



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

1) Все четырёхзначное число A можно представить в виде:

$$A = n \cdot 1111, \text{ где } n = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

Разложим 1111 на простые множители: $1111 = 11 \cdot 101$
натурального

2) $A \cdot B \cdot C$ - квадрат числа, поэтому, если он делится на 101, то он должен делиться и на 101^2 , значит:
(т.к. $A:101$, то $A:101^2$)

~~хотя бы одно из чисел: $n, B, C:101$~~

n ни при каком значении не делится на 101, как и C ($0 < n < C < 101$), значит $B:101$. Рассмотрим все числа $100 \leq B \leq 999$, делящиеся на 101:

101 404 707

202 505 808 Из них 6 содержит только 606, значит

303 606 909 $B = 606$

3) $A:11 \Rightarrow A \cdot B \cdot C:11$, но $A \cdot B \cdot C$ должно делиться на $11^2 \Rightarrow B:11$

$\Rightarrow C:11$, рассмотрим все двузначные $C:11$:

11 44 77

22 55 88 Из них содержит 3 только 33, значит

33 66 99 $C = 33$

4) $A \cdot B \cdot C = n \cdot 11 \cdot 101 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = 2 \cdot n \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2$, то есть $A \cdot B \cdot C$ был квадратом $2 \cdot n$ должен быть квадратом (т.к. $3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2$ - уже квадрат) из всех возможных n нам подходят только $n=2$ и $n=8$, при других n $A \cdot B \cdot C$ не является квадратом натурального числа.

Ответ: (2222; 606; 33) и (8888; 606; 33)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy}; \quad \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

по условию: $\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$

$$\frac{(x+y+5)((x-2)(y+2) - xy)}{xy(x-2)(y+2)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x+y+5)(2x-2y-4) = 0 \\ xy(x-2)(y+2) \neq 0; x, y > 0 \text{ (ус.)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5=0 \\ x-y-2=0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = -5; \quad \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix} \Rightarrow x+y > 0, \text{ но } -5 < 0 \Rightarrow \text{противо-} \\ x-y=2 \\ x \neq 2 \text{ при } x=2 \text{ выражение} \end{cases} \text{речие уст.}$$

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x=2; x \neq 2 \text{ (из условия)} \end{cases} \Rightarrow x-y=2 \text{ изначально не имеет решения}$$

$$\begin{aligned} 2) M &= x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy = (x-y)((x-y)^2 + 3xy) - 6xy \\ &= (x-y)^3 + xy(3(x-y) - 6), \text{ подставим } x-y=2 \end{aligned}$$

$$2^3 + xy(3 \cdot 2 - 6) = 2^3 = 8$$

Ответ: $M=8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \sin \pi x = -2 \sin\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \cos \pi x$$

$$\sin\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \left(\sin \pi x \cdot \cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) + \cos \pi x \sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(2x+y)\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}(3x-y)\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2}(x+y) = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2}(3x-y) = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = \frac{k}{2} \\ 3x-y = \frac{k}{2} \end{cases}$$

$$x+y = 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x-y = 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = x - 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = 3x - 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $(x; x-2k); (x; 3x-2k)$, где $k \in \mathbb{Z}$, x — произвольное (по ур).

$$b) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \leq \pi; x, y \in \mathbb{Z}$$

$$O \cup D: x \in [-6; 6] \quad y \in [-2; 2]$$

$$y = x - 2k$$

$$x = 6 \Rightarrow y = 6; 4; 2; 0; -2; -4; -6 \dots \text{по возрастанию } -2; 0; 2$$

$$\arcsin 1 + \arcsin 1 = 0 \quad (\arcsin 1 = \frac{\pi}{2})$$

$$+ \arcsin 0 > 0 \quad (\arcsin 0 = 0)$$

$$+ \arcsin -1 = 0 \quad (\arcsin -1 = -\frac{\pi}{2})$$

$$x = 5 \Rightarrow y = 5; 3; 1; -1; -3; -5 \dots \text{по возрастанию } \pm 1$$

$$\arcsin \frac{5}{6} + \arcsin \frac{1}{2} > 0 \quad (\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6})$$

$$> \frac{\pi}{6} \quad + \arcsin -\frac{1}{2} > 0 \quad (\arcsin -\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6})$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

13 (блуждаю)

$$b) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi; x, y \in \mathbb{Z}$$

$$x \in [-6; 6] \quad y \in [-2; 2]$$

$\arcsin 1 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ значит сумма двух арксинусов всегда $< \pi$, кроме случая, когда они оба равны $\frac{\pi}{2}$, рассмотрим такие случаи:

$$\arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{6} = 1 \Rightarrow x = 6$$

$$\arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow y = 2 \quad \text{значит нам}$$

подходят все пары $(x; x-2k), (x; 3x-2k)$, где $x \in \mathbb{Z}, x \in [-6; 6], k \in \mathbb{Z}$, кроме пары $(6; 2)$

Выпишем их:

$$\begin{array}{cccccccccc} (6; 2) & (5; 1) & (4; 2) & (3; 1) & (2; 2) & (1; -1) & (0; 2) & (-1; 1) & (-2; 2) \\ (6; 0) & (5; -1) & (4; 0) & (3; -1) & (2; 0) & (1; 1) & (0; 0) & (-1; -1) & (-2; 0) \\ (6; -2) & & (4; -2) & & (2; -2) & & (0; -2) & & (-2; -2) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} (-3; 1) & (-4; 2) & (-5; 1) & (-6; 2) \end{array} \quad \text{всего } 33$$

$$\begin{array}{cccc} (-3; -1) & (-4; 0) & (-5; -1) & (-6; 0) \\ & (-4; -2) & & (-6; -2) \end{array} \quad \text{подходят } 32$$

множество $(x; x-2k)$ охватывает мн-во $(x; 3x-2k)$

Ответ: 32



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4

Пусть a - кол-во одинадцатиклассников, а x - кол-во билетов, которое выдал в конце ($x > 4$)

1) Найдём начальную вероятность:

Всего вариантов раздать ученикам билеты:

$$C_a^4 = \frac{a!}{4!(a-4)!}. \text{ Чтобы найти кол-во вариантов, когда}$$

у Пети и Васи есть билеты, предположим, что они их получили, и тогда останется раздать $4-2=2$ билета на $a-2$ ученика: $C_{a-2}^2 = \frac{(a-2)!}{2!(a-4)!}$

$$P_1 = \frac{(a-2)!}{2!(a-4)!} : \frac{a!}{4!(a-4)!} = \frac{3 \cdot 4}{(a-1) \cdot a} - \text{начальная вероятность}$$

2) Аналогично найдём конечную вероятность:

$$C_a^x = \frac{a!}{x!(a-x)!} - \text{всего вариантов}$$

$$C_{a-2}^{x-2} = \frac{(a-2)!}{(x-2)!(a-x)!} - \text{благоприятных вариантов}$$

Чтобы найти вероятность делим кол-во благоприятных вариантов на общее количество:

$$P_2 = \frac{(a-2)!}{(x-2)!(a-x)!} : \frac{a!}{x!(a-x)!} = \frac{(x-1)x}{(a-1)a} - \text{конечная вероятность}$$

3) По условию: $6P_1 = P_2$

$$\frac{6 \cdot 3 \cdot 4}{(a-1) \cdot a} = \frac{(x-1)x}{(a-1)a} \Rightarrow x^2 - x = 72, \quad x^2 - x - 72 = 0$$

$$D = 472 - 4 = 289$$

$$x = \frac{1 \pm 17}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = -8 \end{cases}$$

$x = -8$ не подходит по смыслу задачи

Ответ: 9



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

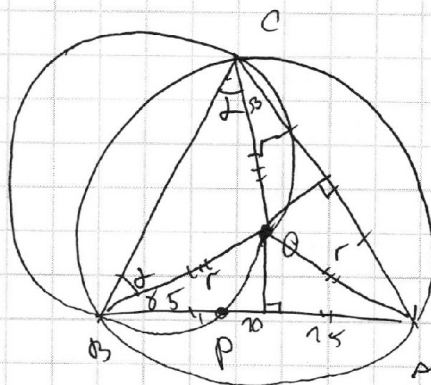
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~5

$$2r = \frac{30}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$2r = \frac{35}{\sin(\alpha + \gamma)}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 6 (продолжение)

$$y \text{ A и C по } x: -\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} \text{ и } \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$y \text{ B и D по } y: \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} \text{ и } -\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$$

Значит длина $AC = 2 \cdot \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$

$$BD = 2 \cdot \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} = 2 \cdot \sqrt{119 + 50 \sin^2 \alpha}$$

4) Заметим, что дуги (меньшие) $\angle AKB$ и $\angle KLC$, $\angle KVB$ и $\angle LDP$ равны (видно из координат точек), если мысленно перенести $\angle AKB$ в $\angle KLC$, а $\angle KVB$ в $\angle LDP$, то они в сумме ^{по дугам} с $\angle DC$ будут давать полную дугу окружности, т.е. $2\pi = 13\pi$

5) Так как ~~периметр~~ периметр по дугам постоянной и равен 13π , надо найти при каком α $AC + BD$ максимально: $\sin^2 \alpha \in [0; 1]$, заметим, что $169 - 50 = 119$ и крайние значения $\sin^2 \alpha$

дают наименьшие значения суммы. $AC + BD$ максимально при $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$, т.е. $\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, тогда сумма: $4\sqrt{119} = 48$,

а периметр $M = 48 + 13\pi$. Ответ: $M = 48 + 13\pi$, достигается при $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~3 (продолжение)

• $x = 4 \Rightarrow y = -2; 0; 2$

$$\arcsin \frac{2}{3} + \arcsin 1 > 0$$

$$\left(\frac{\pi}{6} < \arcsin \frac{2}{3} < \frac{\pi}{2}\right) + \arcsin 0 > 0$$

$$+ \arcsin -1 < 0$$

• $x = 3 \Rightarrow y = \pm 1$

$$\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{1}{2} > 0$$

$$+ \arcsin -\frac{1}{2} = 0$$

• $x = 2 \Rightarrow y = -2; 0; 2$

$$\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin 1 > 0$$

$$\left(0 < \arcsin \frac{1}{3} < \frac{\pi}{6}\right) + \arcsin 0 > 0$$

$$+ \arcsin -1 < 0$$

$x = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

$$\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arcsin \frac{1}{2} > 0$$

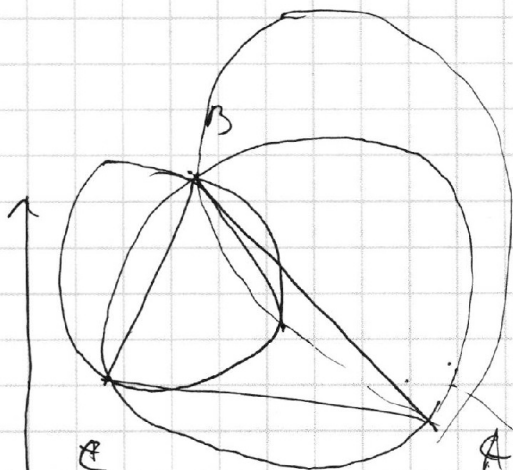
$$\left(0 < \arcsin \frac{1}{3} < \frac{\pi}{6}\right) + \arcsin -\frac{1}{2} < 0$$

• $x = 0 \Rightarrow y = -2; 0; 2$

$$\arcsin 0 + \arcsin 1 > 0$$

$$+ \arcsin 0 = 0$$

$$+ \arcsin$$



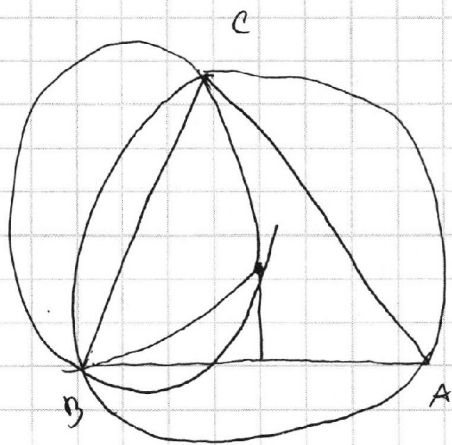


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = -5\sqrt{2} \cos t$$

$$y = 5\sqrt{2} \sin t$$

$$S = \pi r^2 - \text{всего!}$$

$$-5\sqrt{2} \cos t - 5\sqrt{2} \sin t = 0$$

$$\begin{array}{r} \times 12,5 \\ 12,5 \\ 250 \\ \hline 156,25 \end{array} \quad n = 12,5$$

$$\begin{array}{r} 156,5 \\ \times 11,5 \\ 11,5 \\ \hline 52,5 \\ 11,5 \\ \hline 111,5 \\ 111,5 \\ \hline 1322,5 \end{array}$$

$$2 \cdot \sqrt{169 - 50 \sin^2 t} + 2 \sqrt{169 - 50 \cos^2 t} = S -$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ \times 12,5 \\ \hline 131,5 \end{array}$$

$$\sin^2 t \in [0, 1]$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ \times 11,5 \\ \hline 54,5 \\ 119 \\ \hline 137,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 11,5 \\ \hline 32,5 \\ 131,5 \end{array}$$

$$2 \sqrt{169 - 50 \sin^2 t} + 2 \sqrt{169 - 50 + 50 \sin^2 t} = 2 \sqrt{169 - 50 \sin^2 t} + 2 \sqrt{119 + 50 \sin^2 t} =$$

$$\left(2 \sqrt{169 - 50 \sin^2 t} + 2 \sqrt{119 + 50 \sin^2 t} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{100 \sin t \cdot 50 \cos t}{\sqrt{169 - 50 \sin^2 t} \sqrt{119 + 50 \sin^2 t}}$$

$$0: 2 \sqrt{169} + 2 \sqrt{119} \approx 26 + 22 = 48$$

$$\frac{1}{4}: 2 \sqrt{156,5} + 2 \sqrt{137,5} \approx 25 + 23 \approx 48$$

$$\frac{3}{4}: 2 \sqrt{137,5} + 2 \sqrt{156,5} \approx 48$$

$$1: 2 \sqrt{119} + 2 \sqrt{169} \approx 48$$

$$\frac{5}{4}: 2 \sqrt{144} + 2 \sqrt{144} = 48$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

б) $(x; \frac{k}{2} - x) \quad (x; 3x - \frac{k}{2}) - ?$

б

г) $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{4} \leq \pi$ $\sin(\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{4}) =$
 $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{k-2x}{4} \leq \pi \quad \sin = \pm \sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$

~~$\frac{x}{6} \sqrt{1 - \frac{(k-2x)^2}{16}} + \frac{k-2x}{4} \sqrt{1 - \frac{x^2}{36}} < 0$~~

$\frac{x}{6} \frac{\sqrt{1 - k^2 + 4kx - 4x^2}}{4} + \frac{k-2x}{4} \cdot \frac{\sqrt{1 - x^2}}{6} < 0$

$x\sqrt{1-k+2x}(1+k-2x) + (k-2x)\sqrt{1-x}(1+x) < 0$
 $x^4 \cdot 1/1 < (k-2x)^2(1/1)$

д) а-количество учеников $C_a^4 = \frac{a!}{4!(a-4)!}$ - все варианты
 $C_{a-2}^2 = \frac{(a-2)!}{2!(a-4)!}$ - подходы:

$P_1 = \frac{a!}{4!(a-4)!} : \frac{(a-2)!}{2!(a-4)!} = \frac{(a-1) \cdot a}{2 \cdot 4}$

$P_1 = \frac{(a-2)!}{2!(a-4)!} : \frac{a!}{4!(a-4)!} = \frac{3 \cdot 4}{(a-1) \cdot a}$

в конце: $C_a^{x+4} = \frac{a!}{4!(a-x)!}$ - все

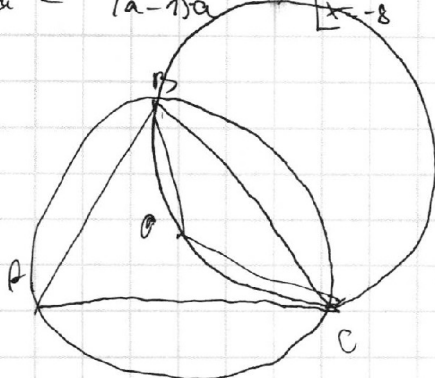
$C_{a-2}^{x-2} = \frac{(a-2)!}{(x-2)!(a-2x+2)!}$ - подходы:

$P_2 = \frac{(a-2)!}{(x-2)!(a-2x+2)!} : \frac{a!}{x!(a-x)!} = \frac{(x-1)x}{(a-1) \cdot a}$

$\frac{72}{(a-1) \cdot a} = \frac{(x-1)x}{(a-1)a} \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=8 \end{cases}$

$4 \rightarrow 9$

$1 + 72 \cdot 4 = 289$
 17





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \begin{array}{r} 1111 \\ 35 \\ \hline 2222 \\ 2222 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1111 \\ 11 \\ \hline 101112 \\ 13 \\ 91 \end{array} \quad 1111 = 11 \cdot 101$$

$$A = x \cdot 11 \cdot 101$$

$$B: 101 \rightarrow B = 606$$

$$606 = 6 \cdot 101$$

$$A \cdot B \cdot C = x \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot 6 \cdot C \Rightarrow C = 33$$

$$x \in [1, 5]$$

$$A \cdot B \cdot C = x \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \Rightarrow x = 2$$

$$x = 8$$

$$\begin{array}{r} 2222 \quad 606 \quad 33 \\ 8888 \quad 606 \quad 33 \end{array}$$

$$1000 \quad 1249$$

$$0, 205$$

$$2) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{x \cdot y} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow \frac{x+y+5}{x \cdot y} = \frac{x+y+5}{xy+x-2y-4}$$

$$\frac{(x+y+5)(xy+x-2y-4-xy)}{xy(x-2)(y+2)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y+5=0 \Rightarrow x+y=-5 \\ x-y-2=0 \Rightarrow x-y=2 \end{cases}$$

$$x^2y^3 - 6xy = (x-y)(x^2+xy+y^2) - 6xy = 2 \cdot (x-y)^2 + 3xy - 6xy = 2 \cdot 4 + 8$$

$$3) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin \pi x + \sin \pi y = 2 \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} = 2 \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2}$$

$$\cos \pi x - \cos \pi y = -2 \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \sin \frac{\pi(x-y)}{2} = 2 \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \sin \frac{\pi(x-y)}{2}$$

$$\cos 2 = \sin \frac{\pi}{2} - 2$$

$$2 \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x = -2 \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x$$

$$\sin \frac{\pi(x+y)}{2} \left(\sin \pi x \cdot \cos \frac{\pi(x-y)}{2} + \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x \right)$$

$$\sin \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin \left(\pi x + \frac{\pi(x-y)}{2} \right) = 0$$

$$\frac{\pi(x+x-y)}{2} = \frac{\pi(3x-y)}{2}$$

$$\sin \frac{\pi(x+y)}{2} = 0$$

$$\frac{\pi}{2}(x+y) = \pi k \Rightarrow x+y = \frac{k}{2}$$

$$y = \frac{k}{2} - x$$

$$\sin \frac{\pi(3x-y)}{2} = 0$$

$$\frac{\pi}{2}(3x-y) = \pi k \Rightarrow 3x-y = \frac{k}{2}$$

$$y = 3x - \frac{k}{2}$$

$$\left(x, \frac{k}{2} - x \right) \left(x, 3x - \frac{k}{2} \right) \quad |x; x-2k| \quad (x; 3x-2k)$$