



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Суть~~ Тогда $m^2 = a \cdot 11 \cdot 7 \cdot 101^2 \cdot 11 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 11 \cdot 7$

(*) $\Rightarrow a : 7$. Но так a - нулевой цифрой, то $a = 7$

Итого получаем:

$$A = 7777,$$

$$B = 707,$$

$$C = 11.$$

Ответ: $(A, B, C) = (7777, 707, 11)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1.

По условию,

A - четырехзнач. число, состоящее из одинаковых цифр.

Значит, A имеет вид: $\overline{aaaa}$ (a - цифра) и

$$A = 1000a + 100a + 10a + a = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101. \quad (1)$$

Пусть $A \cdot B \cdot C = m^2$ (m - натуральное).

$$(1) \Rightarrow m^2 = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C.$$

Согласно основной теореме арифметики, в разложении числа m^2 на простые множители каждая степень имеет четную степень. (*) Значит, 11 и 101 - простые. Значит,

$$\text{необходимо } \begin{cases} BC : 11 \\ BC : 101 \end{cases} \quad (a \neq 11 \text{ и } a \neq 101, \text{ т.к. } a \leq 9 \text{ и } a \neq 0)$$

C - двузначное. Значит, $10 \leq C \leq 99$. При этом $C \neq 0$.

Поскольку $C \neq 101$. ~~Поэтому~~ Значит, $B : 101$.

$$\Rightarrow B = 101k, \text{ где } k \in \{1, 2, \dots, 9\} \text{ т.к. } B \text{ - трехзначное.}$$

По условию, B имеет цифру 7. Значит, $B = 707$.

$$\text{Получим: } m^2 = a \cdot 11 \cdot 7 \cdot 101^2 \cdot C$$

$$\{0, 1, \dots, 9\} \Rightarrow a = 7 \text{ (т.к. } a \text{ - цифра)}$$

$$\text{Значит } a = 7. \text{ Тогда } m^2 = 7^2 \cdot 101^2 \cdot 11 \cdot C.$$

$$(*) \Rightarrow \text{C имеет вид } C : 11. \text{ Т.к. } C \text{ - двузначное и имеет цифру 1. Значит, } C = 11.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$n=2$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}, \text{ где } x, y > 0$$

По условию,

$$\begin{cases} K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+y+3) \frac{(x-4)(y+4) - xy}{xy(x-4)(y+4)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{(x+y+3)(x-y-4)}{xy(x-4)(y+4)} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{(x+y+3)(x-y-4)}{xy(x-4)(y+4)} = 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y-4=0 \\ x-4 \neq 0 \\ y+4 \neq 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y+4 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Получа $\begin{cases} M = (y+4)^3 - y^3 - 12(y+4)y \Rightarrow \begin{cases} M = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} M = 64 \\ y > 0 \end{cases}$$

Значит, $M = 64$ - единственное возможное значение

Ответ: 64.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пара целых чисел (x, y) , удовлетворяющих уравнению и неравенству таково, что

$$\begin{cases} x \in [-7, 6] \\ y \in [-4, 3] \\ y = \pm x + 2m + 1, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Для каждого значения x определим кол-во возможных значений y :

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
кол-во знач. y	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Для каждого $x \in [-7, 6]$ число y — целое из отрез. $[-4, 3]$ и противоположной четности

Получи всего пар: $14 \cdot 4 = 56$

Ответ: 56



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решим (3)

$$\lg\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) = \lg\left(\frac{\pi}{2} - \pi y\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}(y-x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} - \pi y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}(y-x) = \frac{\pi}{2} - \pi y + \pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{2} \begin{cases} y \notin \mathbb{Z} \\ y-x = 1-2y+2l, l \in \mathbb{Z} \\ x \neq y-1-2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y = x+1+2l, l \in \mathbb{Z} \\ y \notin \mathbb{Z} \\ x \neq y-1-2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = x+1+2l, l \in \mathbb{Z} \\ y \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: ~~$(n, n+2m+1), (3y-1-2l, y)$~~

$(n, n+2m+1), n, m \in \mathbb{Z},$

$(3y-1-2l, y), y \notin \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}$

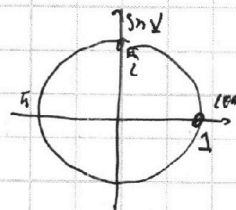
$(x, -x+2k+1), k \in \mathbb{Z}.$

d) $\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos \frac{x}{7} > \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2} (*)$

$\arccos \frac{x}{7} \in [0, \pi],$

$\arcsin \frac{y}{4} \in [-\pi, 0].$

Значит, $(*) \Rightarrow \begin{cases} \arccos \frac{x}{7} \neq 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$



$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{7} \in [-1, 1] \\ \frac{y}{4} \in [-1, 1] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in [-7, 7] \\ y \in [-4, 4] \end{cases}$

Учитывая, что $x, y \in \mathbb{Z}$:

$\begin{cases} x \in [-7, 6] \\ y \in [-4, 3] \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \cdot \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$2 \sin \frac{\pi y - \pi x}{2} \cdot \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} \cdot \sin \pi y = 2 \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} \cdot \cos \frac{\pi y - \pi x}{2} \cdot \cos \pi y$$

$$\left[\cos \left(\frac{\pi}{2} (x+y) \right) = 0 \right.$$

$$\left. \sin \left(\frac{\pi}{2} (y-x) \right) \cdot \sin \pi y = \cos \left(\frac{\pi}{2} (y-x) \right) \cdot \cos \pi y \right.$$

$$\left[\cos \left(\frac{\pi}{2} (x+y) \right) = 0 \right.$$

$$\left. \sin \left(\frac{\pi}{2} (y-x) \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \pi y \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} (y-x) \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \pi y \right) \right.$$

$$\left[\cos \left(\frac{\pi}{2} (x+y) \right) = 0 \right. \quad (1)$$

$$\left. \cos \left(\frac{\pi}{2} - \pi y \right) = 0 \right. \quad (2)$$

$$\left. \cos \left(\frac{\pi}{2} (y-x) \right) = 0 \right.$$

$$\left. \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} (y-x) \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \pi y \right) \right. \quad (3)$$

Решим (1):

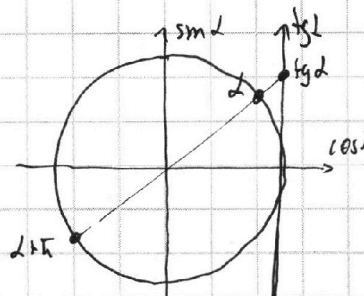
$$\cos \left(\frac{\pi}{2} (x+y) \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} (x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x+y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Решим (2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \pi y \right) = 0 \\ \cos \left(\frac{\pi}{2} (y-x) \right) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - \pi y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} (y-x) = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = n, n \in \mathbb{Z} \\ y-x = 1 + 2m, m \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = n, n \in \mathbb{Z} \\ x = n - 1 - 2m, m \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \frac{x(x-1)}{n(n-1)} = \frac{11 \cdot 12}{14(14-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 11 \cdot 12 = 0 \Leftrightarrow (x-12)(x+11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=12 \\ x=-11 < 0 \text{ не} \end{cases}$$

Получаем: $x=12$.

удовлетворяет
условию

Ответ: 12.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

Пусть M - количество одинадзатиклассников, p_1 и p_2 - вероятности, что Пете и Вась оба попадут на концерт в начале месяца и в конце месяца соответственно.

По условию, $p_2 = 11 \cdot p_1$. (1)

Пусть в конце месяца было выдано x билетов.

Выпишем p_1 :

p_1 равно отношению кол-ва возможных распределений билетов таким, что и Пете, и Вась досталось по билету, к общему количеству возможных распределений билетов между M людьми. Кол-во распределений билетов, учитывая то, что и Пете, и Вась достали билет равно количеству способов распределить 2 билета между $M-2$ людьми.

$$\text{Тогда } p_1 = \frac{C_{M-2}^2}{C_M^4} = \frac{(M-2)!}{2!(M-4)!} \cdot \frac{(M-4)! \cdot 4!}{M!} = \frac{12}{M(M-1)} \quad (2)$$

Аналогично выпишем p_2 :

$$p_2 = \frac{C_{M-2}^{x-2}}{C_M^x} = \frac{(M-2)!}{(x-2)!(M-x)!} \cdot \frac{(M-x)! \cdot x!}{M!} = \frac{x(x-1)}{M(M-1)} \quad (3)$$

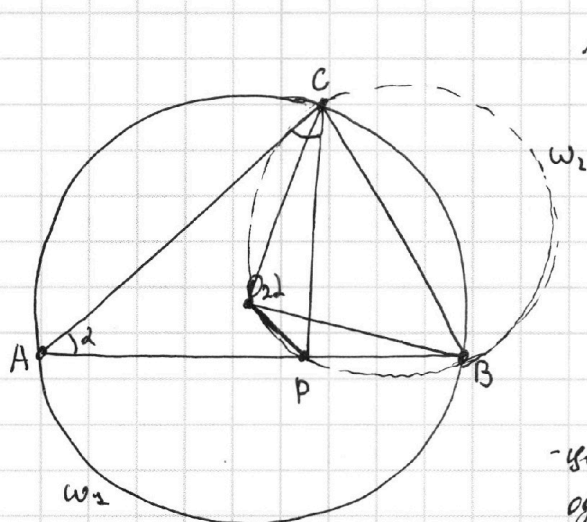


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$n = 5$

$$AP = 16, BP = 8, AC = 22$$

Пусть $\angle CAB = \alpha$.

$\angle CAB$ - вписанный, $\angle CPB$ -

- центральный, опирающийся на одну дугу. Значит, $\angle CPB = 2\angle CAB = 2\alpha$.

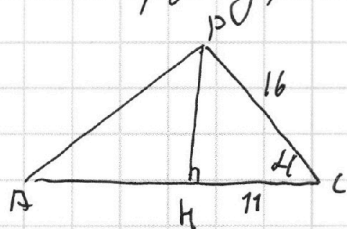
$P \in \omega_2$. Четырёхугольник $CPBV$ - вписанный

в окружность ω_2 . Значит, по свойству, $\angle CPB = \angle COB = 2\alpha$

$\angle CPB$ - вписанный для $\triangle APC$. Значит, $\angle CPB = \angle CAB + \angle ACP$

$$\Rightarrow \angle ACP = \angle CPB - \angle CAB = 2\alpha - \alpha = \alpha$$

По признаку, $\triangle APC$ - равнобедренный. Значит, $PC = AP = 16$



Вспомогательная высота PH в $\triangle APC$. Она

также является медианой. Значит, $HC = 11$. По т. Пифагора, $PH = \sqrt{PC^2 - HC^2} = \sqrt{16^2 - 11^2}$

Из $\triangle PHC$:

$$\sin \alpha = \frac{PH}{PC} = \frac{\sqrt{16^2 - 11^2}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot (16 + 8) \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \\ &= 11 \cdot 24 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{11 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{15}}{2} = \frac{99\sqrt{15}}{2} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{99\sqrt{15}}{2}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6 + \sqrt{35} < 2\sqrt{35 + \frac{1}{2}} \Rightarrow 71 + 12\sqrt{35} < 4(35 + \frac{1}{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 71 + 12\sqrt{35} < 142 \Rightarrow 12\sqrt{35} < 71 \Rightarrow 12^2 \cdot 35 < 71^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 144 \cdot 35 < 71^2 \Rightarrow 5040 < 5041$$

Вывод: минимальное значение $\pm \frac{1}{4\sqrt{2}}$.

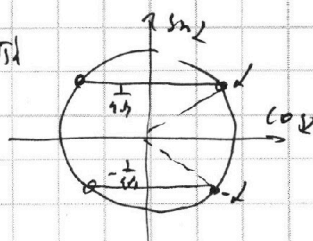
Итого минимальное значение $P(\varphi(z))$ в π достигается, когда

$$\sin(-\alpha) = \pm \frac{1}{4\sqrt{2}} \Rightarrow -\alpha = \pm \arcsin \frac{1}{4\sqrt{2}} + \pi k$$

$$\Rightarrow \alpha = \pm \arcsin \frac{1}{4\sqrt{2}} + \pi k$$

$$\text{мин } P(\varphi(z)) = 2 \cdot 2\sqrt{35 + \frac{1}{2}} + 6\pi =$$

$$= 4\sqrt{\frac{71}{2}} + 6\pi = 2\sqrt{142} + 6\pi$$



Ответ: $2\sqrt{142} + 6\pi$, достигается в точках $z = \pm \arcsin \frac{1}{4\sqrt{2}} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит,

$$\cancel{|Y_1 X_1| + |Y_2 X_2|} \quad |Y_1 X_1| + |Y_2 X_2| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1} \cdot 6 = 6\sqrt{1}$$

Получим образы, $P(\Phi(1)) = 2\sqrt{36-x_0^2} + 2\sqrt{36-y_0^2} + 6\sqrt{1}$,

где $x_0 = 4 \sin(-1)$, $y_0 = 4 \cos(-1)$ ($x_0^2 + y_0^2 = 1$)

Пусть $f(x) = \sqrt{36-16x^2} + \sqrt{36-1+16x^2}$

Найдем максимум этой функции на отрезке $[-1, 1]$

$$f(x) = \sqrt{36-16x^2} + \sqrt{35+16x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-32x}{2\sqrt{36-16x^2}} + \frac{32x}{2\sqrt{35+16x^2}} = \frac{16x}{\sqrt{35+16x^2}} - \frac{16x}{\sqrt{36-16x^2}} =$$

$$= 16x \frac{\sqrt{36-16x^2} - \sqrt{35+16x^2}}{\sqrt{35+16x^2} \cdot \sqrt{36-16x^2}}$$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{36-16x^2} = \sqrt{35+16x^2} \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 36-16x^2 = 35+16x^2 \\ x \in [-1, 1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 = 32x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{cases}$$

Знай, максимум f среди значений:

$$f(-1) = \sqrt{20} + \sqrt{51} = f(1)$$

$$f(0) = 6 + \sqrt{35}$$

$$f\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right) = \sqrt{36-\frac{1}{2}} + \sqrt{35+\frac{1}{2}} = 2\sqrt{35,5} = \sqrt{35+\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{20} + \sqrt{51} < 6 + \sqrt{35} \Rightarrow 71 + 2\sqrt{20} \cdot \sqrt{51} < 71 + 12\sqrt{35} \Rightarrow 20 \cdot 51 < 36 \cdot 35 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 17 < 12 \cdot 7 \Rightarrow 68 < 84$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть прямая $l_1 = l_0$ пересекает окружность $x^2 + y^2 = 36$ в точках X_1 и X_2 (абсциссы точек X_1 и X_2 равны), пусть прямая $y = y_0$ пересекает окр. $x^2 + y^2 = 36$ в т. Y_1, Y_2 , (абсциссы т. Y_1 и Y_2 равны).

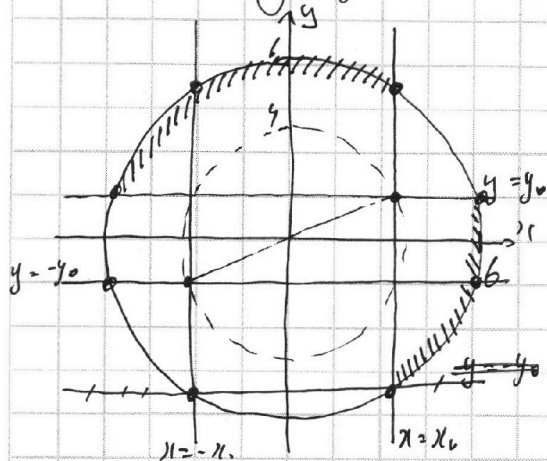
Тогда периметр $P(l)$ равен $|X_1 X_2| + |Y_1 Y_2| + |Y_1 X_1| + |Y_2 X_2|$

$$|X_1 X_2| = \sqrt{(x_0 - x_0)^2 + (\sqrt{36 - x_0^2} + \sqrt{36 - x_0^2})^2} = \sqrt{(x_0 - x_0)^2 + 2}$$

$$= 2 \sqrt{0 + (\sqrt{36 - x_0^2})^2} = 2 \sqrt{36 - x_0^2}$$

$$|Y_1 Y_2| = 2 \sqrt{36 - y_0^2}$$

Заметим, что суммы длин дуг $Y_1 X_1$ и $Y_2 X_2$ составляют ровно половину длины окружности, задаваемой уравн.-ом $x^2 + y^2 = 36$.



П.п. если провести прямые $x = -x_0$ и $y = y_0$, то они, вместе с прямыми $x = x_0$ и $y = y_0$ разобьют окружность $x^2 + y^2 = 36$ на пару равных дуг. И из каждой пары ровно одна входит в границу $P(l)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N \neq 6.$$

$$\begin{cases} (x + 4 \sin 2)(y - 4 \cos 2) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} (x - 4 \sin(-2))(y - 4 \cos(-2)) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 36 & (2) \end{cases}$$

(2): уравнение задает круг с центром в т. (0,0) и радиусом 6.

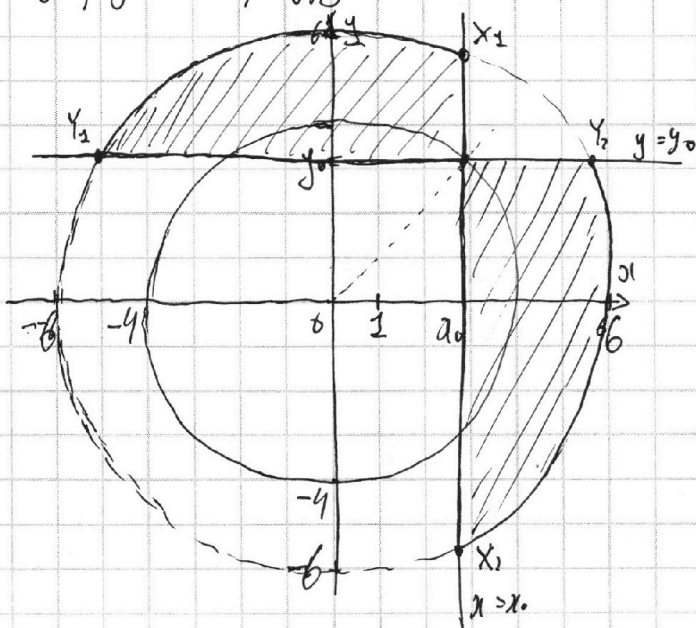
(1): найти $x_0 = 4 \sin(-2)$, $y_0 = 4 \cos(-2)$.

$$x_0^2 + y_0^2 = 16 \sin^2(-2) + 16 \cos^2(-2) = 16.$$

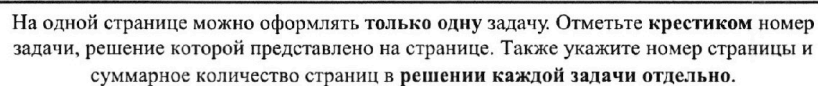
(1) задает область пространства, ограниченную прямой $x = x_0$, $y = y_0$,

прямой (x_0, y_0) — точка на окружности с центром в т. (0,0), радиусом 4.

Изобразим фигуру $\Phi(2)$ на плоскости:



($\Phi(2)$ заштрихована)

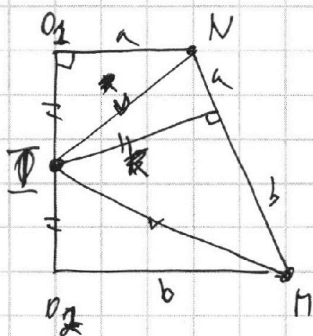


СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пути г. 0 - центр шара Ω

П.п. он находит ~~из~~ ребер прав. уст. пирамиды,
то ~~с~~ проектирует в центр вращения окр. конуса
ея грани. Беловая грань гранкой уст. пирамиды
- равнобедр. трапеции. I - центр ω .



Центр или ось пирамиды.

Angle: 60°



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

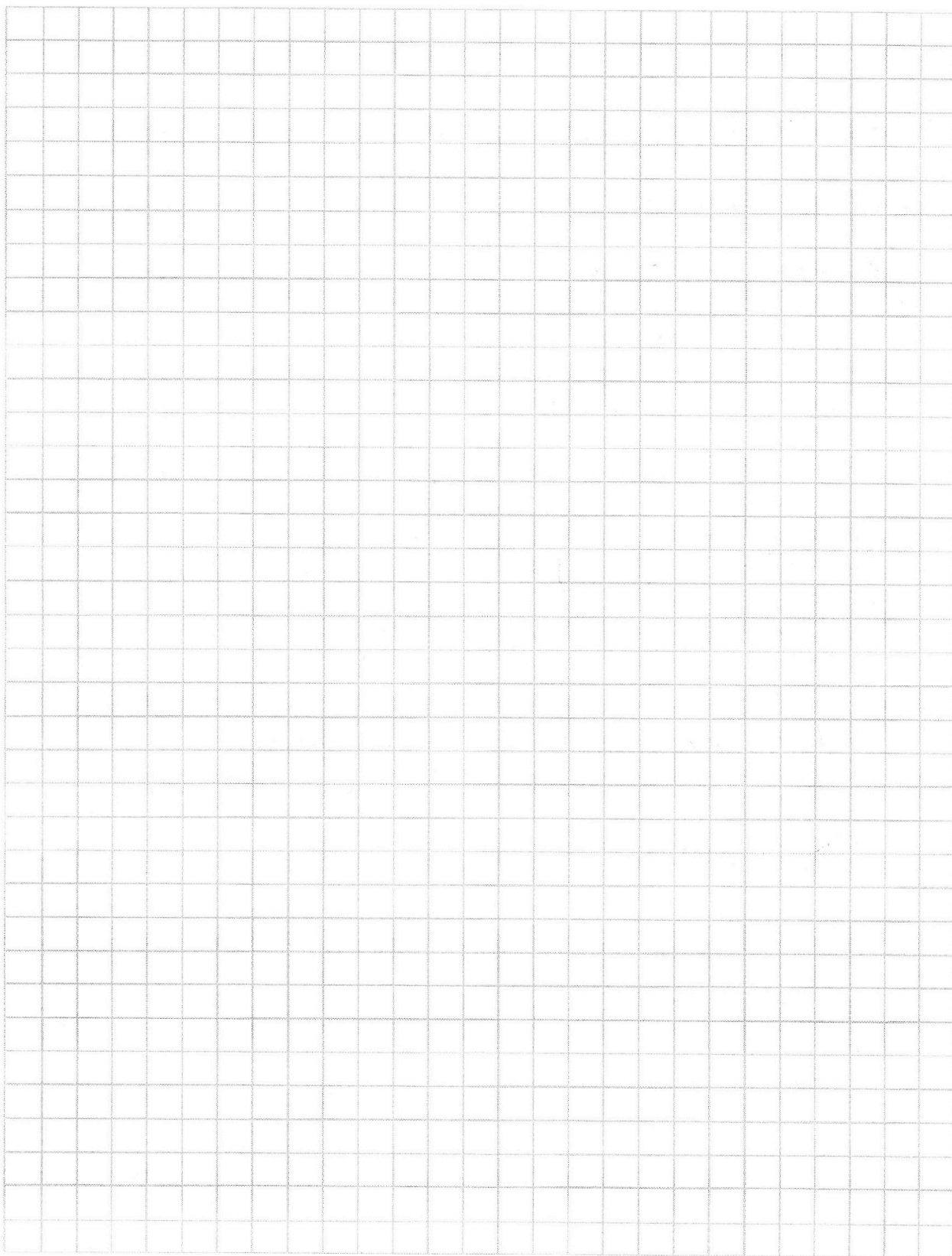
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



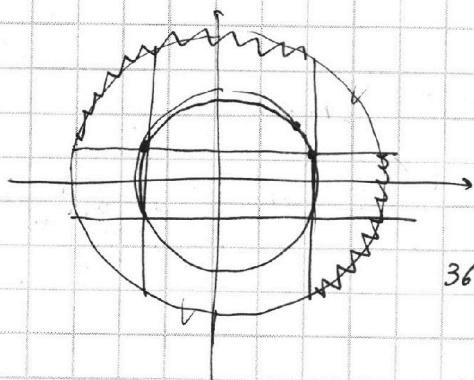


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$36 - \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$36 \quad 21^2 = \frac{1}{32}$$

$$x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{36-16n^2}}{\sqrt{35+16n^2}} + \frac{\sqrt{36-16n^2}}{\sqrt{35+16n^2}} = \sqrt{36-16n^2}$$

$$\sqrt{36-16n^2} = \sqrt{35+16n^2} \quad -7$$

$$36-16n^2 = 35+16n^2 \quad y = 7+102$$

$$1 = 16n^2$$

$$-7$$

$$-7$$

$$\sqrt{51} + \sqrt{50} < 6 + \sqrt{35}$$

$$71 + 2\sqrt{51 \cdot 20} \quad 36 + 35 + 12\sqrt{35}$$

$$\sqrt{51 \cdot 20}$$

$$6\sqrt{35}$$

$$51 \cdot 20 = 1020$$

$$36 \cdot 35 = 1260$$

$$51 = 3 \cdot 17$$

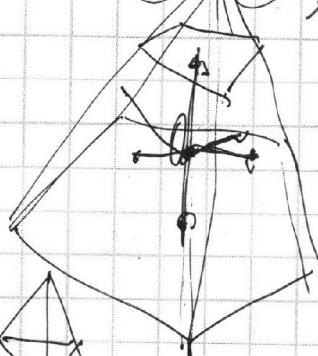
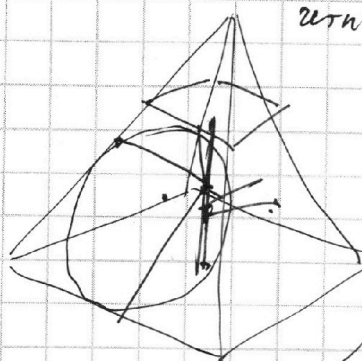
$$\sqrt{17 \cdot 4}$$

$$12 \cdot 7$$

$$84$$

$$(-4) - 3 - 2 - 1 - 0 \quad 2$$

2171



$$71 + 12\sqrt{35}$$

$$4 \cdot (35 + \frac{1}{2})$$

$$71 + 12\sqrt{35}$$

$$140 + 2$$

$$12\sqrt{35}$$

$$71$$

$$12^2$$

$$147 - 7$$

$$71$$

$$144 \cdot 35$$

$$144$$

$$997$$

$$720$$

$$432$$

$$5040$$

$$\begin{array}{r} 71 \\ 21 \\ \hline 92 \\ 21 \\ \hline 113 \\ 21 \\ \hline 134 \\ 21 \\ \hline 155 \\ 21 \\ \hline 176 \\ 21 \\ \hline 197 \\ 21 \\ \hline 218 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1	+	+	$1000a + 100a + \dots$
2	+	+	$x \rightarrow x-4, y \rightarrow y+4$ Tip: Dost. mmo. m
3	+	+	Решить sin tg, перенести tg в - tg
4	+	+	$p(A), p(B)$
5	+	+	где sin?...
6	+	+	(2) our obsh. m m
7			easy

$\sim 2 \quad x, y > 0$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{3x+y}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\begin{aligned} (x+y+3) &\neq 0 \\ xy &= xy + 4x - 4y - 16 \\ 0 &= x - y - 4 \end{aligned}$$

$$\frac{(x+y+3)(xy - 4y + 4x - 16 + 4x)}{xy(x-4)(y+4)} = 0 \Rightarrow \frac{(x+y+3)(x-4)(y+4)}{xy(x-4)(y+4)} = 0$$

$$x, y \neq 0, \quad x \neq 4,$$

$$x = -y - 3$$

$$x = 2y$$

$$x = -y - 3$$

$$-y^3 + 3$$

$$-y^3 - 9y^2 - 22y - 27 = -y^3 + 12y^2 + 36y$$

$$(-2y^3 + 3y^2 + 9y - 27) \cdot (-6y^2 + 6y + 9) = -3(2y^2 - 2y - 3)$$

$$-3 \cdot 2(y - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})(y + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$x = y + 4$$

$$y^3 + 12y^2 + 36y + 16 = -y^3 - 12y^2 - 36y =$$

$$= 12y + 16$$

$$(16, +\infty)$$

$$\frac{1}{-3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{3}{5}$$

$$11^2 + 8 \cdot 15$$

$$121 + 120$$

$$241$$

$$(y+3)^3 = y^3 + 9y^2 + 27y + 27$$

$$1000a + 100a + 10a + a$$

$$100b_2 + 10b_2 + b_0$$

$$10c_2 + c_0$$

$$1111 \cdot 711 \cdot 11$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$$A = a \cdot 11 \cdot 101$$

$$B \in : 11, 101$$

$$B : 101$$

$$-(y+3)^3 - y^3 + 12y(y+3) =$$

$$12(y+3)y = 1$$

$$C = 11, \quad B = 7 \cdot 101$$

$$A = 7 \cdot 11 \cdot 101$$

$$12y(y+3) = 12y^2 + 36y$$

$$(x+3)^3 =$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$y^3 + 3y^2 \cdot 4 + 3y \cdot 4^2$$

$$2 \cdot 11 = 22$$

$$4^3 = 64$$

$$121 + 120$$

$$241$$

$$11^2 + 8 \cdot 15$$

$$121 + 120$$

$$241$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2}, \quad \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin \pi y - \sin \pi x = 2 \sin \frac{\pi}{2} (y-x) \cdot \cos \frac{\pi}{2} (x+y)$$

$$\cos \pi y + \cos \pi x = 2 \cos \frac{\pi}{2} (x+y) \cdot \cos \frac{\pi}{2} (y-x)$$

$$\cos \frac{\pi}{2} (x+y) \left(\sin \frac{\pi}{2} (y-x) \cdot \sin \pi x - \right.$$

$$\left. \cos \frac{\pi}{2} (x+y) \right) \cdot \cos \frac{\pi}{2} (y-x) \cdot \sin \pi y = \cos \frac{\pi}{2} (x+y) \cdot \cos \frac{\pi}{2} (y-x) \cdot \cos \pi y$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} (x+y) = 0 \\ \cos \pi y = 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} (y-x) = 0 \end{cases}$$

$$\tan \pi y = \tan \frac{\pi}{2} (y-x) = 1$$

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} - \pi y \right) = \tan \frac{\pi}{2} (y-x)$$

$$\frac{\pi}{2} - \pi y = \frac{\pi}{2} y - \frac{\pi}{2} x + \pi k$$

$$\pi - 2\pi y = \pi y - \pi x + 2\pi k$$

$$\pi + \pi x - \pi y = \pi y - \pi x + 2\pi k \quad 1-2y = y-x+2k$$

$$3\pi y = \pi x + 2\pi k$$

$$3y = x + 2k$$

$$y = \frac{x}{3} + \frac{2k}{3}$$

$$\arccos \frac{x}{3} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{3} > \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2} \quad \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \quad \alpha \in [-\pi, 0]$$

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{3} \neq 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{3} \neq 1$$

$$\frac{x}{3} \in [-1, 1)$$

$$\frac{y}{4} \in [-1, 1)$$

$$\begin{cases} x \in [-3, 0] \\ y \in [-4, 3] \end{cases} \quad \begin{matrix} -2/-6/-5 \\ 1/-4/-3/-2 \\ 1/-1 \end{matrix}$$

