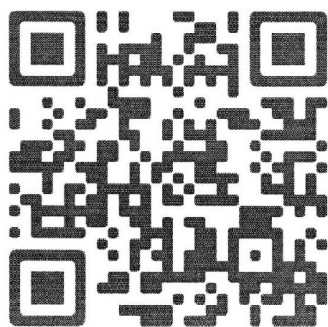
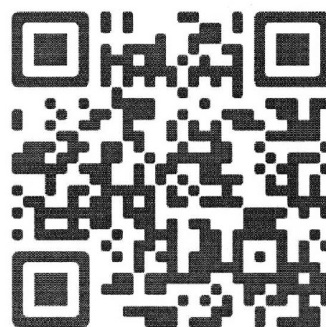




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
  - $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
  - $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 4, а  $y$  — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 12xy$ .
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$ .  
б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася высчитали, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 16$ ,  $BP = 8$ ,  $AC = 22$ .
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☒

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Пусть  $A = \overline{aaaa}$ , тогда  $A = a \cdot 11 \cdot 101$ . П.к. число  $ABC$  - квадрат, то все простые множители встречаются в нём в чётной степени.  $a$  - цифра. Тогда  $11$  и  $101$  встречаются в  $A$  в первой степени, а значит  $BC : 11$  и  $BC : 101$ . П.к.  $C$  - двузначное число, то  $C$  не может делиться на  $101$ , а сл-но  $C$  и  $101$  взаимнопросты (т.к.  $101$  - простое). Тогда  $B : 101$ .  $B = 101 \cdot x$ , где  $x \leq 9$  (т.к.  $B$  - трехзначное). В числе  $B$  есть цифра 7, тогда подходит только  $x = 7$ , т.е.  $B = 707$ . Заметим, что  $707$  и  $11$  взаимнопросты, тогда  $C : 11$ , т.е.  $C = 11 \cdot y$ , где  $y \leq 9$  (т.к.  $C$  - двузначное). Одна из цифр  $C$  - это 1, тогда подходит только  $y = 1$ , т.е.  $C = 11$ . Мы знаем, что  $ABC$  - квадрат.  $ABC = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 707 \cdot 11 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot (a \cdot 7)$ . Тогда  $a \cdot 7$  тоже квадрат, но  $a$  - цифра (и  $a \neq 0$ ), тогда подходит только  $a = 7$ . Получили единственную подходящую тройку:  $7777, 707, 11$ .  
Ответ:  $(7777, 707, 11)$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 2

$$k = \frac{1^y}{x} + \frac{1^x}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy}$$

$$k = \frac{1^{y+4}}{x-4} + \frac{1^{x-4}}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

Погда  $\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$ . Заметим, что  $xy \neq 0$  и

$(x-4)(y+4) \neq 0$ . При данных ограничениях получим, что должно выполняться  $xy = (x-4)(y+4)$ .

$$xy = xy + 4x - 4y - 16, \text{ т. е. } x - y = 4.$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy =$$

$$= 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy = 4x^2 - 8xy + 4y^2 = 4(x-y)^2 =$$

$$= 4^2 = 16.$$

Ответ:  $M = 16$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y$$

$$-\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi - 2\pi y) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\pi x - \pi y = \pi - 2\pi y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad \pi x - \pi y = 2\pi y - \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x - y = 1 - 2y + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x - y = 2y - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 1 - y + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 3y - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: при любых  $y \in \mathbb{R}$  подходят

$$x = 1 - y + 2n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = 3y - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}.$$

~~Можно записать ответ проще:~~

~~Ответ: при любых  $y \in \mathbb{R}$  подходят~~

~~$$x = -y + 2n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = 3y + 2k, k \in \mathbb{Z}$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$8) \arccos \frac{x}{y} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2} \quad \text{✓ 3.}$$

$$\arccos \frac{x}{y} > \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \arccos \frac{x}{y} \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{y}{4} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi \leq \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2} \leq 0$$

т.е. левая часть всегда больше правой за исключением случая, когда обе части равны 0.

Рассмотрим этот случай.  $\arccos \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x = y$ ;  $\arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow y = 4$ . т.е.

нам подходят все пары  $x, y$  (где  $-7 \leq x \leq 7, -4 \leq y \leq 4$ ),

кроме  $x = 7, y = 4$ . Заметим, что при

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$$

$$y \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$\text{подходят } x \in \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$$

$$\text{подходят } x \in \{-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7\}$$

$$\text{и только эти}$$

$$\text{удовлетворяют}$$

$$\text{исходному ур-ию. Тогда пар чисел } (x, y), \text{ ко-}$$

$$\text{торые нам подходят, будет } 5 \cdot 7 + 4 \cdot 8 =$$

$$= 35 + 32 = 67. 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 = 28 + 40 = 68$$

$$= 35 + 32 = 67. 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 = 28 + 40 = 68$$

$$= 35 + 32 = 67. 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 = 28 + 40 = 68$$

$$= 35 + 32 = 67. 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 = 28 + 40 = 68$$

$$= 35 + 32 = 67. 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 = 28 + 40 = 68$$

$$= 35 + 32 = 67. 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 = 28 + 40 = 68$$

Ответ: ~~67~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3.

Заметим, что для  $y \in \{-3, -1, 1, 3\}$  подходят  $x \in \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$  и только такие  $x$  удовлетворяют первому уравнению. А для  $y \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$  подходят  $x \in \{-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5\}$  и для  $y \in \{-4, -2, 0, 2\}$  подходит  $x = 7$  и только такие  $x$  удовлетворяют первому уравнению. Тогда всего подходящих пар  $(x, y)$  будет

$$4 \cdot 7 + 5 \cdot 7 + 4 \cdot 1 = 28 + 35 + 4 = 67$$

Ответ: 67.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $x$  - кол-во <sup>нч.</sup> ординационных билетов,  $y$  - кол-во билетов на концерт, выделенных в конце месяца.

Всего вариантов дать 4 билета  $x$  людям -  $C_x^4$ . Вариантов, в которых точно получили билеты Тетя и Вася -  $C_{x-2}^2$ , тогда вероятность того, что Тетя и Вася получат билеты  $P_1 = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)!}{2! \cdot (x-4)!} \cdot \frac{x!}{4! \cdot (x-4)!} = \frac{4! \cdot (x-2)! \cdot (x-4)!}{2! \cdot x! \cdot (x-4)!} = \frac{12}{x(x-1)}$ .

Аналогично  $P_2 = \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y} = \frac{(x-2)!}{(y-2)! \cdot (x-y)!} \cdot \frac{x!}{y! \cdot (x-y)!} = \frac{y! \cdot (x-2)! \cdot (x-y)!}{x! \cdot (y-2)! \cdot (x-y)!} = \frac{y! \cdot (x-2)!}{x! \cdot (y-2)!} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$  - вероятно-

ств того, что Тетя и Вася оба получат билеты в конце месяца. По условию  $P_2 = 11P_1$ .

$$\frac{y(y-1)}{x(x-1)} = \frac{12 \cdot 11}{x(x-1)}, \text{ т.е. } y(y-1) = 12 \cdot 11, \text{ т.к. } y \in \mathbb{N}, \text{ то}$$

$$y = 12.$$

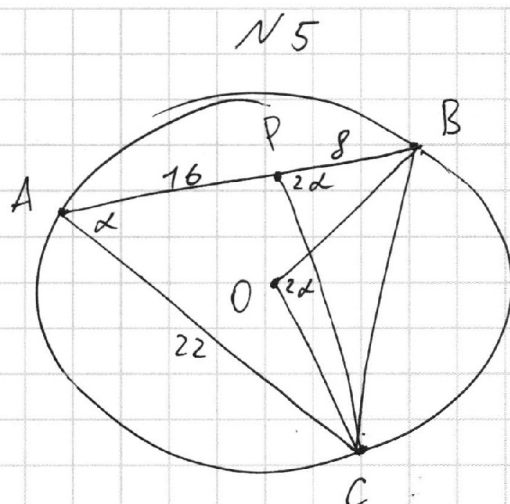
Ответ: 12 билетов.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☒6  
☐7  
☐СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



П.к.  $\triangle ABC$  - остроугольный, т. О лежит внутри  $\triangle ABC$ .

Пусть  $\angle BAC = \alpha$ , тогда градусная мера дуги  $\cup BC = 2\alpha$ .

Тогда  $\angle BOC = 2\alpha$ . Точки B, C, O, P лежат на окр-ти  $\omega_2$ , значит чет-ик BCOP - вписанный.

Тогда  $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$ , но  $\angle BPC = \angle BAC + \angle PCA$ , т.е.  $2\alpha = \alpha + \angle PCA$ , тогда  $\angle PCA = \alpha$ .

Тогда  $\triangle APC$  - равноб. с осн. AC, значит  $PC = AP = 16$ .

По теор. косинусов:  $PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{AP^2 + AC^2 - PC^2}{2 \cdot AP \cdot AC}; \quad \cos \alpha = \frac{16^2 + 22^2 - 16^2}{2 \cdot 16 \cdot 22} = \frac{22^2}{2 \cdot 16 \cdot 22} = \frac{11}{16}.$$

Зная  $\cos \alpha$  найдем  $\sin \alpha$ .  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ .

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{121}{256} = \frac{135}{256}, \quad \text{т.к. } \alpha - \text{острый угол, то}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{135}}{16} = \frac{\sqrt{9 \cdot 15}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \alpha$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{24 \cdot 3 \cdot 22 \cdot \sqrt{15}}{2 \cdot 16} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Ответ: } S_{\triangle ABC} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x-y=z: 11.12(z^2+3z+2)=(y^2-y)(x^2-5x+6)$$

$$y=x-z \quad 11.12(z^2+3z+2)=(x^2+z^2-2xz-x+z)(x^2-5x+6)$$

$$11.12 \cdot 2 - x^2(x^2-5x+6) + x(x^2-5x+6) = z_1 \cdot z_2$$

$$11.12 \cdot 2 - x(x^2-5x+6)(x-1)$$

$$-1 \leq \frac{x}{z} \leq 1$$

$$11.12 \cdot 2 - x(x-2)(x-3)(x-1) \geq 0$$

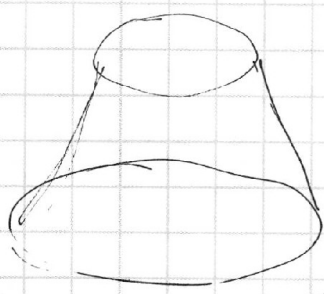
$$-4 \leq y \leq 4$$

$$x(x-1)(x-2)(x-3) \leq 2 \cdot 11 \cdot 12$$

$$x=5 \quad 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \leq 2 \cdot 11 \cdot 12$$

$$x=6 \quad 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 > 2 \cdot 11 \cdot 12$$

$x=5$ , то  $y=5$  - неверно



$$\arccos \frac{x}{y} > \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi n + \frac{x}{y} > \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{4}\right)$$

$$\frac{x}{y} > \sin\left(\arcsin \frac{y}{4}\right)$$

$$\frac{x}{y} > \frac{y}{4}$$

$$x > \frac{y}{4} y$$

$$x > \frac{y}{4} y - 2\pi m$$

$$x < 2\pi m - \frac{y}{4} y$$

$$-y + 2\pi > \frac{y}{4} y$$

$$\arccos 0 - \pi$$

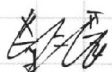
$$\arcsin -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$11y < 8n \leq 28 + 4y$$

$$\arcsin -\frac{\pi}{2} - \pi; 0$$

$$\arccos 0 = 0$$

$$-7 \leq -y + 2\pi \leq 7$$



$$-7 + y \leq 2\pi \leq 7 + y$$

$$y = -4$$

$$x = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$$

$$y = -3$$

$$x = -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7$$

$$y = -2$$

$$x = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$$

$$y = -1$$

$$x = -7, \dots, 7$$

$$\cos(2\pi - x) = -\cos x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-\sin(\pi y) - \sin(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y$$

$$-\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(-\alpha) = +\cos \alpha$$

$$\cos(-2\pi y) = \cos(\pi x - \pi y)$$

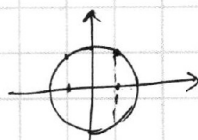
$$\cos(2\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$-2\pi y = \pi x - \pi y + 2\pi n$$

$$-2y = x - y + 2n$$

$$-y = x + 2n$$

$$y = -x - 2n, n \in \mathbb{Z}$$



$$2\pi y = \pi x - \pi y + 2\pi n$$

$$2y = x - y + 2n$$

$$3y = x + 2n$$

$$y = \frac{x + 2n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos \frac{x}{y} - \arcsin \frac{y}{x} = \arccos \frac{x}{y} - \arcsin \left( \frac{-x - 2n}{y} \right)$$

$$(x + 4\sin \alpha)(y - 4\cos \alpha) \leq 0$$

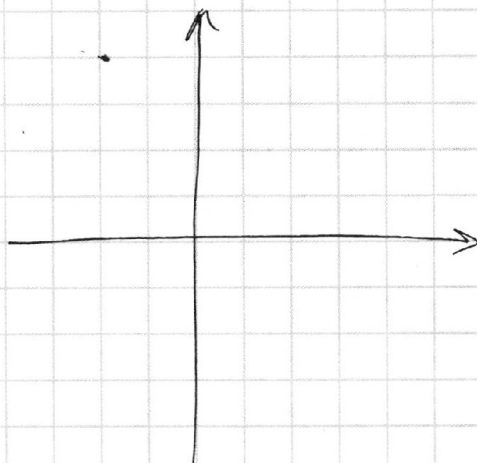
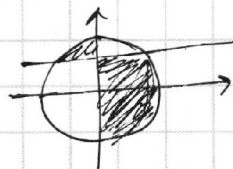
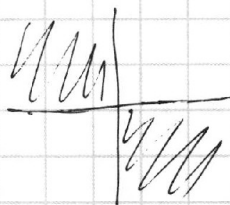
$$\begin{cases} x + 4\sin \alpha \leq 0 \\ y - 4\cos \alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$x \leq -4\sin \alpha$$

$$y \geq 4\cos \alpha$$

$$\text{или } x \geq -4\sin \alpha$$

$$y \leq 4\cos \alpha$$





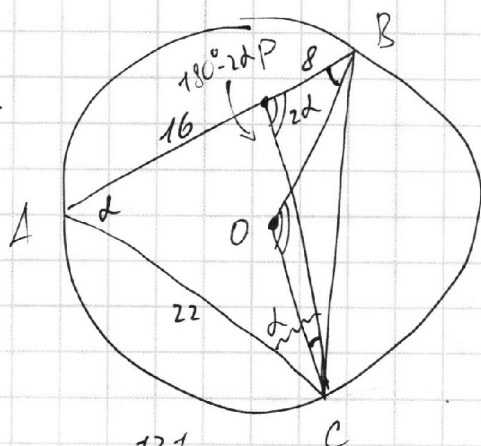
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ 160 \\ \hline 256 \end{array}$$



$$PC = 16$$

$$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{16^2 + 22^2 - 16^2}{2 \cdot 16 \cdot 22} = \frac{22^2}{2 \cdot 16 \cdot 22} = \frac{22}{2 \cdot 16} = \frac{11}{16}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \alpha =$$

$$= \frac{24 \cdot 22 \cdot \sqrt{135}}{2 \cdot 16} =$$

$$= \frac{3 \cdot 11 \cdot \sqrt{135}}{2} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{121}{256} =$$

$$= \frac{135}{256}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{135}}{16}$$

$$135 = 5 \cdot 27 = 9 \cdot 15$$

x учеников

$$\frac{C_x^2}{C_x^4} = \frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} : \frac{x!}{(x-4)! \cdot 4!} = \frac{(x-4)! \cdot 4!}{(x-2)! \cdot 2!} = \frac{12}{(x-3)(x-2)}$$

$$\frac{C_x^{y-2}}{C_x^y} = \frac{x!}{(x-y+2)! \cdot (y-2)!} : \frac{x!}{y! \cdot (x-y)!} = \frac{y! \cdot (x-y)!}{(y-2)! \cdot (x-y+2)!} = \frac{y(y-1)}{(x-y+1)(x-y+2)}$$

$$\frac{11 \cdot 12}{(x-3)(x-2)} = \frac{y(y-1)}{(x-y+1)(x-y+2)}$$

$$x-3=11 \Rightarrow x=14$$

$$x-y+2=y \Rightarrow 2y=16 \Rightarrow y=8$$

$$11 \cdot 12 \cdot (x-y+1)(x-y+2) = y(y-1)(x-3)(x-2)$$

$$11 \cdot 12 \cdot 7 \cdot 8 = 8 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 12 \quad \text{Если } x < 14$$

$$\frac{11 \cdot 12}{(x-3)(x-2)} = \frac{(x-y+1)(x-y+2)}{y(y-1)} = \frac{(y-x-1)(y-x-2)}{y(y-1)}$$

$$(x-3)(x-2)y^2 - (x-3)(x-2)y = 11 \cdot 12 y^2 + 11 \cdot 2(x+1)(x+2)y + (x+1)(x+2)$$

$$\frac{(x-3)(x-2)}{11 \cdot 12} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101 \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{y+x+3}{xy}$$

$$B = 101 \cdot x = 707$$

$$C = 11 \cdot y = 11$$

$$(7777, 707, 11)$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$xy = (x-4)(y+4)$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$x - y = 4$$

$$M = (x-y)(x^2+xy+y^2) - 12xy = 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy =$$

$$= 4x^2 - 8xy + 4y^2 = \cancel{4x^2} 4(x^2 - 2xy + y^2) = 4(x-y)^2 = 16 \cdot 4 = 64$$

$$\frac{4}{x} \rightarrow P_1 \quad P_1 = \frac{C_x^2}{C_x^4} = \frac{\frac{x!}{2!(x-2)!}}{\frac{x!}{4!(x-4)!}} = \frac{4!(x-4)!}{2!(x-2)!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot (x-3)(x-4)}{(x-3)(x-2)} = \frac{3 \cdot 4}{(x-3)(x-2)}$$

$$P_2 = \frac{C_x^{y-2}}{C_x^8} = \frac{y!(x-y)!}{(y-2)!(x-y-2)!} = (y-1) \cdot y \cdot (x-y-1)(x-y) = \frac{y(y-1)}{(x-y)(x-y-1)}$$

$$11 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (x-3)(x-4) = y(y-1)(x-y-1)(x-y)$$

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 11}{(x-3)(x-4)} = \frac{y(y-1)}{(x-y)(x-y-1)}$$

$$\begin{aligned} x &= 14 \\ x-y &= 4 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

$$11 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (x-y-1) = y(y-1)(x-3)(x-4) = (y^2-y)(x-3)(x-4)$$

$$3 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 4 - 6 = 3 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 11$$

$$y=5: \frac{3 \cdot 4 \cdot 11}{(x-2)(x-3)} = \frac{4 \cdot 5}{(x-5)(x-6)}$$