



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} - \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~1

П.к. число A - четырехзначное из одинаковых цифр, то $A = x \cdot 1111$ (x - цифра от 1 до 9)

$$\Rightarrow A \cdot B = x \cdot 11 \cdot 101$$

101 - простое

C - двузначное

$A \cdot B \cdot C$ - полный квадрат

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow B : 101 \\ B - \text{трехзначное} \\ \text{в } B \text{ есть цифра } 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 101$$

$$\left. \begin{array}{l} x : 11 \\ x \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot C - \text{полный квадрат} \end{array} \right\} \Rightarrow C : 11$$

C - двузначное
в C есть цифра 5

$$\Rightarrow C = 55$$

$$\text{Тогда } x \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot 55 - \text{полный квадрат} \quad 1 \leq x \leq 9 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 5$$

Получим, что $A = 5555$

$$B = 101$$

$$C = 55$$

- эти тройка подходит

$$5555 \cdot 101 \cdot 55 = 5^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 - \text{полный квадрат.}$$

Ответ: $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \quad | : (x+y+1), \quad \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix} \Rightarrow x+y+1 > 0$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy + 3x - 3y - 9$$

$$3x - 3y = 9$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3(3xy) =$$
$$= 3(x^2 + xy + y^2 - 3xy) = 3(x-y)^2 = 3 \cdot 9 = 27.$$

$$\Rightarrow M = 27$$

(например, при $x = 4$ и $y = 1$)

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1}$$

$$M = 64 - 1 - 9 \cdot 4 = 63 - 36 = 27. \quad)^a$$

Ответ: 27.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3(a)

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\left[\cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0 \right.$$

$$\left. \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x \quad (1) \right]$$

$$(1) \quad \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi(x-y)}{2} - \pi x \right) - \cos \left(\frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi(x-y)}{2} - \pi x \right) + \cos \left(\frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right) \right)$$

$$0 = 2 \cos \frac{\pi(x-y) + 2\pi x}{2}$$

$$\cos \frac{\pi(3x-y)}{2} = 0$$

$$\left[\cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0 \right.$$

$$\left. \cos \frac{\pi(3x-y)}{2} = 0 \right]$$

$$\left[\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. \frac{\pi(3x-y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \right]$$

$$\left[x+y = 1+2k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. 3x-y = 1+2k \right]$$

$$\left[y = -x + 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. y = 3x - 1 - 2k \right]$$

Полное решение является любая пара

$$(n; -n+1+2k) \text{ или } (n; 3n-1-2k)$$

для любого действительного n и целого k .

Ответ: $(n; -n+1+2k) \quad n \in \mathbb{R}$
 $(n; 3n-1-2k) \quad k \in \mathbb{Z}.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3(6)

$\arccos(a)$ - принимает значения от 0 до π

$\Rightarrow$ нам не подойдут только

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} = 2\pi$$

при этом $\begin{cases} \frac{x}{4} = -1 \\ \frac{y}{9} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -9 \end{cases}$

все остальные пары чисел будут подходить под это неравенство.

$$(n; -n+1+2k)$$

$$(n; 3n-1-2k)$$

если $n \in \mathbb{Z}$, то и второе число пары тоже целое.

Подставим все целые n , и посчитаем подходящие пары:

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9 \end{cases}$$

$x = -4 \Rightarrow \begin{cases} y = -n+1+2k \\ y = n-1+2n+2k \end{cases}$ - любое нечетное, кроме -9.
 итого: 9 чисел

$x = -3 \Rightarrow y$ - любое четное = 9 вариантов

$x = -2$ - 10 вариантов пар

$x = -1$ - 9 пар

$x = 0$ - 10 пар

$x = 1$ - 9 пар

$x = 2$ - 10 пар

$x = 3$ - 9 пар

$x = 4$ - 10 пар

Итого $9 \cdot 5 + 10 \cdot 4 = 95$ пар подходящих пар.

Ответ: 95.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☒5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~4

Пусть всего a одинадцатиклассников и b билетов на концерт выделены в конце месяца.

Посчитаем вероятность того, что Вася и Никита вместе поедут на концерт, если всего 4 билета: количество способов добраться к ним двоим 2 одинадцатиклассников и $(a-2)$ делить на все варианты выбрать 4 из a .

Получаем:

$$\frac{C_{a-2}^2}{C_a^4} = \frac{\frac{(a-2)!}{2 \cdot (a-4)!}}{\frac{a!}{24 \cdot (a-4)!}} = \frac{12}{a(a-1)}.$$

Аналогично посчитаем для b билетов ($b > 4$):

$$\frac{C_{a-2}^{b-2}}{C_a^b} = \frac{\frac{(a-2)!}{(b-2)! \cdot (a-b)!}}{\frac{a!}{b! \cdot (a-b)!}} = \frac{b(b-1)}{a(a-1)}.$$

По условию, вероятность воураша в 3,5 раза

$$\Rightarrow \frac{b(b-1)}{a(a-1)} = 3,5 \cdot \frac{12}{a(a-1)}$$

$$b^2 - b = 42$$

$$b^2 - b - 42 = 0$$

$$(b-7)(b+6) = 0$$

$$\begin{cases} b = 7 \\ b = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 7 \\ b = -6 \end{cases}$$

Поскольку $b > 4$, то $b = 7$.

Ответ: 7.



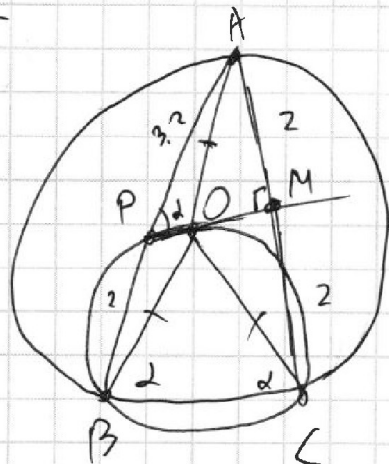
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н 5



$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$$

$\Rightarrow$ нужно найти $\frac{BC}{R} = ?$

O - центр опис. окр $\triangle ABC$

$$\Rightarrow BO = OC \Rightarrow \angle OBC = \angle OCB = \alpha$$

$$PO \perp BC - \text{вписанный в } \omega_2 \Rightarrow \angle APO = \angle OCB = \alpha$$

$$\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ - \alpha$$

как $\angle$ вписанный в ω_1

$PO \cap AC = M$

$$\Rightarrow \angle PMA = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - \alpha = 90^\circ$$

OAC - равнобедренный $\triangle$

$$\Rightarrow M - \text{середина } AC \Rightarrow AM = MC = 2$$

$$PM = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - 4} = \sqrt{\frac{256 - 100}{25}} = \frac{\sqrt{156}}{5}$$

$\cos \alpha = \frac{PM}{AB}$

$$\sin \alpha = \frac{2}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$\text{по т. синусов } \frac{BC}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R \Rightarrow \frac{BC}{R} = 2 \cos \alpha = \frac{\sqrt{39}}{4}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R} = \frac{16 \cdot \sqrt{39}}{4} = \frac{5,2 \cdot \sqrt{39}}{1}$$

Ответ:

$$\frac{5,2 \cdot \sqrt{39}}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

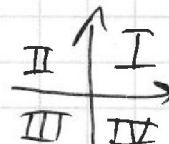
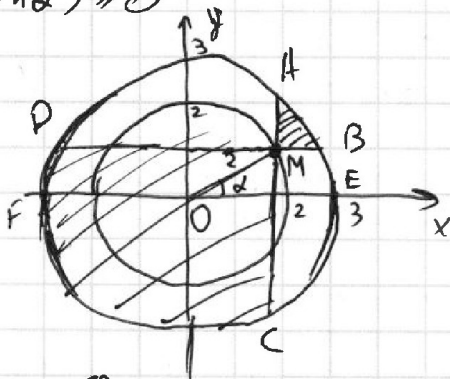
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 6

$x^2 + y^2 \leq 9$ - круг, с центром в $(0; 0)$ и радиусом 3.

$$(x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \cos \alpha \\ y \geq 2 \sin \alpha \\ x \leq 2 \cos \alpha \\ y \leq 2 \sin \alpha \\ x = 2 \cos \alpha \\ y = 2 \sin \alpha \end{cases}$$



Построим кривую $P(\alpha)$.

Не утратив общности $0 \leq \alpha \leq 45^\circ$

т.к. при $45^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ $P(\alpha)$ симметрична $P(\alpha)$ относительно прямой $y = x$

при $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ $P(\alpha)$ симметрична $P(\alpha)$

$P(\beta)$ $45^\circ < \beta \leq 90^\circ$ симметрична $P(\alpha)$ относительно $y = x$

$P(\gamma)$ $90^\circ < \gamma \leq 180^\circ$ симметрична $P(\alpha)$ или $P(\beta)$ относительно

Ох или Oy

$P(\rho)$ $180^\circ < \rho < 360^\circ$ симметрична $P(\alpha)$, или $P(\beta)$, или $P(\gamma)$

относительно Oх $\Rightarrow$ ~~прямая~~ приметр будет такой же)

Периметр состоит из нескольких отрезков и двух дуг. Расположим сумму двух дуг.

Пусть $\cup AB$ - в I четверти, $\cup CD$ во всех остальных

$$\cup CD \cap O_x = F.$$

Пусть E - симметрична F относительно Oy.

т.к. $\cup AB$ исходный круг симметричен относительно Oy, то $\cup DF$ симметричен $\cup BE$.

$$\Rightarrow \cup DF = \cup BE.$$

A и C - симметричны относительно Oх $\Rightarrow$
E $\in$ Oх



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 6 (продолжение 1)

$\Rightarrow \sqrt{AE}$ симметрична $\sqrt{EC} \Rightarrow \sqrt{AE} = \sqrt{EC}$

Тогда $\sqrt{AB} + \sqrt{CD} = \sqrt{AE} + \sqrt{CF} = \sqrt{ECF}$ -
 - половина окружности радиуса $\frac{3}{2} \Rightarrow$
 длина дуги наименьшей дуги $\frac{2 \cdot \pi \cdot 3}{2} = 3\pi$.

$$AC \cap BD = M.$$

Тогда оставшаяся часть периметра равна
 $AM + MD + BM + MC = AC + BD$.

$$2 \cos \alpha = k \quad \text{Тогда} \quad AC = 2 \cdot A_y$$

A_y - абсцисса м. А.

$$A_y = \sqrt{9 - k^2}$$

$$AC = 2\sqrt{9 - k^2}$$

$$BD = 2 \cdot B_x \quad (B_x - \text{абсцисса м. B})$$

$$2 \sin \alpha = \sqrt{4 - k^2}$$

$$B_x = \sqrt{9 - (2 \sin \alpha)^2} = \sqrt{5 + k^2} \Rightarrow BD = 2\sqrt{5 + k^2}$$

$$BD + AC = 2\sqrt{9 - k^2} + 2\sqrt{5 + k^2} \quad - \text{найдём максимум}$$

$$(2\sqrt{9 - k^2} + 2\sqrt{5 + k^2})' = \frac{-2k}{\sqrt{9 - k^2}} + \frac{2k}{\sqrt{5 + k^2}}$$

$$\text{Экстремумы:} \quad k = 0 \quad \text{или} \quad \frac{-1}{\sqrt{9 - k^2}} + \frac{1}{\sqrt{5 + k^2}} = 0$$

$$\sqrt{5 + k^2} = \sqrt{9 - k^2}$$

$$2k^2 = 4$$

$$k = \sqrt{2}$$

$k = -\sqrt{2}$ - не подходит, т.к. при $0 \leq \alpha \leq 45^\circ$
 $k = 2 \cos \alpha > 0$.

$$\begin{aligned} \approx & 2\sqrt{7} + 2\sqrt{7} \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \\ & 2\sqrt{7} \sqrt{3 + \sqrt{5}} \\ & 28 \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} \\ & \text{или } 7 \sqrt{3\sqrt{5}} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 6 (продолжение 2)

$49 > 45 \Rightarrow$ при $\alpha = 52$ периметр максимален,
 то есть при $\alpha = 45^\circ$ | при $0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$

Тогда периметр равен:

$$3\pi + BD + AC = 3\pi + 4\sqrt{7}$$

Также значения будем при $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\alpha = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\alpha = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$$

, $k \in \mathbb{Z}$ (пока в силу симметрии)

или же $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $3\pi + 4\sqrt{7}$

достигается при

~~также~~ $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$
 $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$
 $k \in \mathbb{Z}$



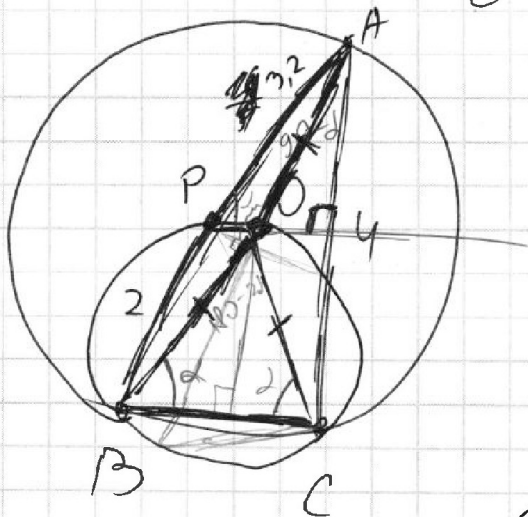
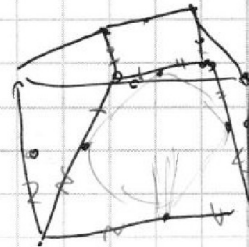
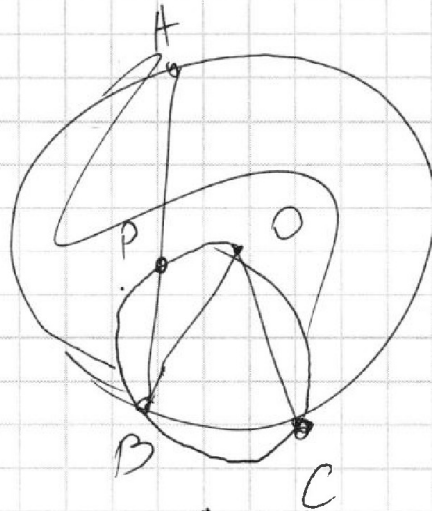
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



3,2

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = S$$

$$a \cdot b \cdot c = 4R \cdot S$$

$$a \cdot b \cdot c = 4R \cdot S$$

$$\frac{a \cdot b}{c} \cdot \frac{c}{R}$$

$$c = 2R \cos \alpha$$

$$2R = \frac{c}{\cos \alpha}$$

$$\frac{c}{\cos \alpha} = 2R$$

$$c^2 = 2R^2 \sin^2 \alpha + 4R^2 \sin^2 \alpha = 2R^2 \sin^2 \alpha$$

$$R^2 \cdot \sin^2 \alpha + R^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 15$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\sqrt{3}+2 =$$

$$= \frac{1}{2} (2\sqrt{3}+4) =$$

$$= (\sqrt{3}+1)^2$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \sqrt{3}+1$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos \alpha + 1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2} + 1}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{3}+3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$2 \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin \pi x =$$

$$= 2 \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0$$

$$\sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\frac{\pi(x-y)}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\cos \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} - \pi x \right) - \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} - \pi x \right) + \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) \right)$$

$$\tan \alpha \tan \beta = 1$$

$$\cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} - \pi x \right) = \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right)$$

$$\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x+y = 1 + 4n$$

$$y = -x + 1 + 4n$$

$$\cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$\left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\pi \left(\frac{x-y}{2} + x \right) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\frac{3x-y}{2} = \frac{1}{2} + 2k$$

$$3x-y = 1 + 4k$$

$$y = 3x - 1 - 4k$$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq 2\pi$$

$$-4 \leq x \leq 4$$

$$-9 \leq y \leq 9$$

$$\frac{x}{4} = -1$$

$$x = -4$$

$$x = -4 \Rightarrow y = 9; 5; 1; -3; -7$$

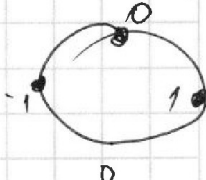
$$-3 \Rightarrow$$

$$x = -4$$

$$y = -9$$

$$\cos \pi = -1$$

$$\arccos(-1) = \pi$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x+1+4k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x-1-4k \end{pmatrix}$$

$$-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

~4

$\pi; B$

a - отриц.

$$C_a^{24} = \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a-3)}{24}$$

$$C_{a-2}^2 = \frac{(a-2)(a-3)}{2} - \text{вычитаем}$$

$$\frac{(a-2)(a-3)}{2} = \frac{12}{a(a-1)} - \text{вычитаем.}$$

$$C_a^b = \frac{a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a-b+1)}{b!}$$

$$C_{a-2}^{b-2} = \frac{(a-2)(a-3) \cdot \dots \cdot (a-b+1)}{(b-2)!}$$

$$\frac{C_{a-2}^{b-2}}{C_a^b} = \frac{\frac{1}{(b-2)!}}{\frac{a(a-1)}{b!}} = \frac{b \cdot (b-1)}{a(a-1)} = 3,5 \cdot \frac{12}{a \cdot (a-1)}$$

$$3,5 \cdot \frac{12}{a \cdot (a-1)} = 3$$

$$b(b-1) = 42$$

$$b^2 - b - 42 = 0$$

$$(b-7)(b+6) = 0$$

$$b = 7, \text{ т.к. } b > 0$$

-3

$$-9; -7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9$$

$$-8; -6; -4; -2$$

$$8 \cdot 3$$

$$5 \cdot 9 + 10 \cdot 4 = 45 + 40 = 95$$

$$\frac{-2x}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{2x}{\sqrt{7-x^2}} = 0$$

$$2\sqrt{7-x^2} = 2\sqrt{9-x^2}$$

$$7-x^2 = 9-x^2$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~¹
 $A = \frac{11 \cdot 101 \cdot X}{101} = 11 \cdot 101 \cdot X$ *целая дробь*
 $B_A : 101$
 $C : 11$

N2
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$ $\left| \cdot xy(x-3)(y+3) \right.$

$$y(x-3)(y+3) + x(x-3)(y+3) + (x-3)(y+3) = xy(y+3) + xy(x-3) + xy$$

$$xy^2 + 3xy - 3y^2 - 3y + x^2y + 3x^2 - 3xy - 9x + xy + 3x - 3y - 9 =$$

$$= xy^2 + 3xy - 3y^2 - 3y + x^2y + 3x^2 - 3xy - 9x + xy + 3x - 3y - 9 =$$

$$3x^2 - 3y^2 - 6x - 12y - 9 = 0$$

$$x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

4; 1.

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy + 3x - 3y - 9$$

$$0 = x - y - 3$$

$$x - y = 3$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy =$$

$$= 3(x^2 + xy + y^2) - 9xy = 3(x^2 - 2xy + y^2) =$$

$$= 3(x-y)^2 = 3 \cdot 9 = 27.$$