



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. $A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$ (a - цифра)

П.к. $A \cdot B \cdot C$ - квадрат натурального числа, то каждый простой делитель входит в $A \cdot B \cdot C$ в чётной степени.

$$A : 101, A \not\div 101^2 \text{ (т.к. } 11a \leq 99) \Rightarrow B : 101 \text{ или } C : 101,$$

$$\text{но } C \not\div 101 \text{ (т.к. } C \leq 99) \Rightarrow B : 101 \Rightarrow \underline{B = 101}, \text{ т.к. в числе}$$

B есть цифра 1.

$$A : 11, A \not\div 11^2 \text{ (т.к. } a \not\div 11, 101 \not\div 11) \Rightarrow B : 11 \text{ или } C : 11,$$

$$\text{но } B \not\div 11 \text{ (т.к. } B = 101 \not\div 11) \Rightarrow C : 11 \Rightarrow \underline{C = 55}, \text{ т.к. в числе}$$

C есть цифра 5.

$$C : 5, C \not\div 5^2, B \not\div 5 \Rightarrow A : 5 \Rightarrow \underline{A = 5555}$$

$$A \cdot B \cdot C = 5555 \cdot 101 \cdot 55 = (5 \cdot 11 \cdot 101)^2$$

Ответ: $(5555; 101; 55)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy}$$

$$K = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{y+3}{(x-3)(y+3)} + \frac{x-3}{(x-3)(y+3)} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$K = \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3) \quad , \text{ т.к. } x+y+1 > 0$$

$$xy = xy - 3y + 3x - 9$$

$$9 = 3(x-y)$$

$$x-y = 3$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = \underbrace{(x-y)}_3 (x^2 + xy + y^2) - 9xy = 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy =$$

$$= 3x^2 - 6xy + 3y^2 = 3(x^2 - 2xy + y^2) = 3 \underbrace{(x-y)^2}_3 = 3 \cdot 3^2 = 27$$

Ответ: 27.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☒ 3

☐ 4

☐ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3(a) \quad \alpha = \pi x, \beta = \pi y$$

$$(\sin \alpha - \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cdot \cos \alpha$$

$$\text{По формулам } \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Если } \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha + \beta = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi x + \pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

Иначе можно все члены разделить на $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$:

$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \alpha = \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \alpha$$

$$\text{По формулам } \sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)) \text{ и}$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta));$$

$$-\frac{1}{2} \left(\cos \frac{3\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$-\frac{1}{2} \cos \frac{3\alpha - \beta}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2} \cos \frac{3\alpha - \beta}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$0 = \cos \frac{3\alpha - \beta}{2} \Rightarrow \frac{3\alpha - \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi h, h \in \mathbb{Z}$$

$$3\pi x - \pi y = \frac{\pi}{2} + 2\pi h, h \in \mathbb{Z}$$

$$3x - y = 2h + 1, h \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x + y = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \\ 3x - y = 2h + 1, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2k + 1 - x, k \in \mathbb{Z} \\ y = 3x - 2h - 1, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Получается все решения будут $(x; 2k + 1 - x)$ и $(x; 3x - 2h - 1)$,
 $\forall x, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall h \in \mathbb{Z}$

$$\text{Итого: } (x; 2k + 1 - x)$$

$$(x; 3x - 2h - 1), \forall x, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall h \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3(б) \quad \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

$$\begin{cases} y = 2k + 1 - x, & k \in \mathbb{Z} \\ y = (2n + 1) + 3x, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$-4 \leq \frac{x}{4} \leq 4$$

$$-1 \leq \frac{y}{9} \leq 1$$

$$-4 \leq x \leq 4$$

$$-9 \leq y \leq 9$$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq \pi + \pi = 2\pi, \text{ равенство при } \frac{x}{4} = \frac{y}{9} = -1,$$

т.е. $x \neq -4$ и $y \neq -9$ одновременно

Исходя из решения уравнения:

При $x = -4$: y - любое целое (кроме -9) - 9 вариантов
($-9 \leq y \leq 9$)

При $x = -3, -1, 1, 3$: y - любое четное - 9 вариантов к каждому
($-9 \leq y \leq 9$)

При $x = -2, 0, 2, 4$: y - любое нечетное - 10 вариантов к каждому
($-9 \leq y \leq 9$)

$$\text{Всего пар таких: } 9 + 4 \cdot 9 + 4 \cdot 10 = 45 + 40 = 85$$

Ответ: 85.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. Если количество одноклассников равно n ,
а количество билетов равно k , то всего вариантов
выбора тех, кто пойдет на концерт, будет C_n^k ,
а вариантов, когда и Теме, и Васе достались билеты,
равно C_{n-2}^{k-2} (2 билета уже определены, осталось распределить
 $k-2$ билета между $n-2$ учениками)

Тогда вероятность попадания Теме и Васьи на концерт равна

$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{k!(n-2)!}{n!(k-2)!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

В начале было $k=4$ билета, и вероятность билета $\frac{4 \cdot 3}{n(n-1)}$

В конце было $k=x$ билетов, и вероятность билета $\frac{x(x-1)}{n(n-1)}$

Из условия $\frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} \cdot 3,5 = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$

$$x^2 - x = 42$$

$$x^2 - x - 42 = 0$$

$$(x-7)(x+6) = 0$$

$$\begin{cases} x=7 \\ x=-6 \end{cases}$$

$x=-6$ не подходит, т.к. $x \in \mathbb{N}$

Ответ: 7.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

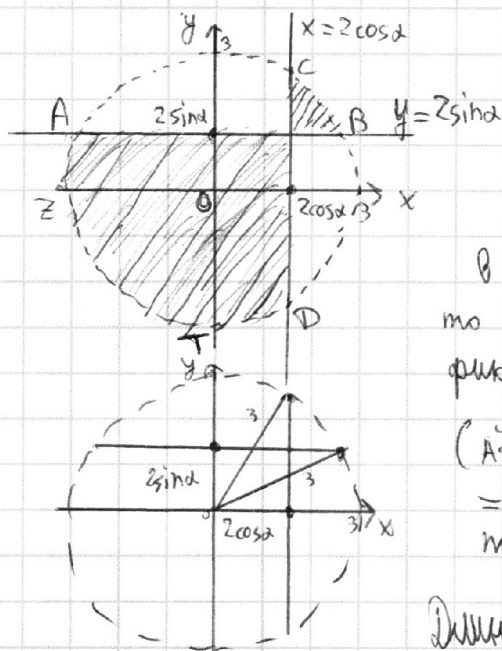
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. П.к. $x^2 + y^2 \leq 9$, то фигура принадлежит кругу с центром в $(0; 0)$ и радиусом 3. (длина окружности $2\pi R = 6\pi$)

$$(x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases}$$



Если прямые $y = 2\sin\alpha$ и $x = 2\cos\alpha$ пересекают окружность $x^2 + y^2 = 9$ в точках A и B, C и D (как на рисунке), то периметр дуг, принадлежащих Φ , фиксирован и равен $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC} = \frac{2\pi \cdot 3}{2} = 3\pi$
 $(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AZ} + \overset{\frown}{ZT} + \overset{\frown}{TD} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{ZT} + \overset{\frown}{YC} + \overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{BX} = \overset{\frown}{ZT} + \overset{\frown}{YX} = \frac{2\pi \cdot 3}{2} = 3\pi, \text{ а для другого положения прямых, аналогично})$

Длина прямых границ Φ равна из теоремы Пифагора $2\sqrt{3^2 - (2\cos\alpha)^2} + 2\sqrt{3^2 - (2\sin\alpha)^2}$

П.е. периметр Φ равен $3\pi + 2(\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha})$

Пусть $4\cos^2\alpha = t \Rightarrow 4\sin^2\alpha = 4 - 4\cos^2\alpha = 4 - t$

$$\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} = \sqrt{9 - t} + \sqrt{5 + t} \geq 2\sqrt{5 - t} \cdot \sqrt{5 + t}$$

по неравенству о средних, равенство при $\sqrt{5 - t} = \sqrt{5 + t} \Rightarrow t = 2$
 $(a + b) \geq 2\sqrt{ab}$

$$2\sqrt{(5 - t)(5 + t)} = 2\sqrt{25 - t^2} = 2\sqrt{49 - (t - 2)^2} \geq 2\sqrt{49} = 28$$

равенство при $(t - 2)^2 = 0 \Rightarrow t = 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6 (продолжение) $t = 4 \cos^2 \alpha$

$$\sqrt{9-4\cos^2 \alpha} + \sqrt{9-4\sin^2 \alpha} = \sqrt{9-t} + \sqrt{5+t}$$

По неравенству о среднем арифметическом и квадратическом:

$$\left(\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ для } a, b > 0, \text{ равенство при } a=b \right)$$

$$\frac{\sqrt{9-t} + \sqrt{5+t}}{2} \leq \sqrt{\frac{9-t^2 + 5+t^2}{2}}$$

$$\sqrt{9-t} + \sqrt{5+t} \leq 2\sqrt{\frac{9+5}{2}} = 2\sqrt{7}, \text{ равенство при } \begin{cases} \sqrt{9-t} = \sqrt{5+t} \\ 9-t = 5+t \\ t = 2 \end{cases}$$

$$2 = t = 4\cos^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{И.е. периметр } P = 3\pi + 2(\sqrt{9-4\cos^2 \alpha} + \sqrt{9-4\sin^2 \alpha}) \leq 3\pi + 2 \cdot 2\sqrt{7} =$$

$$= 3\pi + 4\sqrt{7} = M, \text{ достигается при } \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $3\pi + 4\sqrt{7}$

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3}(a+b) = a+b+2\sqrt{3}ab$$

$$(a+b)(\sqrt{3}-1) = 2\sqrt{3}ab$$

$$h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2\sin\frac{\pi}{n}}\right)^2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = \sqrt{3} + \frac{a+b}{2\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\right)(a+b) = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{9-t} + \sqrt{54t} \leq 2\sqrt{7}$$

$$\sqrt{9-t} + \sqrt{54t} \leq 2\sqrt{\frac{9-t+54t}{2}} = 2\sqrt{7}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

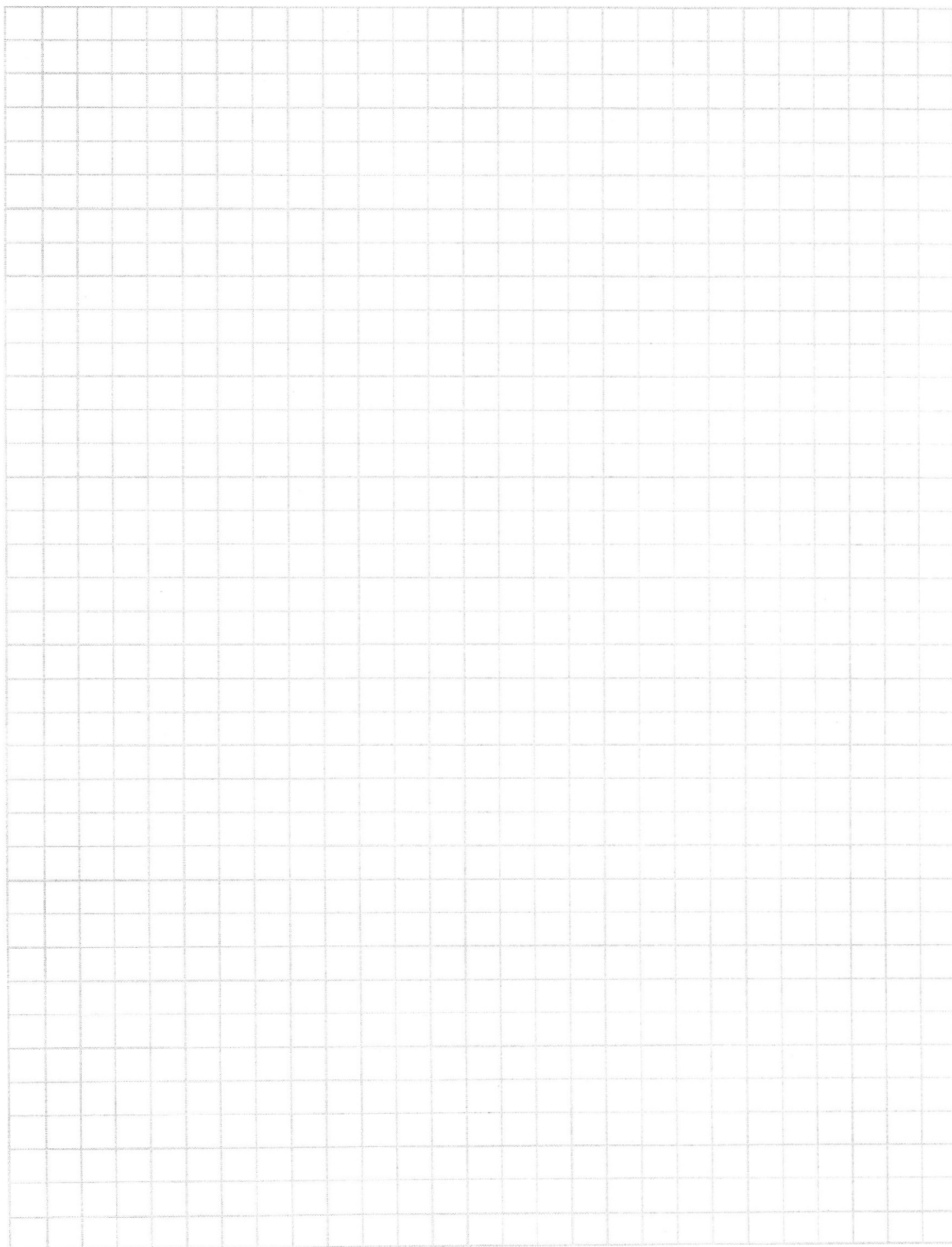
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



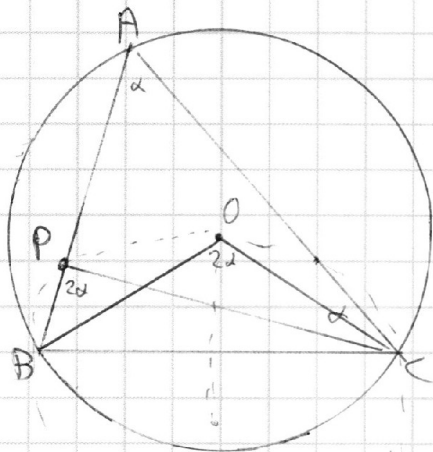


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

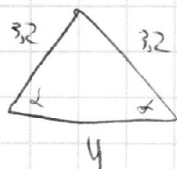


$S_{ABC} = ?$

AP, BP, AC
 $\frac{16}{5}$ 2 4

AB = 5,2
 AC = 4

AP = PC = 3,2



$$\left(\frac{16}{5}\right)^2 = \left(\frac{16}{8}\right)^2 + 4^2 - 2 \cdot \frac{16}{5} \cdot 4 \cdot \cos \alpha$$

$$2 \cdot \frac{16}{5} \cdot 4 \cdot \cos \alpha = 4^2$$

$$2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \cos \alpha = 4$$

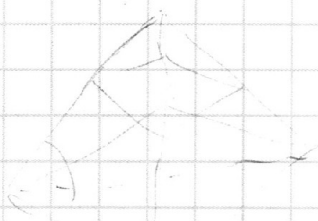
$$\cos \alpha = \frac{5}{8}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \sqrt{\frac{39}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$64 - 25 = 39$$

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{5} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

$$\left(\frac{\sqrt{39}}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{39 + 25}{64} = 1$$



X 11-ккл

(...)

$$\frac{12}{20} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$P(B) = 3,5 P(A)$$



вычитается 4

$$P(A) = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)(x-3)}{x(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{12}{x(x-1)}$$

$$P(B) = \frac{C_{x-2}^{k-2}}{C_x^k} = \frac{(x-2)!}{(k-2)!(x-k)!} \cdot \frac{k!}{x!} = \frac{k(k-1)}{x(x-1)} = \frac{3,5 \cdot 12}{x(x-1)}$$

$$\begin{cases} k^2 - k - 42 = 0 \\ (k-7)(k+6) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k = -6 \\ k = 7 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~1111~~ (A; B; C) $ABC = x^2$

$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$

5555, 101, 55

$B = \overline{b_1 b_2 b_3}$

$B: 101$

$B = 101$

$C = \overline{c_1 c_2}$

101
202
303

$C: 11 \Rightarrow C = 55 \Rightarrow a = 5$

5 5

$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$

$M = x^2 y^2 - 9xy$

$xy = xy - 3y + 3x - 9$

$k = \frac{x+y+1}{xy}$

$9 = 3(x-y)$
 $3 = x-y$

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

$x^3 - y^3 - 9xy = 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy = 3(x^2 - 2xy + y^2) = 3(x-y)^2 = 3 \cdot 3^2 = 27$

$\alpha = \pi x, \beta = \pi y$

$(x; y): (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$

$\alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2}$

$(\sin \alpha - \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha$

$2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \alpha = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \alpha$

$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \neq 0 \quad \frac{\alpha + \beta}{2} \neq \pm \frac{\pi}{2} + \pi k$



$\sin \alpha \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$-\frac{1}{2} \left(\cos \frac{3\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$

$0 = \cos \frac{3\alpha - \beta}{2}$

$\frac{3\alpha - \beta}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

$\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$

$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$

$\frac{3x - y}{2} = \pm \frac{1}{2} + 2k$

$\frac{x + y}{2} \neq \pm \frac{1}{2} + 2k$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

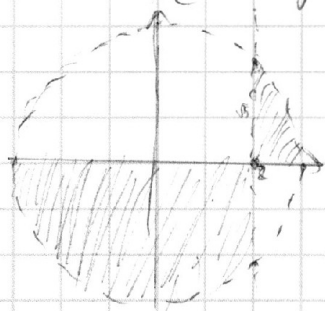
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\varphi(\alpha)$

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases} \quad M_{\max} P$$



$$3\pi + 2\sqrt{5}$$

$$2\sqrt{9} + 2\sqrt{5}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\alpha = 0$$

$$(x-2)y \geq 0$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 2 \\ y \leq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

$$\alpha = \pi$$

$$(x+2)y \geq 0$$

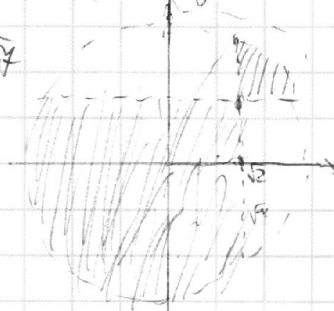
$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$x(y-2) \geq 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$(x-\sqrt{2})(y-\sqrt{2}) \geq 0$$

$$4\sqrt{2}$$



$$2\sqrt{9} + 2\sqrt{5} < 2\sqrt{9} + 2\sqrt{5}$$

$$(x-\sqrt{3})(y-1) \geq 0$$

$$6 + 2\sqrt{5} < 4\sqrt{5}$$

$$3 + \sqrt{5} < 2\sqrt{5}$$

$$9 + 6\sqrt{5} < 28$$

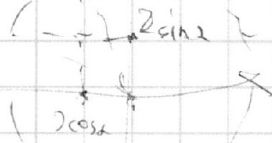
$$6\sqrt{5} < 14$$

$$3\sqrt{5} < 4$$

$$45 < 49$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$2\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha = 2$$



$$2\sqrt{9-4\cos^2 \alpha} + 2\sqrt{9-4\sin^2 \alpha} = M_1$$

$$4\sin^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha = 4$$

$$4\cos^2 \alpha - 4 = -4\sin^2 \alpha$$

$$\sqrt{9-4\sin^2 \alpha} = \sqrt{5+4\cos^2 \alpha}$$

$$t = 4\cos^2 \alpha$$

$$t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$$

$$-t^2 + 4t - 4 = -(t-2)^2$$

$$\sqrt{9-t} = \sqrt{5+t}$$

$$\frac{2t-4}{t-2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\max_x \sqrt{9-t} + \sqrt{5+t} \geq 2\sqrt{(9-t)(5+t)} = 2\sqrt{45+4t-t^2} = 2\sqrt{49-(t-2)^2} \geq 2\sqrt{49} \text{ при } t=2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x+y \neq 4k, \pm 1$
 $3x-y = 4k, \pm 1$
 $y = 3x - 4k, \pm 1$

$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{4} < 2\pi$
 $\arccos \frac{x}{4} \neq \pi$
 $\arccos \frac{y}{4} \neq \pi$
 $x \neq -4$
 $y \neq -9$

$x+3y-4k, \pm 1 \neq 4k, \pm 1$
 $4x = 4k_1 + 4k_2, \pm 1 \pm 1$
 $4x = 4k, \pm 1$

$-1 \leq \cos x \leq 1$
 $0 \leq \arccos x \leq \pi$
 $1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$
 $4 < x \leq 4$
 $-9 < y \leq 9$

$y = 4k, \pm 1 - x$
 $3x = 3x - 4k, \pm 1 + x = 4(x-k), \pm 1$
 $y = 4k, \pm 1 + 3x$
 $4k, \pm 1$
 $-1, 1, 3, 5, 7, 9$

$x: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$
 $3x: -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12$

$9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

$d_n = 2R \sin \frac{\pi}{n}$
 $d_n = 2r \cot \frac{\pi}{n}$
 $R = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$

$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - ab \cos \alpha = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{ab}{2} \cos \frac{\pi}{2}$
 $\frac{(a+b)^2}{2} - \frac{(a-b)^2}{2} = \frac{2a^2 + b^2 - a^2 - 2ab - b^2}{4} = \frac{a^2 - 2ab - b^2}{4}$
 $\sqrt{\frac{4ab}{4}} = \sqrt{ab}$
 $\cos x = \frac{a-b}{(a+b) \sin \frac{\pi}{n}}$
 $\frac{\sqrt{3}}{2} (a+b) \geq \frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}$
 $\frac{a-b}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$
 $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2}$