



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$n = 1$ A - четырехзначное из одинаковых цифр $\Rightarrow A = k \cdot 1111$, где $k \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

$$A \cdot B \cdot C = k \cdot 1111 \cdot B \cdot C$$

(это можно проверить т.к. 101 не делится на простое число $\sqrt{101} < 11$)

$$1111 = 11 \cdot 100 + 11 = 11 \cdot 101 \text{ где } 101 - \text{простое}$$

т.к. $A \cdot B \cdot C$ квадрат натурального числа и $k < 11 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k \cdot 11 \cdot 101 = \frac{B \cdot C}{x} \text{ где } x - \text{квадрат натурального числа}$$

(Все множители числа $A \cdot B \cdot C$ должны иметь четную степень)

т.к. C - двузначное $\Rightarrow B : 101$ а т.к. одна цифра $\Rightarrow$

$$\Rightarrow B = 707$$

$$B : 11, \text{ т.к. число } B \geq 101 \cdot 11$$

$$\Rightarrow C : 11$$

т.к. двузначное и одна из цифр 1 $\Rightarrow C = 11$

$$707 \cdot 11 \cdot k \cdot 11 \cdot 101 - \text{полный квадрат}$$

$\Rightarrow$

$$k = 7 \cdot y \text{ где } y - \text{полный квадрат}$$

$$\text{т.к. } k < 9 \Rightarrow k = 7, y = 1, x = 1$$

тогда

$$\begin{aligned} A &= 7777 \\ B &= 707 \\ C &= 11 \end{aligned}$$

Ответ

$$\begin{array}{r} 707 \\ \times 11 \\ \hline 707 \\ 707 \\ \hline 7777 \end{array}$$

Получаем, что такая тройка чисел только одна



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n=2 \quad x, y > 0$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

M-?

$$M = x^3 - y^3 - 12xy$$

$$K = \frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)} \Rightarrow \frac{y+x+3}{\cancel{xy}} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy = (x-4)(y+4) \quad x \text{ и } y - \text{положительные} \Rightarrow \Rightarrow x-4 > 0 \Rightarrow x > 4$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16 \Rightarrow 4x - 4y = 16$$

$$x - y = 4$$

$$x = 4 + y$$

$$(4+y)(16+8y+y^2) =$$

$$= 4 \cdot 16 + 32y + 4y^2 + 16y + 8y^2 + y^3 = 4 \cdot 16 + 48y + 12y^2 + y^3$$

$$M = (4+y)^3 - y^3 - 12(4+y)y = 4 \cdot 16 + 48y + 12y^2 - 12(4y + y^2) =$$

$$= 4 \cdot 16 + 48y + 12y^2 - 48y - 12y^2 = 4 \cdot 16 = 64$$

$$M = 64 \quad \text{при любых } x \text{ и } y, \text{ удовлетворяющих условию}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \sin \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

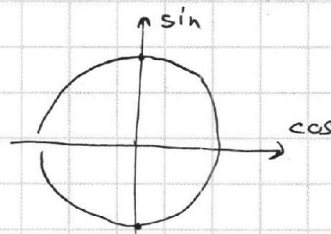
$$2 \cos \pi \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \sin \pi \left(\frac{y-x}{2} \right) \sin \pi y = 2 \cos \pi \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \pi \left(\frac{y-x}{2} \right) \cos \pi y$$

$$\sin \pi \left(\frac{y-x}{2} \right) \cdot \sin \pi y = \cos \pi \left(\frac{y-x}{2} \right) \cos \pi y$$

$$\cos \pi \left(\frac{x+y}{2} \right) = 0$$

$$\pi \left(\frac{x+y}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + k \Rightarrow x+y = 1+2k$$



$$\cos \pi \left(\frac{y-x}{2} \right) \cos \pi y - \sin \pi \left(\frac{y-x}{2} \right) \cdot \sin \pi y = 0$$

по формуле косинуса суммы

$$\cos \pi \left(\frac{3y-x}{2} \right) = 0$$

$$\pi \left(\frac{3y-x}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3y-x = 1+2n$$

Получаем:

$$\begin{cases} 3y-x = 1+2n \\ x+y = 1+2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y-1-2n \\ x = 1+2k-y \end{cases} \text{ где } n, k \text{ любые целые}$$

$$\arccos \frac{3y-1-2n}{4} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

Пусть выделено x билетов, а количество симпатизирующих всего x

Тогда количество вариантов группы людей, которые пойдут на концерт: (группа Петя, Вася и Вася, Пета одноклассовые)

$$B = \frac{x!}{a!(x-a)!}$$

При этом количество групп, в которых может оказаться конкретный человек (например, Петя)

будет равно:

$$\frac{(x-1)!}{(a-1)!(x-1-(a-1))!} = \frac{(x-1)!}{(a-1)!(x-a)!}$$

то же самое для двух людей:

$$\frac{(x-2)!}{(a-2)!(x-a)!} = C$$

Тогда $\frac{C}{B}$ - вероятность, что два выбранных человека пойдут на концерт

$$\frac{C}{B} = \frac{(x-2)!}{(a-2)!} \cdot \frac{a!}{x!} = \frac{a(a-1)}{x(x-1)}$$

$a_1 = 4$ - в начале месяца

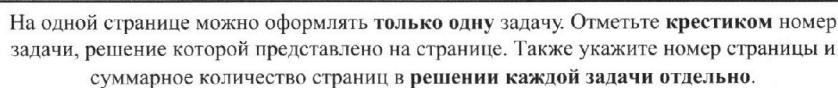
$a_2 = ?$ $x = \text{const}$

По условию: $\frac{4(4-1)}{x(x-1)} \cdot \frac{x(x-1)}{a_2(a_2-1)} = \frac{1}{11}$

$$\frac{4 \cdot 3}{a_2(a_2-1)} = \frac{1}{11} \Rightarrow a_2^2 - a_2 = 11 \cdot 12$$

$$a_2(a_2-1) = 11 \cdot 12 \Rightarrow a_2 = \begin{cases} 12 \\ -11 \end{cases} \begin{matrix} \text{т.к. } a_2 > 0 \\ \Downarrow \\ a_2 = 12 \end{matrix}$$

Было выделено 12 билетов



СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}AP &= 16 \\BP &= 8 \\AC &= 22\end{aligned}$$

т.п. O - центр
описанной окружности
 $\triangle ABC \Rightarrow T.O$ - пересечение
серединных $\perp$ к сторонам
 $\triangle ABC \Rightarrow OK \perp BC \Rightarrow$
 $\Rightarrow K$ - середина $BC \Rightarrow$
 $\Rightarrow OK$ - медиана и высота

~~Рассмотрим треугольник~~
~~Рассмотрим~~ $\triangle BOC$
 $OA = OC = BO$ (радиусы ω_1)
 и ω_2 :
 $\angle COB = \angle BOO$

из св-ва сумм:

$$AL \cdot AC = AP \cdot BA$$

$$AL \cdot 22 = 16.24$$

$$A_L = \frac{16 \cdot 24}{22} = \frac{8 \cdot 24}{11}$$

$$CL = 22 - \frac{8.24}{11}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 29 \\ \hline 8 \\ 192 \\ \hline 192 \end{array} \quad \begin{array}{r} 192 \overline{) 11} \\ \underline{11} \quad 175 \\ \underline{82} \quad 71 \end{array} = AL$$

$$NC = OC$$

Т.к. KD - сеп. пер. к $BC \Rightarrow$

$$\Rightarrow O_2 \in \kappa \mathcal{O} \text{ ipe } O_2 \text{ genau } W_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ON - \text{гипотенуза } \omega_2$$

$$S = \frac{22 \cdot 24 \cdot BC}{40A} = 22 \cdot 6 \cdot \frac{BC}{OC} = 12 \cdot 22 \cdot \sin \alpha \frac{1}{5}$$

$\angle NAC = \angle NDC = \angle$
на одну дугу
описанная

$$\frac{NC}{\sin d} = \frac{CL}{\sin g} = 2R \sin 2 = 10$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

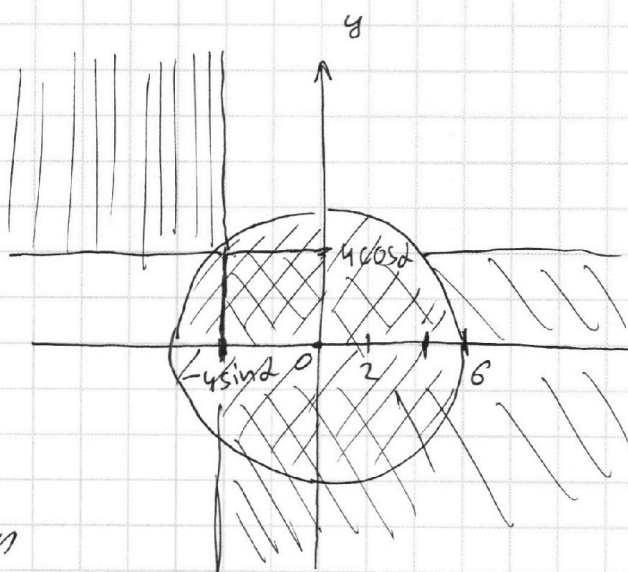
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 ~~задача~~

~~задача~~

$$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \quad (1) \end{cases}$$

уравнение окружности

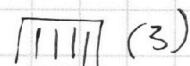
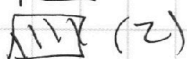
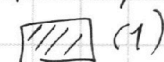


$$\begin{cases} x + 4\sin\alpha \geq 0 \\ y - 4\cos\alpha \leq 0 \\ x + 4\sin\alpha \leq 0 \\ y - 4\cos\alpha \geq 0 \end{cases}$$

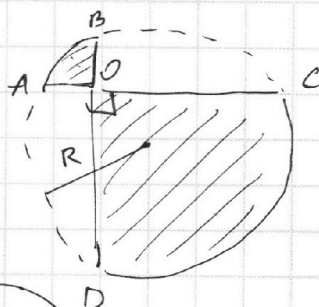
$$\begin{cases} x \geq -4\sin\alpha \quad (2) \\ y \leq 4\cos\alpha \\ x \leq -4\sin\alpha \quad (3) \\ y \geq 4\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4\sin\alpha &\in [-4; 4] \\ 4\cos\alpha &\in [-4; 4] \end{aligned}$$

пример

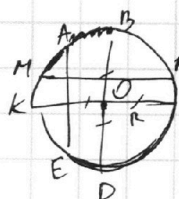


научная фигура $P(\alpha)$ имеет вид:



ее периметр
равен сумме двух
хорд и двух дуг
образованных
вертикальными
углами
($BD \perp AC$)

$$UDC + UAB = \pi R \text{ при любых } \alpha \text{ т.к.}$$



$$\begin{aligned} UAC &= UEC \\ UAK &= UKE \end{aligned} \Rightarrow UAK + UEC = \pi R$$

$$UBN = UBM$$

$$UAB$$

$$UAM + UEN + UDS + UCE + UED + UAM$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

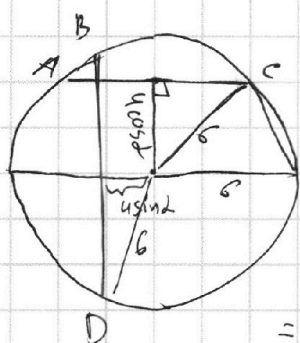
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение)

нужно максимизировать сумму длин хорд



$$AC = 2\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha} = 2\sqrt{20 + 16\sin^2\alpha}$$

$$BD = 2\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} = 2\sqrt{20 + 16\cos^2\alpha}$$

$$(AC + BD)^2 =$$

$$= 2AC \cdot BD + 4(36 - 16\cos^2\alpha + 36 - 16\sin^2\alpha)$$

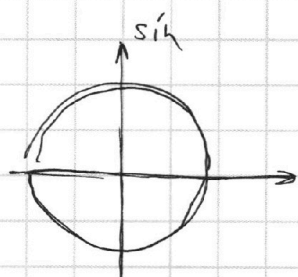
$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$AC = 2\sqrt{36 - 16(1 - \sin^2\alpha)} = 2\sqrt{20 + 16\sin^2\alpha}$$

$$AC + BD = 2\sqrt{20 + 16\sin^2\alpha} + 2\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} = f(\alpha)$$

$$f'(\alpha) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{20 + 16\sin^2\alpha}} \cdot 16 \cdot 2 \sin\alpha \cos\alpha + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha}} \cdot (-16 \cdot 2 \sin\alpha \cos\alpha)$$

$$f'(\alpha) = 0 \text{ при } \begin{cases} \sin\alpha = 0 \\ \cos\alpha = 0 \end{cases} \text{ или при } \frac{1}{\sqrt{20 + 16\sin^2\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha}} = 0$$



т.е.

или найдем,

что $\sin\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\alpha = 0$

$\cos\alpha = 0$

можно минимизировать
и максимизировать
 $f(\alpha)$ т.е. для суммы
хорд

$$20 + 16\sin^2\alpha = 36 - 16\sin^2\alpha$$

$$32\sin^2\alpha = 16$$

$$2\sin^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 (крудатение)

$$AC+BD = 2\sqrt{36-16\cos^2\alpha} + 2\sqrt{36-16\sin^2\alpha}$$

нм $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$ $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$ тогда:

$$AC+BD = 2\sqrt{36-8} \cdot 2 = 4\sqrt{28} = 8\sqrt{7}$$

нм $\sin\alpha = 0 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1$; нм ~~$\sin\alpha = 1$~~ $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1$

$$AC+BD = 2\sqrt{36-16} + 2\sqrt{36} = 2\sqrt{20} + 12$$

$$\frac{16}{8.2} < 8\sqrt{7} < 8 \cdot \sqrt{9} = 24$$

$$\frac{8}{2.4} < 2\sqrt{20} < 2 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 4 \\ \hline 96 \\ -144 \\ \hline 384 \\ -384 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2240 \\ -16 \cdot 128 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ 568 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$8\sqrt{7} \vee 2\sqrt{20} + 12$$

$$64.7 \vee 4 \cdot 20 + 4 \cdot 12 \cdot \sqrt{20} + 144$$

$$64.7 - 80 - 144 \vee 4 \cdot 12 \cdot \sqrt{20}$$

$$224 \vee 48\sqrt{20}$$

$$28 \vee 8\sqrt{20}$$

$$28^2 \vee 36 \cdot 20$$

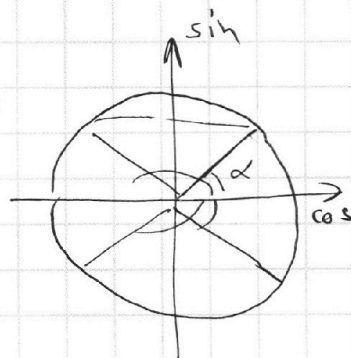
$$784 > 720$$

$$\Leftarrow 8\sqrt{7} > 2\sqrt{20} + 12$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$M = AC+BD+\pi R = 6\pi + 8\sqrt{7} \leftarrow \text{Ответ}$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

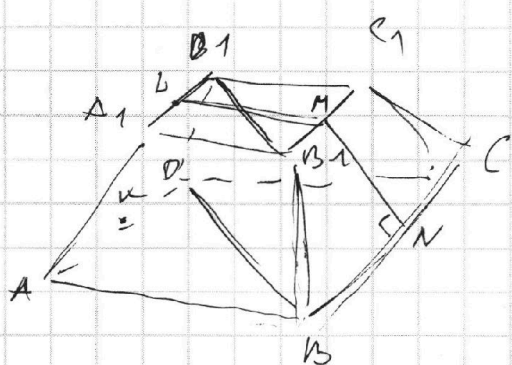
6
☐

7
☒

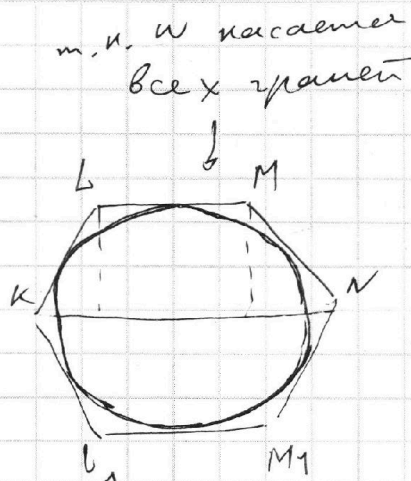
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7

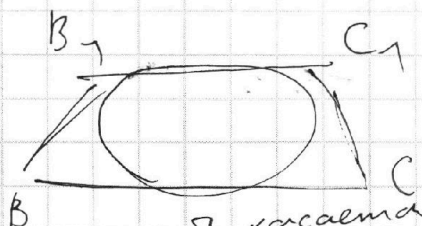
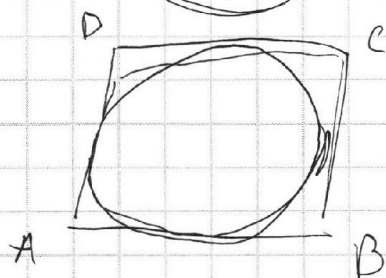
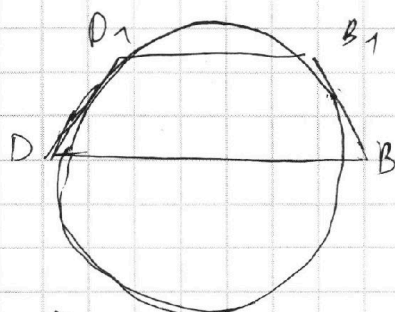


L и M симметричны
отн. KN т. L и M



т.к. W касается
всех граней

для SL :



т.к. SL касается
всех ребер $\Rightarrow$ плоскость

(B, C, C) пересекла
его и мы получаем
сечение в виде окружности,
вписанной в





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



1



2



3



4



5



6



7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

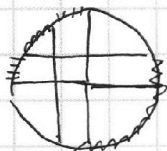
Пусть всего x учащихся в классе

Для всех детей вероятность попасть на концерт
одинакова, т.е. билеты распределены случайным
образом (по условию)
(в начале месяца)

(1) Вероятность, что Петя пойдет: $\frac{4}{x}$
что Вася пойдет: $\frac{4}{x}$ $\Rightarrow$ вероятность
или оба вместе пойдут: $\frac{16}{x^2}$

(2) Пусть стало y билетов в начале месяца $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ вероятность стала (аналогично (1)): $\frac{y^2}{x^2}$



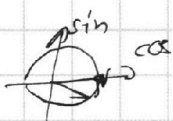


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$~~ 

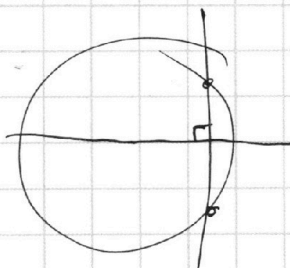
$$\sin 30^\circ - \sin 90^\circ = 2 \cos 60^\circ$$
$$= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \quad \cos 60^\circ + \cos 60^\circ$$

$$2 \cos 60^\circ \sin -30^\circ = \sin -30^\circ = -\frac{1}{2}$$



$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

$$\frac{x!}{4!(x-4)!}$$



$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 24 \\ \hline 8 \\ 192 \\ \hline 175 \\ -111 \\ \hline 64 \\ -82 \\ \hline 77 \\ \hline 5 \end{array}$$