,  
где  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$

А II даёт:  $(x, y) = (1-a+2n, a)$ , где  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

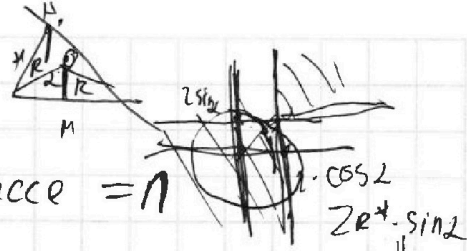
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4)

$$\sqrt{9-a^2} + \sqrt{9-b^2} = \min$$



Пусть кол-во человек в классе =  $n$

\* Посчитаем кол-во ~~чет~~ ~~общее~~ кол-во четверок (без учета порядка)

$$\text{их кол-во} = n \cdot C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

\* Посчитаем кол-во четверок содержащих

$$\frac{16}{n^2} = \frac{4}{n} \cdot \frac{4}{n} \cdot 3,5 \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{x(x-1)}{n^2}$$

$$x^2 - x - 49 = 0 \quad \text{р.к.}$$

$$(x-7)(x+6) \Rightarrow x=7 \quad \text{т.е. } \neq \text{слетов выделено}$$

$$3,5 \frac{C_n^2}{C_n^4} = \frac{C_n^x}{C_n^{x-2}} \cdot \frac{C_n^{x-2}}{C_n^x}$$

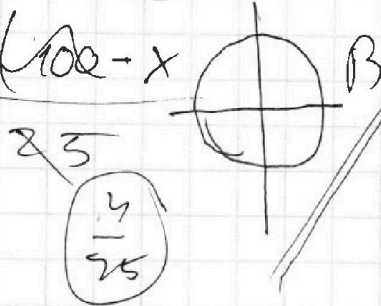
$$3,5 \cdot \frac{n(n-1) \cdot 4!}{2! \cdot n(n-2)(n-3)} = \text{т.е. } 104$$

$$\arccos \frac{x}{4} < \pi - \arccos \frac{x}{5} \quad 104$$

$$4 \cdot \frac{26}{5} = \frac{26}{5} = \frac{10}{25} = \frac{8}{25}$$

$$\frac{16 \cdot 26}{25} = \frac{100 \cdot (100-x)}{25}$$

$$\frac{4 \cdot 26}{25} = \frac{104}{25}$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$$(y+3)^3 - y^3 - 9y(y+3) =$$

$$= y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y = 27$$

$$x = -y - 1$$

$$2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2 + \pi k$$

$$\arccos < \pi$$

$$\frac{n(n-1)}{n(n-1)} : \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$$\frac{26}{5} - \frac{18}{5} = 4x$$

