



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$A = 1111 \cdot a, \text{ где } 1 \leq a \leq 9, a \in \mathbb{N}$$

$$1111 = 11 \cdot 101 \text{ где } 11, 101 - \text{простые}$$

$$A \cdot B \cdot C : 101^2$$

$$\begin{cases} A : 101 \\ A / 101^2 \Rightarrow B : 101 \\ C < 101 \end{cases} \text{ где } B \text{ соотв. } 707, \text{ где } B = 707$$

$$B = 101 \cdot b, \text{ где } 1 \leq b \leq 9, b \in \mathbb{N}$$

$$ABC : 11; ABC - \text{число}$$

$$ABC : 11^2$$

$$\begin{cases} A : 11 \\ A / 11^2 \Rightarrow C : 11 \\ B : 11 \end{cases}$$

т.е. C простое число
и 1 и 11 делится.

• значит $C = 11$, тогда:

$$A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot a \cdot b =$$

$$101^2 \cdot 11^2 \cdot 3a, \text{ где } a = 3k^2, \text{ где } k - \text{натур.}$$

$$a \neq 1 \leq 3k^2 \leq 9$$

$$k=1$$

$$\text{значит, } A = 1111 \cdot 7 = 7777$$

$$B = 101 \cdot 7 = 707$$

$$C = 11 \cdot 1 = 11$$

$$\text{значит: } (A; B; C) \in \{(7777; 707; 11)\}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

2 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2
По условию

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$(y+x+3) \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-4)(y+4)} \right) = 0$$

$$(y+x+3) \left(\frac{4x-4y-16}{xy(x-4)(y+4)} \right) = 0$$

⇓

$$\begin{cases} y+x=-3 \quad \text{и} \quad y+x > 0, \text{ н.е. } x, y > 0 \\ x-y=4 \quad (1) \quad \text{с у. } x, y > 0: \\ x, y \neq 0, y \neq -4 \quad (!) \quad x \neq 4 \\ x \neq 0, 4 \end{cases}$$

Ищем: $M \in (-\infty; 64)$

~~$$y+x=-3: y=-x-3$$~~

~~$$M = x^3 - (-x-3)^3 - 12x(-x-3) = x^3 + (x+3)^3 + 12x(x+3)$$~~

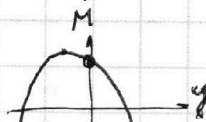
$$(1): x-y=4: x=y+4$$

$$\begin{aligned} M &= (y+4)^3 - y^3 - 12y(y+4) = \\ &= 4(y+4)^2 - (y+4)(y+y^2) - 12y(y+4) = \\ &= 4(y^2+4y+16) - 12y(y+4) = \\ &= 4(-2y^2-8y+16) = -8(y^2+4y+8) = \\ &= -8(y+2)^2 - 42 = 36 - 8(y+2)^2 \end{aligned}$$

при $y > 0$:

$$M = 36 - 8(y+2)^2 \leq 36 - 8(0+2)^2 = 64$$

Поскольку $M(y)$ — кв. функция с $a < 0$ и
вершина при $y < 0$



то можно увидеть, что M уменьшается, когда
 $y > 0$; $y = y+4 > 4$ и пр. вычисления



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 3 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$-\cos(\pi x - \pi y) = \cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y$$

$$\cos(\pi x - \pi y + \pi) = \cos(2\pi y)$$

$$\pi x - \pi y + \pi = 2\pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi x - \pi y + \pi = -2\pi y + 2\pi k$$

$$\begin{cases} x - y + 1 = 2y + 2k \\ x - y + 1 = -2y + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 3y = 2k - 1 \\ x + y = 2k - 1 \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \text{ или } x, y - \text{целые, но они не могут быть целыми}$$

Для первого x:

$$\begin{cases} y = \frac{x+1-2k}{3} \\ y = 2k - x - 1 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Итак: } (x; y) \in \left\{ \left(n; \frac{n+1-2k}{3} \right); \left(n; 2k-n-1 \right) \mid k \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$d) 0 \leq \arccos \frac{x}{2} \leq \pi \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arccos \frac{x}{2} - \arcsin \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{y}{4} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{И.е. необходимо проверить только сл. } \arccos \frac{x}{2} - \arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

Для стр. пр. значения стр. из дель: $\arccos$ и $\arcsin$:

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{2} \neq 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{2} \neq 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 2 \\ y \neq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{при этом } -2 \leq x \leq 2 \rightarrow \text{исполн} \\ -4 \leq y \leq 4 \rightarrow \text{исполн} \end{cases}$$

Итак. по дель условию а) получаем две пары на стр. из x, y могут быть:

$$N(\text{та-то}) = 8 \cdot 5 (x - \text{цел.}; y - \text{цел.}) + 2 \cdot 4 (x - \text{цел.}; y - \text{рационал.})$$

$$- 1 (y=4; x=2) = 40 + 28 - 1 = 67$$

Итак: 67 пар



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
4 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

Вероятность в матче между двумя командами из 4-х команд с России и Туниса и их к-во очков из 4-х очков, пусть n - количество команд 11-классов:

$$p_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)(n-3) \cdot 4!}{2! n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{3 \cdot 4}{n(n-1)}$$

После удачного матча очков $\leq n$ до k :

$$p_2 = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)(n-3) \dots (n-k+2+1) \cdot k!}{(k-2)! n(n-1) \dots (n-k+1)} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$$p_2 = 11 p_1: \quad \frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{11 \cdot 3 \cdot 4}{n(n-1)}$$

$$k(k-1) = 11 \cdot 12$$

по $k > 4 \rightarrow$ реш. св.

$$k = 12$$

ответ: 12



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
5 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$\Phi(x)$:

$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 \leq 36 \rightarrow$ в координатах
 $Ox; Oy$ это круг с центром
в начале координат $(0;0)$
и радиусом $\sqrt{36} = 6$

$$(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0$$

это графический метод

УОХ - это граница и первая линия

$$\text{прямые } y = 4\cos\alpha \text{ и } x = -4\sin\alpha$$

Значит, для точек $(x;y) = (-4\sin\alpha; 4\cos\alpha)$ угол от $0;0$ к:

$$\sqrt{(-4\sin\alpha)^2 + (4\cos\alpha)^2} = 4, \text{ т.е. не более } \alpha \text{ от } (0;0)$$

и радиус 4 это расстояние от центра до прямой.

Значит, можно рассмотреть угол между прямой $\Phi(x)$ радиусом 5, который
они образуют 2 прямые перпендикулярные. Из них 90° (синус косинус отношения!), а потом
синус угла между радиусом и линией касания. Этот угол можно найти
по теореме Пифагора. Значит, угол между радиусом и линией касания α .

Значит, угол α в ф.т. от 0 до π и 2π :

угол α от 0 до π и 2π :

$$AB = 2\sqrt{6^2 - 4\cos^2\alpha}$$

$$CD = 2\sqrt{6^2 - 4\sin^2\alpha}$$

$$AB^2 + CD^2 = 144 \cdot 2 - 16(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 288 - 16 = 272$$

$$AB \cdot CD = 4\sqrt{6^2 - 4\cos^2\alpha} \cdot 4\sqrt{6^2 - 4\sin^2\alpha} =$$

$$4\sqrt{6^2 - 4\cos^2\alpha} \cdot 4\sqrt{6^2 - 4\sin^2\alpha} \rightarrow \sin^2\alpha \cos^2\alpha \leq 1 \rightarrow \sin^2\alpha \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ и } \frac{3\pi}{4}$$

$$AB \cdot CD \leq 4 \cdot \sqrt{6^2 - 4\cos^2\alpha} \cdot 4 \cdot \sqrt{6^2 - 4\sin^2\alpha} =$$

$$= 4 \sqrt{32 + 12} = 8 \sqrt{44} = 8 \sqrt{4 \cdot 11} = 16 \sqrt{11}$$

$$(AB + CD) \leq \sqrt{272 + 32} \sqrt{11} =$$

$$AB + CD \rightarrow \max$$

$$(AB + CD)^2 \rightarrow \max$$

$$AB^2 + CD^2 + 2AB \cdot CD \rightarrow \max$$

$$272 + 2AB \cdot CD \rightarrow \max$$

$$AB \cdot CD \rightarrow \max \quad (AB + CD) \leq \sqrt{272 + 32} \sqrt{11} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
6 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 *продолжение*

$$AB \cdot CD = \sqrt{6^4 - 6^2 \cdot 4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \quad \uparrow \text{ по } 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \leq 1$$

$$4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \sin^2 2\alpha \leq 1$$

$$AB \cdot CD \leq \sqrt{6^4 - 6^2 \cdot 4 + 4} = \sqrt{(36 - 2)^2} = 34, \text{ достигая}$$

значения при $AB, CD > 0$

$$\sin^2 2\alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = \pm 1$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$AB + CD = \sqrt{(AB + CD)^2} \leq \sqrt{2 \cdot 2 + 2 \cdot 34} = \sqrt{32 + 68} = \sqrt{100} = 10$$

$$\text{Поэтому } \max \{M\} = \frac{\pi \cdot 2}{2} + \max \{AB + CD\} = \pi + \sqrt{332}, \text{ достигается при}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

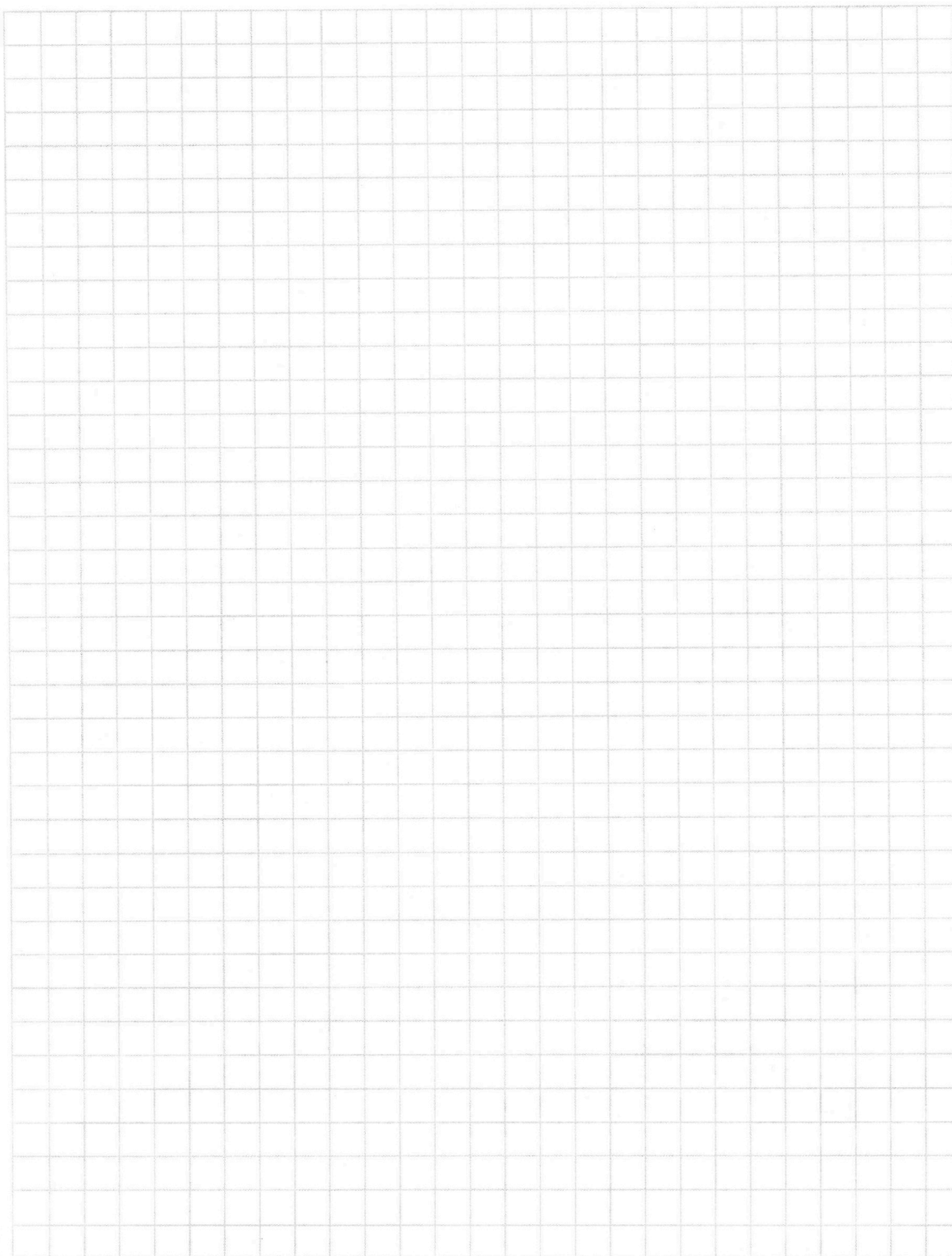


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



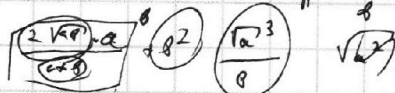
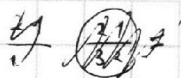
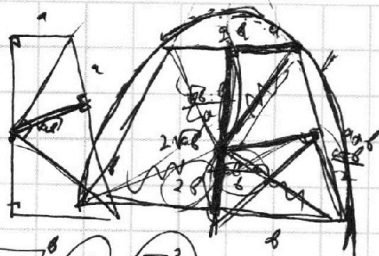
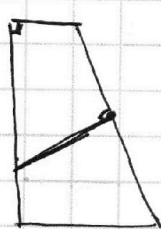


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

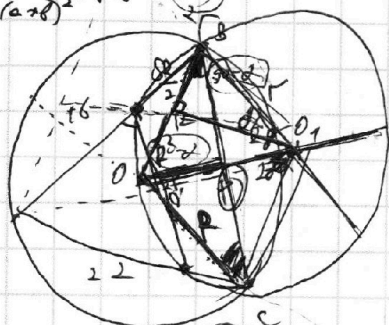
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



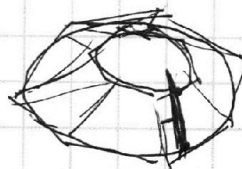
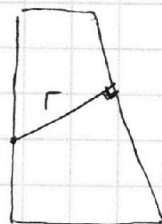
$$\frac{4 \cdot 8 \cdot a^2}{(a+b)^2} \cdot 8^2 = r^2$$



$$\frac{ab \sin \alpha}{4R} = \frac{R}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{R}{2} / r$$

$$\frac{R \cdot R}{2r}$$



$$\frac{16}{22} = \frac{1}{24}$$

$$4^2 - r^2 = 24 \cdot 16$$

