



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 3, а  $y$  — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 9xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{16}{5}$ ,  $BP = 2$ ,  $AC = 4$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Заметим, что если  $A$  — четырехзначное число из одинаковых цифр,  $A = 1111 \cdot k$ ,  $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ .

$1111 = 11 \cdot 101$ ,  $11$  и  $101$  — простые.

$ABC$  — квадрат,  $A: 11$  и  $101$  в первой степени ( $k \leq 9$ , значит,  $\nmid 11$ ,  $\nmid 101$  ( $k \neq 0$ )).

Вхождение любого простого в квадрат четное, значит, в  $BC$  и  $11$ , и  $101$  входят в четной степени. Число  $C$  двузначное, значит,  $C \leq 99 < 101$ ,  $C \neq 0$ , значит,  $C \nmid 101$ . Значит,  $B: 101$ .

В трехзначном трехзначном числе, кратное  $101$ :  $101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909$ .

Хотя бы одна его цифра — 5, значит, подходит только  $101$ .  $B = 101$ .

$101 \nmid 11$ , значит,  $C: 11$ . Двузначные числа, кратные  $11$ :  $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$ .

Хотя бы одна его цифра — 5, значит, подходит только  $55$ .  $C = 55$ .

$BC = 5 \cdot 11 \cdot 101$ ,  $A = 11 \cdot 101 \cdot k$ . Чтобы  $A \cdot B \cdot C$  было квадратом, в  $k$  5 должно входить в четной степени, все ост. простые — в четной.  $k$  — натуральная цифра, т.е.  $k \leq 9$ .

$5^1 < 9$ ,  $5^3 = 125 > 9$ , т.е. степень вхожд.

$5 - 1$ . Пусть  $k: n \cdot p^2$ , где  $p$  — простое ( $\neq 5$ ).

$p \geq 2$ ,  $p^2 \geq 4$ ,  $k \geq 5$ .  $4 = 2^2 > 9$  — противоречие.

Значит, степень вхожд. всех остальных простых 0, т.е.  $k = 5$ . Отсюда  $A = 11 \cdot 101 \cdot 5 = 5555$ ,

$ABC = (5 \cdot 11 \cdot 101)^2 = 5555^2$

Ответ:  $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

Приведем все части к общему знаменателю:

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy + 3x - 3y - 9$$

$$x - y - 3 = 0, \quad y = x - 3. \quad \text{Подставим в } M:$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) =$$

$$= x^3 - x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 - 3 \cdot x \cdot 9 + 27 - 9x^2 + 27x =$$

$$= x^3 - x^3 + 9x^2 - 9x^2 + 27x - 27x + 27 = 27.$$

Ответ: 27.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

Затемним разность синусов и сумму косин:

$$\cancel{2} \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin \pi x = \cancel{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \pi x$$

$$1. \cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi(x+y)}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1 + 4k, k \in \mathbb{Z} \\ x+y = -1 + 4k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y \overset{4}{\equiv} 1 \\ x+y \overset{4}{\equiv} -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4k+1-x, k \in \mathbb{Z} \\ y = 4k-1-x, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \overset{4}{\equiv} 1-x+1 \\ y \overset{4}{\equiv} -x-1 \end{cases}$$

$$2. \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \neq 0, \text{ сократим на него:}$$

$$\sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x$$

Затемним произведение синусов и пр-е косин:

$$\frac{\cos \left( \frac{\pi(x-y)}{2} - \pi x \right) - \cos \left( \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right)}{2} = \frac{\cos \left( \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right) + \cos \left( \frac{\pi(x-y)}{2} - \pi x \right)}{2}$$

$$2 \cos \left( \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$\cos \left( \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2x = 1+4k, k \in \mathbb{Z} \\ x-y+2x = -1+4k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☐

3  
☒

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4m - 1 + 3x, & m \in \mathbb{Z} \\ y = 4m + 1 + 3x, & m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \equiv_{4} 3x - 1 \\ y \equiv_{4} 3x + 1 \end{cases}$$

Ответ:  $x$  любое,  $\begin{cases} y \equiv_{4} -x + 1 \\ y \equiv_{4} -x - 1 \\ y \equiv_{4} 3x - 1 \\ y \equiv_{4} 3x + 1 \end{cases}$

$$\text{б) } \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

$$-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1, \quad -4 \leq x \leq 4, \quad -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1, \quad -9 \leq y \leq 9$$

$\arccos$  опр. на отрез.  $[0; \pi]$ , значит,  
 $\arccos \frac{x}{4} \leq \pi$ ,  $\arccos \frac{y}{9} \leq \pi$ , ~~а~~ сумма  $\leq 2\pi$ ,  
не подх. только случай равенства, т.е.  
когда  $\arccos \frac{x}{4} = \pi$  и  $\arccos \frac{y}{9} = \pi$ , т.е.

$$\frac{x}{4} = -1, \quad x = -4, \quad \text{и} \quad \frac{y}{9} = -1, \quad y = -9.$$

$$-9 = -(-4) - 1 - 3 \cdot 4, \quad \text{т.е. пара подходит.}$$

Ответ: одна:  $(-4; -9)$



1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.

Пусть кол-во одиннадцатиклассников -  $n$ .  
 в нач. месяца:

Рассмотрим их от одного до  $n$ ,  
 номера 1, 2, 3, 4 выданы билеты.  
 "Удачных" пар номеров для Тети и Васи  
 $4 \cdot 3 = 12$  (Тете выбирает один из первых четырех,  
 Васю из оставшихся после выбора Тети трех),  
 Всего пар номеров  $n(n-1)$  (Тете выбирает один  
 из  $n$ , Васю из оставшихся). Значит,  
 в начале месяца вероятности  $\frac{12}{n(n-1)}$ .

В конце месяца распределили билеты  
 анонимно, но теперь их  $k$ , т.е.  
 кол-во "удачных" пар для Тети и Васи  
 $k(k-1)$ , т.е. вероятность  $\frac{k(k-1)}{n(n-1)}$ .  
 Вероятность увелич. в 3,5 раза, т.е.

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} : \frac{12}{n(n-1)} = 3,5$$

$$\frac{k(k-1)}{12} = 3,5$$

$$k^2 - k - 42 = 0$$

$$(k-7)(k+6) = 0$$

$$k = 7$$

$k = -6$  - не подх., т.к. кол-во билетов  
 неотриц. ( $> 4$ ).

Значит,  $k = 7$

Ответ: 7

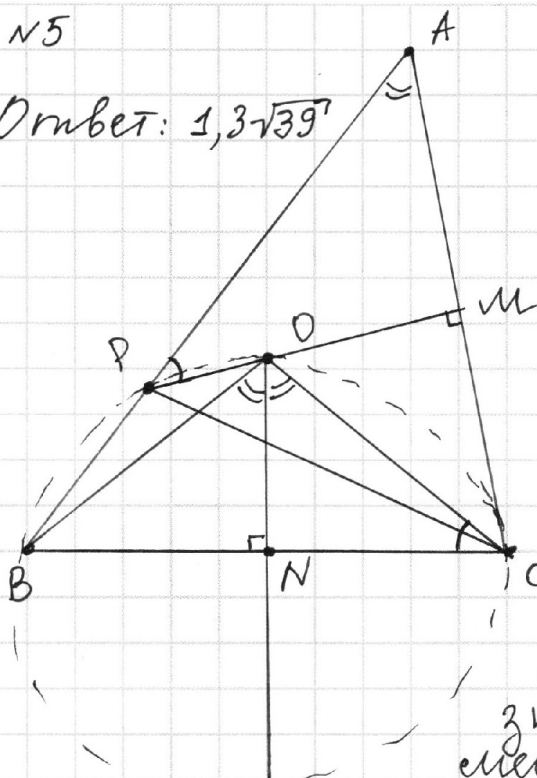


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☒6  
☐7  
☐СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

Ответ:  $1,3\sqrt{39}$ 

1) четырехугольник BCOP -

вписанный, по свойству

впис. четыр-ка  
 $\angle APO = \angle BCO$  ( $\angle APO =$   
 $= 180^\circ - \angle BPO$  (внешн.)  $=$   
 $= \angle BCO$  (сумма противопугов  $180^\circ$ )

2) отметим точку N -

середину BC. O - центр

окр. ABC, значит,

лежит на серединном

перпендикуляре к BC,

значит  $ON \perp BC$ , ON -медiana и высота в  $\triangle BOC$ ,по призн.  $\triangle BOC$  равноб. по св-ву ON - бисс.в  $\triangle BOC$ . Значит,  $\angle NOC = \frac{1}{2} \angle BOC$ . При этом $\angle BOC$  - центральный дуге BC, и опирается надугу BC, а  $\angle BAC$  - вписанный дуге BC, и

опирается на дугу BC, по теор. о центр. угле

 $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle NOC$ .3) Рассмотрим  $\triangle NOC$ . Он прямоугольный,значит  $\angle NOC + \angle OCN = 90^\circ$ . Рассмотрим~~в~~  $\triangle APM$ .  $\angle PMA = 180^\circ - \angle MAP - \angle APM =$  $= 180^\circ - \angle BAC - \angle APO$  (те же углы)  $= 180^\circ - \angle NOC -$  $- \angle BCO$  (по пунктам 1 и 2)  $= 180^\circ - \angle NOC - \angle OCN$ (те же углы)  $= 180^\circ - 90^\circ$  (этот же пункт)  $= 90^\circ$ .4)  $OM \perp AC$ , O лежит на серед. перп. к AC  $\Rightarrow M$  -сер. AC,  $AM = \frac{1}{2} AC = 2$ . Найдем теор. Пиф. дуге $\triangle AMP$ :  $PM = \sqrt{AP^2 - AM^2} = \sqrt{\frac{256}{25} - 4} = \sqrt{\frac{156}{25}} = \frac{2}{5} \sqrt{39}$ 5)  $S_{APC} = \frac{1}{2} PM \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \sqrt{39} \cdot 4 = \frac{4}{5} \sqrt{39}$ 6) у  $\triangle ABC$  и  $\triangle APC$  общ. выс. из C  $\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{AB}{AP} = \frac{AP+PB}{AP} = 1 + \frac{2 \cdot 5}{16 \cdot 8} =$  $= \frac{13}{8}$ ,  $S_{ABC} = \frac{13}{8} S_{APC} = \frac{13}{8} \cdot \frac{4}{5} \sqrt{39} = 1,3 \sqrt{39}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

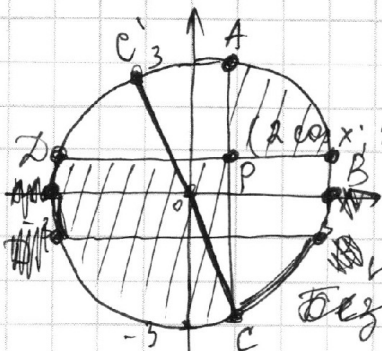
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

Изобразим  $\Phi(\alpha)$  на коорд. плоскости:  
второе пер-во означает, что она находится внутри круга с центром в  $(0;0)$  и радиусом 3. Первое пер-во верно, если  $(x \geq 2 \cos \alpha$  и  $y \geq 2 \sin \alpha)$  или  $(x \leq 2 \cos \alpha$  и  $y \leq 2 \sin \alpha)$ , т.е. всегда  $\Phi$  лежит в объединении двух областей: выше прямой  $x = 2 \cos \alpha$  и правее прямой  $y = 2 \sin \alpha$ ; ниже прямой  $x = 2 \cos \alpha$  и левее прямой  $y = 2 \sin \alpha$ .



Заметим, что  $M$  складывается из дуг  $AB$  и  $CD$  ~~и отрезков~~  $AC$  и  $BD$ .

1) Докажем, что  $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = 3\pi$  независимо от  $\alpha$ .

~~Безоусловно очевидно, пусть~~

~~Вдоль оси Ox отразим отрезок BD относительно Oy. Тогда все Ox.~~

Проведем диаметр  $CC_1$ . В симметр.  $D$  отн.  $Ox$ , т.к.  $BD$  ~~касается~~  $Ox$ .  $AC$  симметр.  $CC_1$  отн.  $Ox$  и  $BD \parallel Ox \perp Oy$ ,  $Oy$  - диам., значит,  $Oy$  - серед. перп. к  $BD$ ;  $A$  симм.  $C_1$  т.к.  $CC_1$  - диам.  $\Rightarrow \angle ACC_1 = 90^\circ \Rightarrow AC' \perp AC \parallel Oy$ ,  $Oy$  - диам., зн.  $Oy$  - серед. перп. к  $AC'$ . значит,  $AB = AC'$  т.е.  $AB + CD = AC' + CD = CC_1 = 2r = 3\pi$ .

2)  $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = \text{const}$ , значит, остается максимиз.  $AC + BD$ . Пусть  $y$  точки  $P$  коорд.  $(x_0; y_0)$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

III. к.  $x_0 = 2 \cos \alpha$ ,  $y_0 = 2 \sin \alpha$ , можно  
указать что  $x_0 \in [-2; 2]$ ,  $y_0 \in [-2; 2]$ ,  
 $x_0^2 + y_0^2 = 4$  т.е. точка P лежит  
на окружности с центром  $(0; 0)$  и радиусом 2.

$$AC = 2\sqrt{9-x_0^2} \quad (A = (x_0; \sqrt{9-x_0^2}), C = (x_0; -\sqrt{9-x_0^2}))$$

$$BD = 2\sqrt{9-y_0^2} \text{ (аналогично)}, \text{ тогда } = 2\sqrt{9-4+x_0^2} =$$

$$= 2\sqrt{5+x_0^2} \quad \text{или } AC + BD = 2\sqrt{9-x_0^2} + 2\sqrt{5+x_0^2}$$

$$2\sqrt{9-x_0^2} + 2\sqrt{5+x_0^2} \rightarrow \max$$

$$\sqrt{9-x_0^2} + \sqrt{5+x_0^2} \rightarrow \max, \text{ число } > 0, \text{ значит}$$

$$(\sqrt{9-x_0^2} + \sqrt{5+x_0^2})^2 \rightarrow \max \text{ и квадрат}$$

$$14 + 2\sqrt{(9-x_0^2)(5+x_0^2)} \rightarrow \max$$

$$\sqrt{(9-x_0^2)(5+x_0^2)} \rightarrow \max, \text{ корень имеет.}$$

$$(9-x_0^2)(5+x_0^2) \rightarrow \max, x_0^2 = t, t \in [0; 4]$$

$$-t^2 + 4t + 45 \rightarrow \max, \text{ параб. ветв. вниз,}$$

$$\text{макс. в вершине, } t_0 = 2, \text{ верш. на}$$

$$\text{отр. } [0; 4], \text{ значит, макс. достиг.}$$

$$x_0^2 = 2$$

$$|2 \cos \alpha| = \sqrt{2}$$

$$|\cos \alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{При этом } AC + BD = 2\sqrt{9-x_0^2} + 2\sqrt{5+x_0^2} = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{7} =$$

$$= 4\sqrt{7}, M = 4\sqrt{7} + 3\pi$$

$$\text{Ответ: } 4\sqrt{7} + 3\pi \text{ при } \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

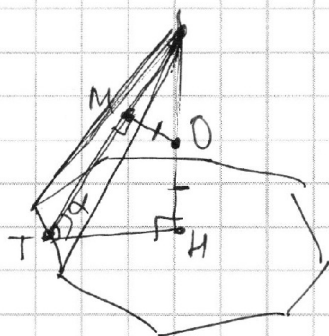
СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7.

Заметим, что центры обоих шаров  
лежат на высоте пирамиды ~~и следовательно~~  
~~и следовательно~~ ~~и следовательно~~ из сообр. сими.

ω:

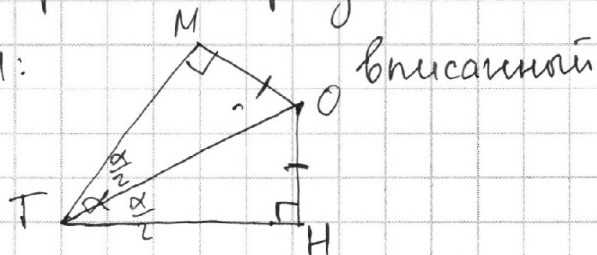


расст. от центра шара

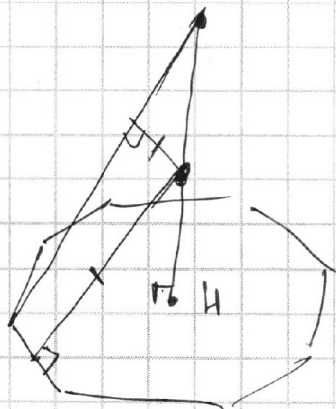
до боковой грани -  
расст. до апофемы.

Рассмотрим четырехугольник

OMTH:



Ω



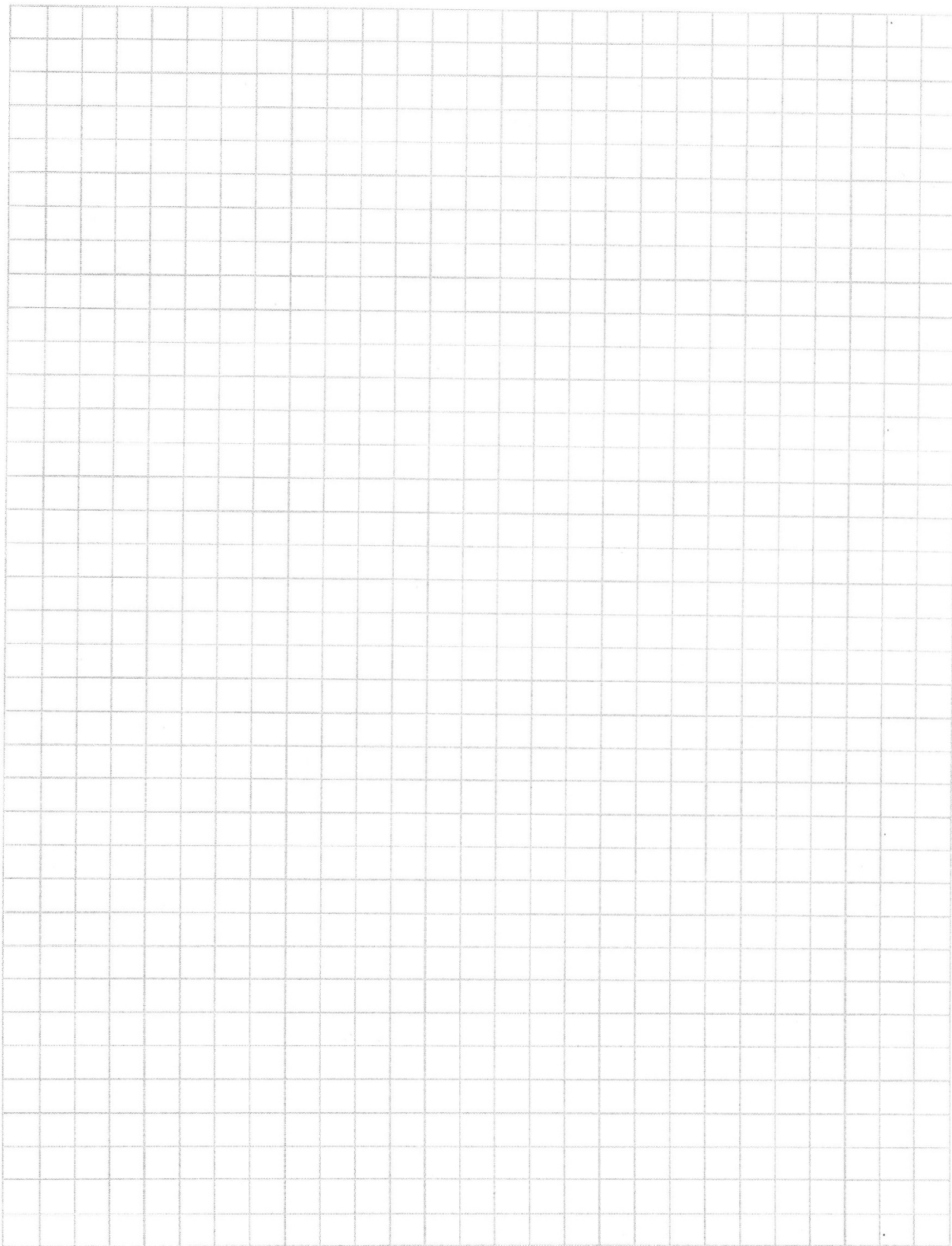


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) + \cos(a+b) =$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\sin a$$

$$\cos \cos = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$\sin(a+b) - \sin a = \sin a \cos b + \sin b \cos a - \sin a =$$

$$= \sin a (\cos b - 1)$$

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin b \cos a$$

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \sin b$$

$$a+b=t$$

$$a-b=s$$

$$a+b=t$$

$$a-b=s$$

$$\cos s - \cos t = 2 \sin \frac{t+s}{2} \sin \frac{t-s}{2}$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos \frac{t}{2} \cos \frac{s}{2}$$

$$a = \frac{t+s}{2} \quad b = \frac{t-s}{2}$$

$$\sin t - \sin s = 2 \sin \frac{t-s}{2} \cos \frac{t+s}{2}$$

$$\sin \pi x (\sin \pi x - \sin \pi y) = 2 \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \sin \pi x$$

$$\cos \pi x (\cos \pi x + \cos \pi y) = 2 \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \frac{\pi(x+y)}{2}$$

$$\cos \pi x (\cos \pi x + \cos \pi y) = 2 \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \pi x$$

$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2}$$

н единиц.

б нумер:

нумер. от 1 до n, первые 4 аргументы

$$1 \cdot \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} = \frac{12}{n(n-1)}$$

б концы:

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$$\frac{k(k-1)}{12} = 3,5$$

$$3,5 \cdot 12 = 4 \cdot 6 = 42$$

$$k^2 - k - 42 = 0$$

$$D = 1 + 168 = 169$$

$$k^2 - k = 42 \quad k = 4$$

$$(k-4)(k+6) = 0 \quad k = -6$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 \_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111k, \quad k - \text{целое}$$

$$B = 100a_1 + 10b_1 + c_1, \quad a_1, b_1, \text{ или } c_1 = 1$$

$$C = 10a_2 + b_2, \quad a_2, \text{ или } b_2 = 5$$

$$A \cdot B \cdot C - \text{квадрат}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \div 11 \\ 103 \end{array} \quad A = 11 \cdot 101 \cdot k \quad C \neq 101 (\angle 101)$$

$$B \neq 103$$

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = 0 \quad 3\text{-цифры: } 101, 202, \dots, 909, \text{ если } 1 - 101$$

$$C \neq 11, \text{ если } 5 - 55$$

$$BC = 11 \cdot 101 \cdot 5, \quad k = 5$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad \begin{array}{l} x^3 - 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 9 - 27 = \\ = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 \end{array}$$

$$x^3 - y^3 - 9xy \quad x(x^2 - 9y) \quad x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) =$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) \quad = \cancel{x^3} - \cancel{x^3} + \cancel{9x^2} - \cancel{27x} + 27 - \cancel{9x^2} + \cancel{27x}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x+y+1 > 0, \text{ можно сокр.}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$y = x-3$$

$$3(x^2 + x(x-3) + (x-3)^2) =$$

$$\cancel{xy} + 3x - 3y - 9 = \cancel{xy} \quad = 3(x^2 + x^2 - 3x + x^2 -$$

$$x - y - 3 = 0$$

$$\cancel{x} - y = 3$$

$$y = x-3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

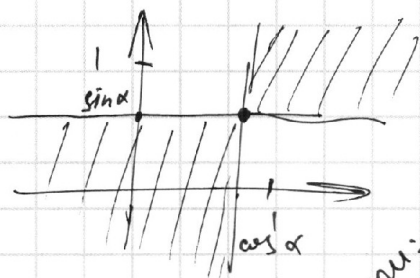
$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$(x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0$$

Или:  $x=2\cos\alpha, y=2\sin\alpha$

Или:  $x \geq 2\cos\alpha$  и  $y \geq 2\sin\alpha$

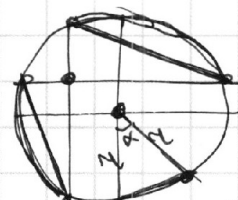
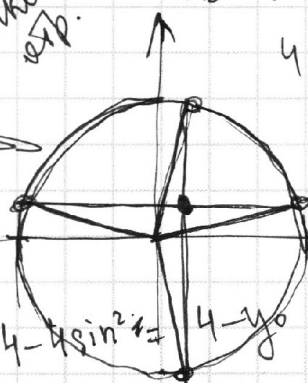
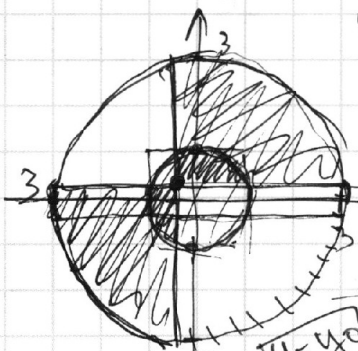
Или:  $x \leq 2\cos\alpha$  и  $y \leq 2\sin\alpha$



$$\sin\alpha = \cos\alpha$$
$$\sin\alpha = \cos\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

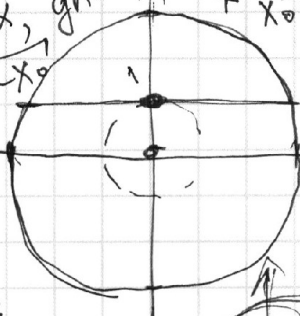
гипотенуза:  $2\sqrt{2}$   
макс. перпен.  $2\cos\alpha; 2\sin\alpha$   
экстр.

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$
$$4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha = 4$$

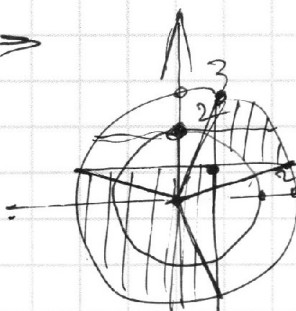


$$1+x^2=9$$
$$x^2=8$$

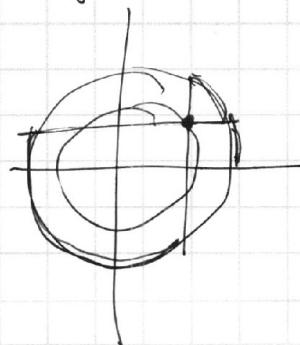
Для  
гор:  $2\sin\alpha$ , gn.  $= \sqrt{4-x_0^2}$   
верх:  $2\sqrt{4-x_0^2}$



$$6+2\sqrt{8}+$$



гипотенуза:  $2\sqrt{2}$   
макс. перпен.  $2\cos\alpha; 2\sin\alpha$   
экстр.



Сумма:

$$2(\sqrt{4-x_0^2} + \sqrt{4-y_0^2})$$

от 0 до 90



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

