



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- 1) по условию $A = \frac{1111a}{11} = 111a = 11 \cdot 101a$
- 2) Внимательно, что 101 - простое число.
- может быть $AB(= k^2$, и $A : 101$, то $k^2 : 101$; $\Rightarrow k : 101$; $\Rightarrow$
($k \in \mathbb{N}$)
 $\Rightarrow k^2 : 101^2$. тогда $AB(: 101^2$
- $A = 101 \cdot 11a : 101^2$. $101 \cdot 11a : 101^2$, н.в. $a \in [1; 9]$; $11 : 101$
и 101 - простое
 - $(-)$ - делительное число $\Rightarrow$ $(: 101$, н.в. 101 - простое.
 - знаем $B : 101$. В номере должно быть равно 101, 201, 301, 401, 501, 601, 701, 801, 901. По условию разрядов должно быть $B = 101$
- 3) Аналогично (2) $AB(: 11^2$
- $A = 101 \cdot 11a : 11^2$. $101 \cdot 11a : 11^2$, н.в. $a \in [1; 9]$; $101 : 11$
и 11 - простое
 - $B = 101 : 11$
 - знаем $C : 11$. (номер должен быть равно 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.
- по условию разрядов только $C = 55$
- 4) тогда $AB(= 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 101 \cdot 11 \cdot 5 = (101 \cdot 11)^2 \cdot 5a = k^2$ $k \in \mathbb{N}$
тогда равенство выполнено, следовательно, тогда 5a должно
квадратом натурального числа. $5a : 5 \Rightarrow 5a$ делится : 25
н.в. 101 и a - цифра $\in [1; 9]$, но $a = 5$ - единственный
вариант.
(5555; 101; 55) - единственная ~~возможная~~ комбинация разрядов.
Ответ: (5555; 101; 55)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 13

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

12

$$\boxed{n \neq 3} \quad n, y > 0$$

1) пусть $n_1 = n - 3$; $y_1 = y + 3$

пусть $k_1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{y_1} + \frac{1}{n_1 y_1}$

2) по условию $k = k_1$; $\Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{y} + \frac{1}{ny} = \frac{1}{n-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(n-3)(y+3)}$ (*)

(*) $\frac{n+y+1}{ny} = \frac{n+y+1}{(n-3)(y+3)} \quad | : n+y+1 > 0 \quad (n, y > 0);$

$\frac{1}{ny} = \frac{1}{(n-3)(y+3)} \Rightarrow ny = (n-3)(y+3); \quad -3y + 3n - 9 = 0;$
 $\boxed{n - y = 3};$

$\boxed{n = y + 3}$

3) $M = n^3 - y^3 - 9ny = (n-y)(n^2 + ny + y^2) - 9ny = 3(n^2 + ny + y^2) - 9ny =$
 $= 3(n^2 - 2ny + y^2) = 3(n-y)^2 = \boxed{27}$ —- эг. *возможный вариант*

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 4 ИЗ 23

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a)

13

$$(\sin 5x - \sin 5y) \sin 5x = (\cos 5x + \cos 5y) \cos 5x$$

↑
↓

$$\cancel{\sin \frac{x-y}{2}} \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin 5x = \cancel{\cos \frac{x+y}{2}} \cdot \cos \frac{5x-y}{2} \cdot \cos 5x$$

- или $\cos \frac{5x+y}{2} = 0$, но равенство верно.

$$\frac{\pi(2k)}{2} = \frac{\pi}{2} + 5x; k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + k; \quad x+y = \pi + 2k; \quad y = -x + \pi + 2k$$

ответом все пары будут $(x_0; -x_0 + \pi + 2k); k \in \mathbb{Z}$

- или $\cos \frac{5x+y}{2} \neq 0$, поделим на него обе части;

$$2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \sin 5x = 2 \cos \frac{5x-y}{2} \cdot \cos 5x$$

$$\text{положим } \frac{\pi(x-y)}{2} = a; \quad 5x = b$$

$$2 \sin a \sin b = 2 \cos a \cos b; \quad (\Rightarrow) \quad \cos(a-b) - \cos(a+b) = \cos(a-b) + \cos(a+b);$$

$$\cos(a+b) = 0; \quad a+b = \frac{\pi}{2} + 5n; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi(x-y)}{2} + 5x = \frac{\pi}{2} + 5n \quad | \cdot \frac{2}{\pi} \quad x-y + 2x = \frac{1}{2} + 2n;$$

$$3x-y = \frac{1}{2} + 2n; \quad n \in \mathbb{Z}$$

ответом все пары будут $(x_0; 3x_0 - \frac{1}{2} - 2n); n \in \mathbb{Z}$

1a) Ответы: $(x_0; -x_0 + \pi + 2k); (x_1; 3x_1 - \frac{1}{2} - 2n); n, k \in \mathbb{Z}$

б) (и с) сколько? $n, y \in \mathbb{Z}$: вспомогательно 1a) и

$$a \cos \frac{\pi}{2} + a \cos \frac{\pi}{2} \leq 2\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
5 ИЗ 23

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) по определению, $\begin{cases} \arccos \frac{x}{4} \leq \pi; & x \in [-4; 4] \\ \arccos \frac{y}{9} \leq \pi & y \in [-9; 9] \end{cases} (*)$

неотрицательные ограничения.

н.д. $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{Z}$, то x может принимать значения $-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$

y может принимать значения $-9; -8; -7; \dots; 7; 8; 9$

2) заметим, что $\arccos \frac{x}{4} \leq \pi$ и $\arccos \frac{y}{9} \leq \pi$

значит $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq 2\pi$. Но у нас строгое неравенство. значит, для его выполнения достаточно (учитывая $(*)$)

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{4} \neq \pi \\ \arccos \frac{y}{9} \neq \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} \neq -1 \\ \frac{y}{9} \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -9 \end{cases}$$

н.д. пара $(-4; -9)$ - не подходит. Остальные возможные пары, удовл. $(*)$ подходят под решение неравенства.

Осталось проверить, можно ли нам удовлетворить условиям а. пусть $\sum$ - кон. во рел.

3) - для $x = -4$, но под условием подходит пара $(-4; -9)$

$(-4; -3+2k)$ и $(-4; -13-2n)$ $k, n \in \mathbb{Z}$

$(2.1) \downarrow$ (2.2)

$(2.1) -9 \leq -3+2k \leq 9 \quad || :2$

$-6 \leq 2k \leq 12$

$k \in [-3; 6]$ но $k=6$ не подходит, так. пара $(-4; 9)$ - не подходит.

Остальные $k \in [-3; 5]$ - подходят. упр. равно 9 или 9, следовательно в решении

$(2.2) -9 \leq -13-2n \leq 9 \quad || :(-2)$ $9 \geq 2n+13 \geq -9 \quad || :(-2)$ $-4 \geq 2n \geq -22$

$n \in [-11; -2]$, но $n=-11$ не подходит, н.д. пара $(-4; 9)$ не подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
7 ИЗ 23

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и 3 (уточ.)

~~Решение задачи № 2:~~

$h \in [-11; -2]$ $h = -11$ - не подходит, т.к. пара $(-4; 9)$ - не подходит.

Остаточная $h \in [-10; -2]$ подходит. Итого равно $\boxed{9}$ вариантов, способ не является решением.

4) если $n = -3$:

4.1) $(-3; -2+2h)$ $-9 \leq -2+2h \leq 9$; $-7 \leq 2h \leq 11$

$h \in [-3; 5]$ $\boxed{9}$ вариантов; все подходит

4.2) $(-3; -10-2h)$ $-9 \leq -10-2h \leq 9$; $9 \geq 2h+10 \geq -9$;

~~$-11 \geq 2h \geq -15$~~ $h \in [-5; -7]$

$\boxed{9}$ вариантов, все подходит

5) если $n = -2$:

5.1) $(-2; -2)$

Пока мы не сможем учитывать совпадения

3) если $n = -4$, то ~~по~~ h - не подходит, т.к. пара

$(-4; 5+2h)$; $(-4; -13-2h)$; $h, n \in \mathbb{Z}$
1) 1.1) 1) 2.1)

(3.1) $-9 \leq 5+2h \leq 9$

$h = -7$

$(-4; -9)$

$-7 \leq h \leq 2$ $h \in [-7; 2]$, но ~~$h = -7$~~ не подходит, т.к. ~~$(-4; -9)$~~ не пер.

Остаточная $h \in [-6; 2]$: 9 вариантов $\Rightarrow \boxed{9}$ пер., все подходит

(4.2) $-9 \leq -13-2h \leq 9$; $-9 \geq 13+2h \geq -9$; $h \in [-11; -2]$

но ~~$h = -11$~~ не подходит, т.к. ~~$(-4; -9)$~~ не пер. ~~$(-4; -9)$~~ не пер.

~~$h = -11$~~ $h = -2$

Остаточная $h \in [-10; -2]$: 9 вариантов $\Rightarrow \boxed{5}$ пер., все ~~подходит~~
подходит



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 8 ИЗ 23

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Далее $27-4 \Rightarrow$ если $\frac{n}{2} \neq \pi \Rightarrow$ по ОДЗ пер-во

$\arccos \frac{2}{n} + \arccos \frac{4}{n} < 2\pi$ обязательно всегда, н.д.

~~Остаток~~ далее при переносе n из неравенства
 и дополнительные условия: удовлетворение ур-ния (6)
 и $\begin{cases} n \in [-4; 4] \\ n \in [-5; 9] \end{cases}$

4) - если $n = -3$

(4.1) $[-3; 4+2n]$ $-9 \leq 4+2n \leq 9$ $k \in [-6; 2]$: **9 пер.**
 $-7 \leq 2n \leq 5$

(4.2) $[-3; -10-2n]$ $-9 \leq -10-2n \leq 9$ $n \in [-5; -1]$: **9 пер.**
 $-19 \leq 2n \leq -7$

5) - если $n = -2$:

(5.1) $[-2; 3+2n]$ $-9 \leq 3+2n \leq 9$; $k \in [-6; 3]$: **10 пер.**

(5.2) $[-2; -7-2n]$ $-9 \leq -7-2n \leq 9$ $n \in [-8; 1]$: **10 пер.**

6) - если $n = -1$:

(6.1) $[-1; 2+2n]$ $-9 \leq 2+2n \leq 9$ $k \in [-5; 3]$: **9 пер.**

(6.2) $[-1; -4-2n]$ $-9 \leq -4-2n \leq 9$ $n \in [-6; 2]$: **9 пер.**

7) - если $n = 0$:

(7.1) $[0; 1+2n]$ $-9 \leq 1+2n \leq 9$; $k \in [-5; 4]$: **10 пер.**

(7.2) $[0; -1-2n]$ $-9 \leq -1-2n \leq 9$ $n \in [-5; 4]$: **10 пер.**

8) - если $n = 1$:

(8.1) $[1; 2n]$ $-9 \leq 2n \leq 9$ $k \in [-4; 4]$: **9 пер.**

(8.2) $[1; 2-2n]$ $-9 \leq 2-2n \leq 9$ $n \in [-3; 5]$: **9 пер.**

~~9) -~~

9) - если $n = 2$:

(9.1) $[2; 4n-1]$ $-9 \leq 4n-1 \leq 9$ $k \in [-4; 5]$: **10 пер.**

(9.2) $[2; 5-2n]$ $-9 \leq 5-2n \leq 9$ $n \in [-2; 7]$: **10 пер.**



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 2 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

13 / 12 / 1

10) - $\dim \pi = 3$:

(10.1) $(3; 2k-2)$ $-9 \leq 2k-2 \leq 9$ $k \in [-3; 5]: 9 \text{ рел.}$

(10.2) $(3; 8-2k)$ $-9 \leq 8-2k \leq 9$ $k \in [0; 8]: 9 \text{ рел.}$

11) - $\dim \pi = 4$:

(11.1) $(4; 2k-3)$ $-9 \leq 2k-3 \leq 9$ $k \in [-3; 6]: 10 \text{ рел.}$

(11.2) $(4; 10-2k)$ $-9 \leq 10-2k \leq 9$ $k \in [1; 10]: 10 \text{ рел.}$

12) н.е. В пункте (3-11) все решения позитивны, но
 один из них отрицательный = отрицательных решений в каждом
 пункте. Проверим варианты пункта, решения из
 этого пункта отрицательны могут образоваться (или отрицательны
 и в другом)

$-n_0 + 1 + 2k = 3n_0 - 1 - 2k$

$2k + 2 = 4n_0 - 2$; $k + 1 = 2n_0 - 1$

тогда получаем кат. во совокупности во
 всех пунктах

пункт	3	4	5	6	7	8	9	10	11
кат. во совокупности	9	9	10	9	10	9	10	9	10

13) $k + n = -9$

тогда $k \in [-6; 2]$ наиб. элементный н. е. л. совокупности в 9 рел.

аналогично: наименьшее л. совокупности, проходящее по к.

14) $k + n = -7$

15) $k + n = -5$

16) $k + n = -3$

17) $k + n = -1$

18) $k + n = 1$

19) $k + n = 3$

20) $k + n = 5$

21) $k + n = 7$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
10 ИЗ ??

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

тогда итогов

$$\Sigma = (915-9) \cdot 5 + (10120-20) \cdot 4 = 40 + 45 = \boxed{85}$$

~~85~~ (5) Answer: ~~85~~ 85



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

14 ИЗ 13

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть ~~на~~ ^{на} входе ровно n чел. Пусть считаем, что $n \geq 5$, ~~то~~ ^{то} ~~уже~~ ^{уже} задано не менее 4 человек.

Пусть в конце мессенжа было k человек. $k \geq 4$

• начал мессенжа: n чел и k человек

• конец мессенжа: n чел и k человек

Пусть P_1 - вер-ть того, что P_n в начале попадет на k -го из n в начале мессенжа.

Пусть P_2 - вер-ть того, что P_n в конце попадет на k -го из n в конце мессенжа.

2) Рассчитаем P_1 : $P_1 = \frac{\text{числ. исходов}}{\text{вс. исходы}}$ (содержит независимые и зависимые)

Всех исходов ровно $\binom{n}{k}$ (выберем k человек из n).

Составляющих исходов ровно $\binom{n-2}{k-2}$. (даем P_n в подмешку и на оставшиеся $k-2$ "места" выберем $k-2$ из $(n-2)$ -х человек)

$$P_1 = \frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{12}{n(n-1)}$$

3) Рассчитаем P_2 : $P_2 = \frac{\text{числ. исходов}}{\text{вс. исходов}}$

Всех исходов ровно $\binom{n}{k}$ (выберем k человек из n)

Составляющих исходов ровно $\binom{n-2}{k-2}$ (даем P_n в подмешку и на оставшиеся $k-2$ места выберем $k-2$ из $(n-2)$ -х человек)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
12 из 23

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$n < k$ (прог)

$$\text{тогда } P_1 = \frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}} =$$

$$= \frac{(n-2)!}{(k-2)! \cdot (n-2-(k-2))!} \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{(n-2)!}{(k-2)! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{k! \cdot (n-k)!}{n!} =$$

$$= \frac{(k-1)k}{(n-1) \cdot n}$$

4) по условию, $P_2 = 3,5 P_1$; $P_2 = \frac{7}{2} P_1$.

тогда $\frac{(k-1)k}{(n-1) \cdot n} = \frac{7}{2} \cdot \frac{12}{n(n-1)} \quad | \cdot n(n-1) > 0 \quad (n \geq 5)$

$$k^2 - k = 42; \quad k^2 - k - 42 = 0 \quad \begin{cases} k = 7 \\ k = -6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} k = 7 \\ k = -6 \text{ - не подходит (} k < 0 \text{)} \end{array}$$

$k = 7$ - подходит. При предположении $k = 7$ или равносильности, так что $k = 7$ - ед. подходящее значение.

Ответ: 7

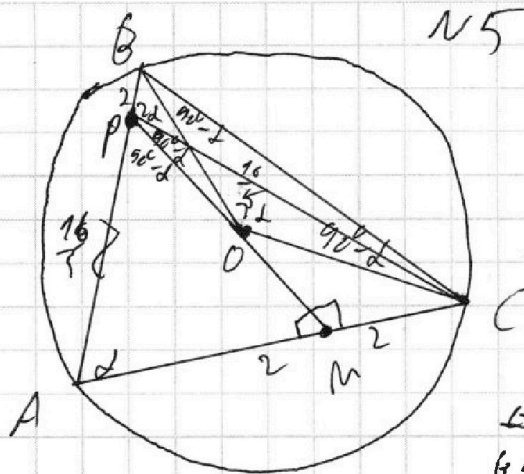


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
16 ИЗ 23

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) н.с. Р лежит на отрезке BC , так как $BO=CO$, то POC - биссектриса.
2) пусть $\angle BAC = d$; тогда $\angle BOC = 2d$ (центральный угол).
 $\angle POC$ - биссектриса $\Rightarrow \angle BPC = 2d$

3) $BO=OC=R$ (радиус)

3) пусть $BC = p$. н.с. $BO=OC$, тогда $BO=OC=p$. $\triangle BOC$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle OBC = \angle OCB = 90^\circ - d$

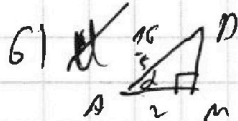
4) $\triangle POC$ - биссектриса $\Rightarrow \angle CPO = \angle BPO = 90^\circ - d$

$\angle APO = 180^\circ - \angle OPB = 180^\circ - 2d - 90^\circ + d = 90^\circ - d$; PO - делит $\angle APC$.

пусть $PO \cap AC = M$

Заметим, что $\angle PAM + \angle PMA = 90^\circ \Rightarrow \angle AMP = 90^\circ \Rightarrow PO$ - высота $\triangle APC$

5) в $\triangle APC$ PO - биссектриса и высота $\Rightarrow \triangle APC$ - равнобедренный. $AP=PC=\frac{16}{5}$; PM - медиана; $AM=MC=2$



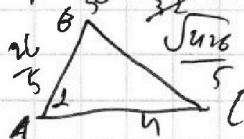
6) в $\triangle APM$ $\cos d = \frac{2}{16} \cdot 5 = \frac{5}{8}$; $\cos d = \frac{5}{8}$; $\sin d = \frac{\sqrt{39}}{8}$
 d - острый

7) Пусть $\angle BPC =$

$$\cos 2d = 2 \cos^2 d - 1 = 2 \left(\frac{5}{8} \right)^2 - 1 = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}$$

$$BC^2 = BP^2 + PC^2 - 2 \cdot BP \cdot PC \cdot \cos 2d = 16 + 16 - 2 \cdot 16 \cdot \frac{9}{16} = 32 - 18 = 14$$

8) Пусть $\triangle BPC$:



$$AB = \frac{16}{5}, AC = 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
17 ИЗ 23

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot \frac{26^2}{5} \cdot \frac{\sqrt{39}}{26} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

Ответ: $\frac{13\sqrt{39}}{10}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
19 ИЗ 23

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~1) $P(x)$~~ $\text{mat } M = ? : \Delta = ?$

№6

Решение:

1) $\begin{cases} |n - \cos t| / |y - 2 \sin t| \geq 0 & (1) \\ n^2 + y^2 \leq 4 & (2) \end{cases}$

2) $n^2 + y^2 \leq 4$ — единичный круг, порожденный ~~векторами~~ векторами u и v в плоскости $\text{span}(u, v) = \text{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$; $R=3$

1) $|n - \cos t| / |y - 2 \sin t| \geq 0$. Заметим, что если $n = \cos t$ или $y = 2 \sin t$, то $0 \geq 0$ — верно. По условию (1) — предельно малая ~~функция~~ функция (1) и (2) рассмотрим $u \leq 2$ тогда u и тогда $M=0$ ~~и~~ тогда Δ ~~можно считать, что~~ $n \neq \cos t$; $y \neq 2 \sin t$. $n \neq \cos t$ и $y \neq 2 \sin t$

тогда $|n - \cos t| / |y - 2 \sin t| \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n > \cos t \\ y > 2 \sin t \\ n < \cos t \\ y < 2 \sin t \end{cases} \quad (*)$

2) рассмотрим $\text{span}(u, v)$ $n^2 + y^2 = 4$ ($\text{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$; $R=2$).

~~В~~ рассмотрим $\Delta = \Delta_0$. тогда $x = \cos \Delta_0$ — единичный вектор Δ_0 на "единичной окружности" с $R=2$ (векторы u и v в $\text{span}(u, v)$). на Δ_0 — единичный вектор. аналогично $y = 2 \sin \Delta_0$ — вектор Δ_0 на "единичной окружности" с $R=2$ (векторы u и v в $\text{span}(u, v)$) на Δ_0 — единичный вектор.

тогда (*) задают 2 непересекающиеся области, ~~на~~ которые образуют 2 вертикальных вектора u и v .

поэтому все точки в $\text{span}(u, v)$

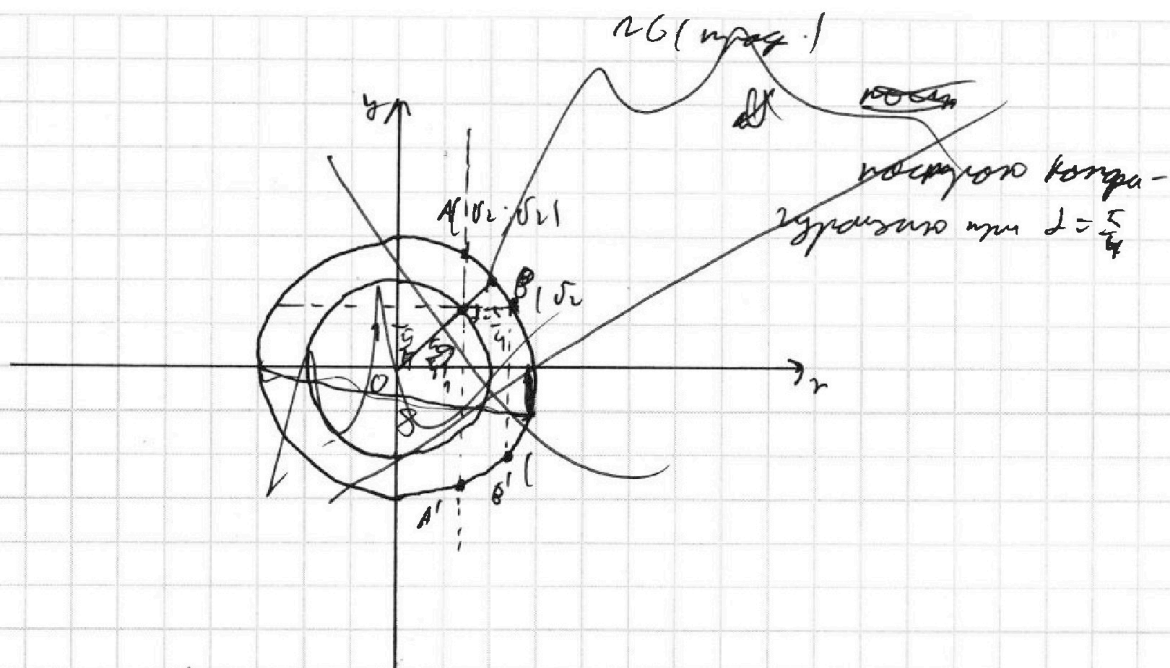


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

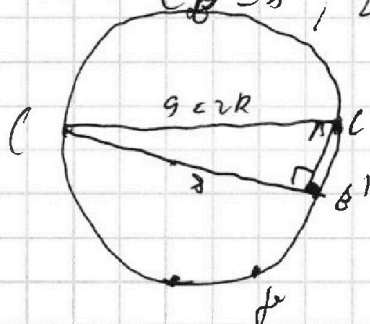
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
23 ИЗ 23

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



н.н. $\angle D' = 8$; $2R = 9$, но $\angle DDB' =$



$$\beta = \arcsin \frac{8}{9}$$

$$\text{и тогда } \angle DDB' = \frac{2R}{\sqrt{8}} \cdot \arcsin \frac{8}{9} =$$

$$\approx \boxed{3 \arcsin \frac{8}{9}}$$

Ответ: $4R^2 + 3 \arcsin \frac{8}{9}$; $\angle = \pm \frac{5}{9} + 5n$; $n \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
6 ИЗ 23

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \leq 25$$

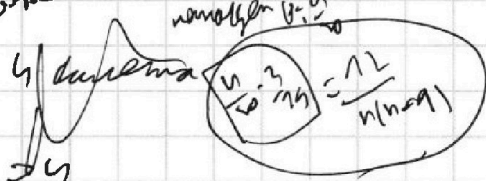
$$-25 \leq \frac{\pi}{4} \leq 25$$

$$x \in [-4; 4] \quad \therefore \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \quad y \in [-9; 9]$$

$$x = -4 \quad 5 \text{ и } 24$$

$$\sin \frac{\pi}{4} \leq 5 \quad \sin \frac{\pi}{4} \leq 5 \quad \sin \frac{\pi}{4} \leq 5$$

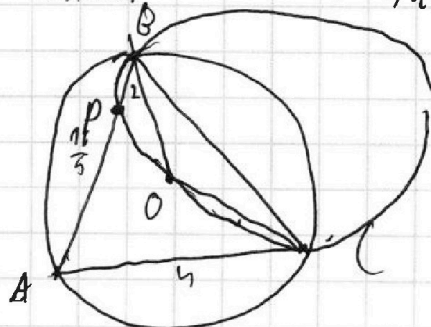
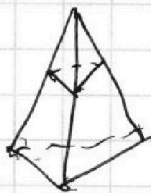
то есть $\sin \frac{\pi}{4} = 5$; $\frac{\pi}{4} = -7$
 $\sin \frac{\pi}{4} = 5$; $\frac{\pi}{4} = -7$; $\frac{\pi}{4} = -9$
 $\sin \frac{\pi}{4} = 5$; $\frac{\pi}{4} = -7$; $\frac{\pi}{4} = -9$

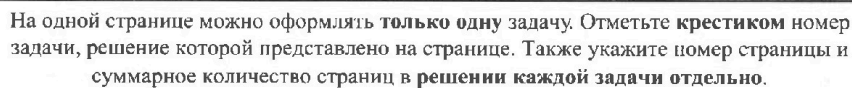


n цел ; n делит
 n цел ; k делит

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}$$

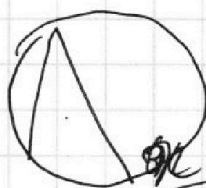
$$P = \frac{(n-2)!}{(n-2)!} = \frac{(n-2)!}{(n-2)!} = \frac{(n-2)!}{(n-2)!} = \frac{(n-2)!}{(n-2)!}$$





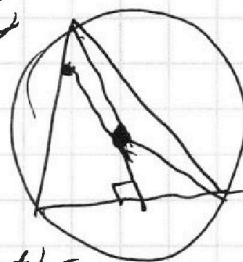
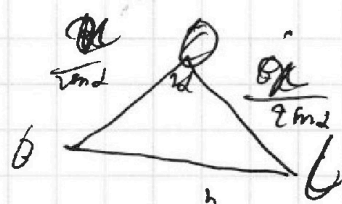
СТРАНИЦА
13 ИЗ 23

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$h = \frac{Q}{2\pi d}$$



$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t(1-t)} =$$

$$c = \frac{1.716}{t} = \pi$$

beginning with 2nd PL)

Grading & regrade PC.

2. b b) warum a?

↳ DDC warum bis

16.25 =

$$2 \cdot 4 \cdot 16 = 2^5 \cdot 2^1$$

$$\omega_{sd} = \frac{286}{45} + \frac{1110}{0.5} - \frac{785.2}{65} = 118.5$$

$$h_C = 16 + \frac{16^2}{5^2} - 2 \cdot \frac{16}{5} \cdot \cos d =$$

$$n^L = n + pL^L - 4 pL \ln 2$$

$$16.4.2.5 \rightarrow 16.64 \rightarrow 640$$

$$2. \text{ rigid; } \cancel{A}$$

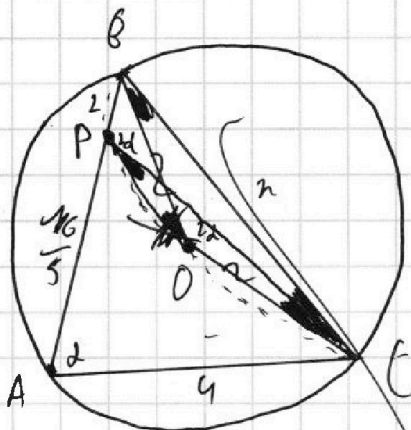


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
14 ИЗ 23

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



15

1) Пусть $\angle BAC = \alpha$. $\angle BOC$ — центральный.

$\angle BOC = 2\alpha$. $BO = OC = R$ (радиусы)

2) Пусть

1) Пусть P — точка на BC, отрезавшая

отрезок $\triangle BOC$, то

$\triangle BPC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle BPC = \angle BOC =$

2) Пусть $\angle C = \alpha$; $PC = y$ $= 2d$

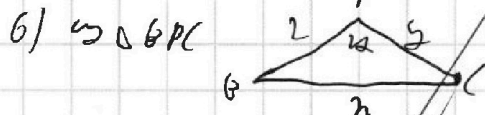
4) Пусть в $\triangle ABC$: $\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$;

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

5) Пусть в $\triangle BPC$ пусть $\cos$;

$$y^2 = \frac{16^2}{25} + 4 - 2 \cdot \frac{16}{5} \cdot 2 \cdot \cos \alpha; y^2 = \frac{256 + 400 - 640 \cos \alpha}{25} = \frac{656 - 640 \cos \alpha}{25};$$

$$y^2 = \frac{16(41 - 40 \cos \alpha)}{25}; 41 - 40 \cos \alpha = \frac{25y^2}{16}; 40 \cos \alpha = \frac{656 - 25y^2}{16}; \cos \alpha = \frac{656 - 25y^2}{640}$$



$$\cos \alpha: n^2 = y^2 + 4 - 4y \cos \alpha = y^2 + 4 - 4y \left(\frac{656 - 25y^2}{640} \right) = y^2 - 4y + 4 + 8y \sin^2 \alpha;$$

$$n^2 = y^2 - 4y + 4 + 8y \sin^2 \alpha; n^2 = y^2 - 4y + 4 + 8y - 8y \cos^2 \alpha =$$

$$= y^2 + 4y + 4 - 8y \cdot \frac{(656 - 25y^2)^2}{640^2} = n^2$$

7) Пусть $\triangle BOC$:

$$\frac{256}{25} + 4 - 2 \cdot \frac{16}{5} \cdot 2 \cdot \cos \alpha = \frac{256 + 400}{25}$$

$$BC^2 = 16 + \frac{656}{25} - 2 \cdot 4 \cdot \frac{16}{5} \cdot \cos \alpha =$$

$$16 + \frac{26 \cdot 26 - 26 \cdot 24}{5} = 16 + \frac{26}{5} = \frac{126}{5}$$

$$\begin{array}{r} 169 \cdot 4 - \\ 26 \\ \hline 676 \\ 260 \\ \hline 213 \\ 26 \\ \hline 239 \end{array}$$



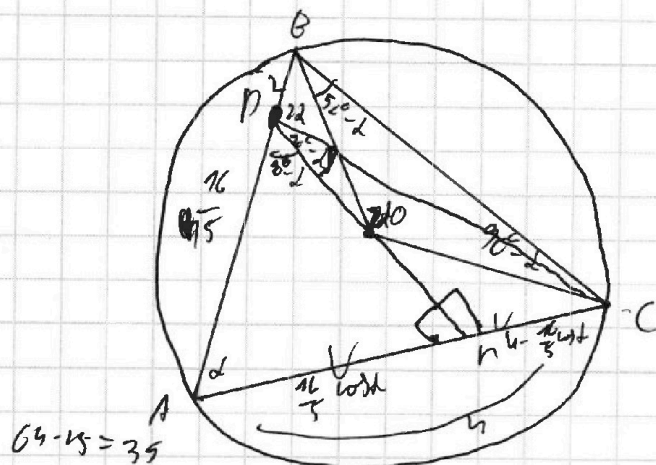
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА

15 ИЗ 23

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AP = \frac{16}{5} \cos \alpha$$

$$AP = \frac{16}{5} \cos \alpha$$

$$\frac{\frac{16}{5}}{\frac{16}{5} \cos \alpha} = \frac{PC}{10}$$

$$\frac{16}{5} \cos \alpha = 10 - \frac{16}{5} \cos \alpha = \frac{16 \cos \alpha}{5} - \frac{5}{10 - 16 \cos \alpha} = \frac{1}{7}$$
$$1 \cdot \frac{25}{64} - 1 = \frac{25}{3} - 1 = \frac{15-32}{3} = \frac{-17}{3}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ -15 \\ \hline 49 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
18 ИЗ 23

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n \leq 2m \leq 2m$$

$$n^2 - 2md \cdot n - 2md \cdot y + 4m^2 \geq 0$$

$$n \geq 2md \quad \text{or} \quad n \leq 2md$$

$$n \geq 2md \quad \text{or} \quad n \leq 2md$$

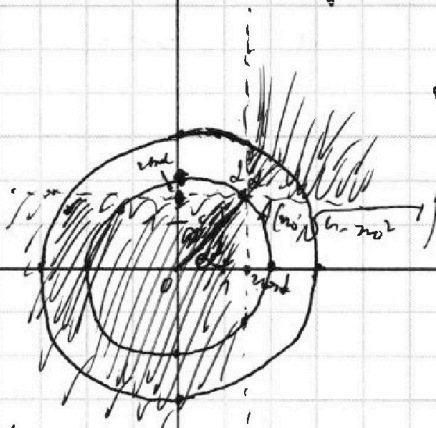
$$n^2 - 2md \cdot n - 2md \cdot y = 0 \quad \text{or} \quad n^2 - 2md \cdot n - 2md \cdot y = 0$$

$$n \geq 2md$$

$$n < 2md$$

$$n^2 - 2md \cdot n - 2md \cdot y = 0$$

$$n^2 - 2md \cdot n - 2md \cdot y = 0$$



$$(2y_0 | 2 + 2y_0) =$$

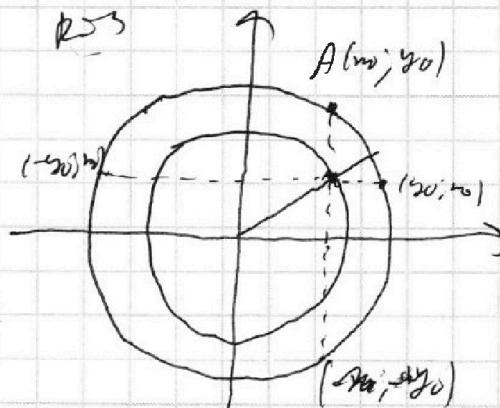
$$= 2y_0^2 + 2y_0$$

$$y > 0$$

$$n^2 - 2md \cdot n - 2md \cdot y = 0$$

$$y =$$

РЗЗ



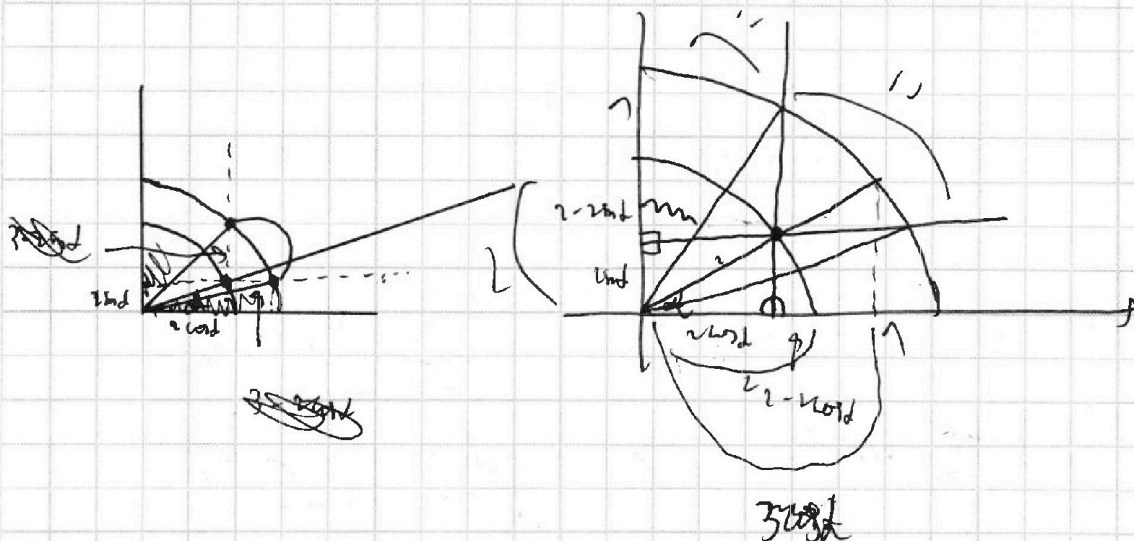


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
22 ИЗ 23

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

