



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \overline{b_1 b_2 b_3}, b_1, b_2 \text{ или } b_3 = 7$$

$$C = \overline{c_1 c_2}, c_1 \text{ или } c_2 = 1$$

$$ABC = n^2$$

П.к. $A, BC = n^2$, то каждый простой м.к.-м числа A делится вступать 2 раза.

$$A = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a = 11 \cdot 101a \Rightarrow \text{в числе } B, C \text{ должны встречаться } 11, 101.$$

П.к. C - двузначное, то число B делится на 101. Этого м.к.-м числа B может быть от 1 до 9 включ., не при этом хотя бы одна цифра 7, то это может быть только число 707.

Число C делится на 11, при этом хотя бы одна цифра 1 $\Rightarrow C = 11$.

$$B = 7 \cdot 101$$

$$C = 11$$

$$A = 11 \cdot 101 \cdot a = 7a = 7$$

Ответ:

$$A = 7777$$

$$B = 707$$

$$C = 11$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{(x-4)} + \frac{1}{(y+4)} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

не изменяется $\Rightarrow x$ и y просто меняются местами.

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = ?$$

$$x, y > 0$$

$$y=2, x=6$$

$$K = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{3}{2 \cdot 6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$$

$$y+4=x$$

$$x-4=y$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (y+4)^3 - y^3 - 12y(y+4) = (y+4-y)((y+4)^2 + y(y+4) + y^2) - 12y(y+4)$$

$$= 4y(y+4) = 4((y+4)^2 - 2y(y+4) + y^2) = 4((y+4-y)^2) = 4 \cdot 16 = 64$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x-4+y+4}{y(y+4)} + \frac{3((x-4)(y+4)-xy)}{xy(x-4)(y+4)} = 0$$

$$x(x-4)(y+4) + y(x-4)(y+4) + 3(x-4)(y+4) = (x-4)xy + (y+4)xy + 3xy$$

Ответ: $M=64$

$$\frac{4(y(y+4)^2 + x(x-4) + 3(xy^{44}x-4y-16xy))}{xy(x-4)(y+4)} = 0$$

$$\frac{4(x^2-4x-4y^2+4y) + 3(2xy^{44}x-4y-16xy)}{xy(x-4)(y+4)} = 0$$

$$4y^2 + 16y + 4x^2 - 16x + 12x - 12y - 16 = 0$$

$$4y^2 + 4y + 4x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$2y^2 + y^2 + 4y + 1 + 4x^2 - 4x = 1 - 16 = 0$$

$$(2y+1)^2 + (2x-1)^2$$

$$4x^2 - 16x - 4y^2 - 16y + 12x - 12y - 16 = 0$$

$$4x^2 - 4x - 4y^2 - 28y - 16 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

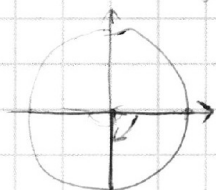
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

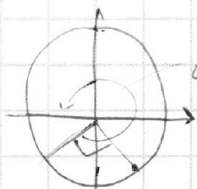
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$y = -4:$ $\Rightarrow \frac{2\pi}{7}$ перв. $\arcsin \frac{4}{7} - \arccos \frac{2}{7} < \frac{\pi}{2}$



$x = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7 - 8 \text{ пер.}$

$y = -3:$



Все x не подходят
 $x = \pm 2, 0, \pm 4, \pm 6 - 7 \text{ пер.}$
Все, что удовлетв. нерав

$y = -2:$

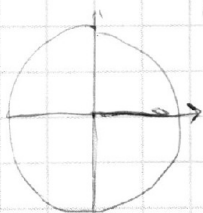
$x = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7 - 8 \text{ пер.}$

$y = -1:$

7 пер.

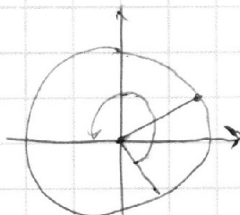
$y = 0:$

8 пер.



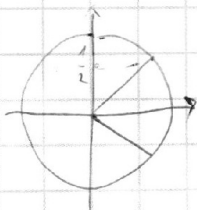
$y = 1:$

7 пер.



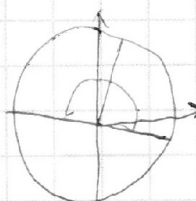
$y = 2:$

8 пер.

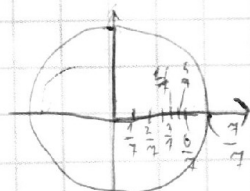


$y = 3:$

7 пер.



$y = 4:$



$x = 7$ не подходит, тогда
 $\arcsin 1 - \arccos 1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 7 \text{ пер.}$
Ответ: 67 пер.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

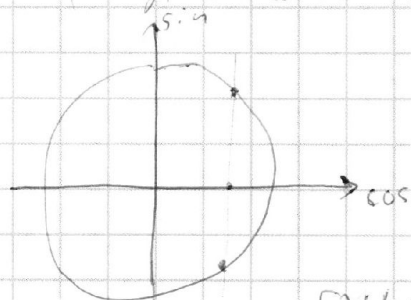
$$\cos 2\pi y + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$\cos(2\pi y) + \cos(\pi(x-y)) = 0$$

$$\cos(2\pi y) = -\cos(\pi(x-y))$$

$$\cos(2\pi y) = \cos(\pi - \pi(x-y))$$

$$\cos(2\pi y) = \cos(\pi(1-x+y))$$



$$\begin{aligned} 2\pi y &= \pi(1-x+y) + 2\pi k_1, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\ 2\pi y + 2\pi n_1 &= -\pi(1-x+y) + 2\pi n_2, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2y + 2k_1 = 1 - x + y + 2k_2 \\ 2y + 2n_1 = -1 + x - y + 2n_2 \end{cases}$$

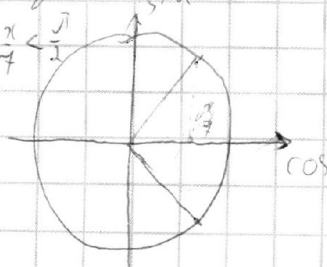
$$\begin{cases} x + y - 1 = 2(k_2 - k_1) \\ 3y - x + 1 = 2(n_2 - n_1) \end{cases}, \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x + y - 1 = 2k \\ 3y - x + 1 = 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2k + 1 \quad (1) \\ 3y - x = 2n - 1 \quad (2) \end{cases}$$

1) x - целым, y - не целым или наоборот
и можно считать $\arcsin \frac{y}{1} - \arccos \frac{x}{1} < \frac{\pi}{2}$

$$b) \arccos \frac{x}{1} - \arcsin \frac{y}{1} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \arccos \in [0, \pi] \quad -1 \leq \frac{x}{1} \leq 1 &\Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ \arcsin \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad -1 \leq \frac{y}{1} \leq 1 &\Rightarrow -1 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 41

В начале: 4 билета П и 3

В конце: $n > 4$ билетов

$$P_{n,m} = \frac{P_{k,m}}{1!}$$

Пусть число сформированных билетов m .

Кратность куплено в начале месяца:

О О О О

П П $m-2$ $m-3$ $m-4$

Число комбинаций билетов, которые пойдут на праздничный концерт в этот мес.

$$\frac{(m-2)(m-3)}{2}$$

Число билетов всего:

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}$$

$$P_{n,m} = \frac{(m-2)(m-3) \cdot 2 \cdot 12}{2m(m-1)(m-2)(m-3)} = \frac{12}{m(m-1)}$$

В конце месяца

Число комбинаций билетов, где есть П и Т.

О О О О О О

П П $m-2$ $m-3$ $m-4$ $m-5$

$$m - (n-2+1) = m-n+1$$

$$\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{(n-2)!}$$

$$\frac{2 \cdot 3}{6 \cdot 9} = \frac{2}{9}$$

Число комб. комб.

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{n!}$$

$$P_{n,m} = \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{(n-2)!} \cdot \frac{n!}{m(m-1)(m-2)(m-3)}$$

$$= \frac{n(n-1)}{m(m-1)}$$

$$\frac{11 \cdot 12}{m(m-1)} = \frac{n(n-1)}{m(m-1)}$$

$$n^2 - n - 132 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 132 = 529 = 23^2$$

$$n = \frac{1 \pm 23}{2} \quad [n = 12, n = -11 \text{ не подходит}]$$

Ответ:
 $n = 12$

$$11 \cdot 12 = n(n-1)$$

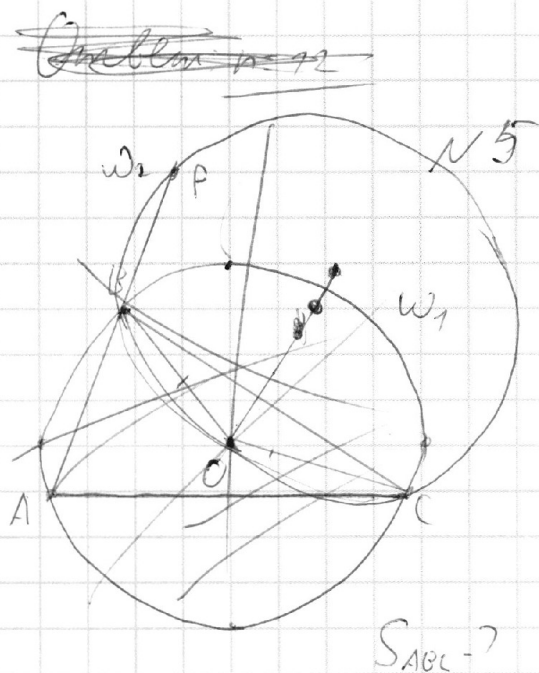


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

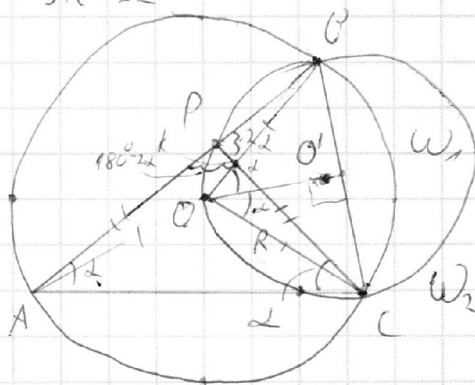
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AP = 16
 BP = 8
 AC = 22



Из сим. $\triangle ABC$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$$

Проведем PC

BC - секущая для $\angle BPC, \angle BOC$

$$\angle BOC = 2\angle BAC (\text{центральный}) = 2\alpha$$

$$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cos \alpha$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos \alpha$$

$$BC^2 = PB^2 + PC^2 - 2 \cdot PB \cdot PC \cos 2\alpha$$

$$PC^2 = 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cos \alpha$$

$$24^2 + 22^2 - 2 \cdot 24 \cdot 22 \cos \alpha =$$

$$= 8^2 + PC^2 - 2 \cdot 8 \cdot PC \cos 2\alpha$$

$$24^2 + 22^2 - 2 \cdot 24 \cdot 22 \cos \alpha = 8^2 + 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cos \alpha - 16 \cdot PC \cos 2\alpha$$

$$16 \cdot PC \cos 2\alpha = 2 \cdot 22 \cdot 8 \cos \alpha + 8^2 - 8 \cdot 40$$

$$\frac{PB}{R} =$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha/2)} = \frac{BC}{\sin \alpha}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle PCA = \angle BCE - \angle PAC = \alpha \Rightarrow AP:PC = 16$$

~~AP:PC = 16~~

$$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot PC \cdot \cos \alpha$$

$$AC = 2AP \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AC}{2AP} = \frac{22}{2 \cdot 16} = \frac{22}{32} = \frac{11}{16}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{121}{256}} = \sqrt{\frac{135}{256}} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{24 \cdot 22 \cdot 3\sqrt{15}}{2 \cdot 16} = \frac{3}{4} \cdot 22 \cdot 3\sqrt{15}$$

$$\frac{99\sqrt{15}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

$$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

• центр радиус 6 в начале координат.

$$(x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leq 0$$

$$\begin{cases} x + 4\sin\alpha \geq 0 \\ y - 4\cos\alpha \leq 0 \end{cases}$$

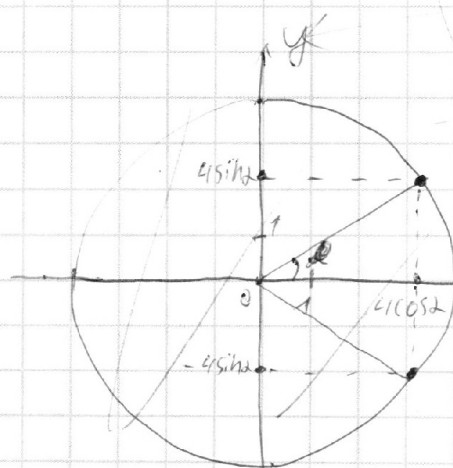
$$\begin{cases} x + 4\sin\alpha \leq 0 \\ y - 4\cos\alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4\sin\alpha \\ y \leq 4\cos\alpha \end{cases} \quad (1) \rightarrow x^2 + y^2 = 16\sin^2\alpha + 16\cos^2\alpha = 16$$

когда
голова равна

$$\begin{cases} x \leq -4\sin\alpha \\ y \geq 4\cos\alpha \end{cases} \quad (2) - \text{для } \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

то решение



$$OA = \sqrt{36 - 16\sin^2\alpha}$$

$$OB = \sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}$$

$$M = 2(OA + OB) + \arcsin \arcsin\left(\frac{OB}{6}\right) \arcsin\left(\frac{4\cos\alpha}{6}\right) \cdot 6 + \arcsin\left(\frac{4\cos\alpha}{6}\right) \cdot 6 + \frac{\pi \cdot 6}{2} +$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а) $\vec{OF} = \vec{OD}$, $\vec{OG} = \vec{AM} \Rightarrow$ «шарик», «кривая»,
огранич. окр. границей равен $\pi r = 6\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow M = \max$, когда $OA + OB$ макс.

$$Q = OA + OB = \sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} + \sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}$$

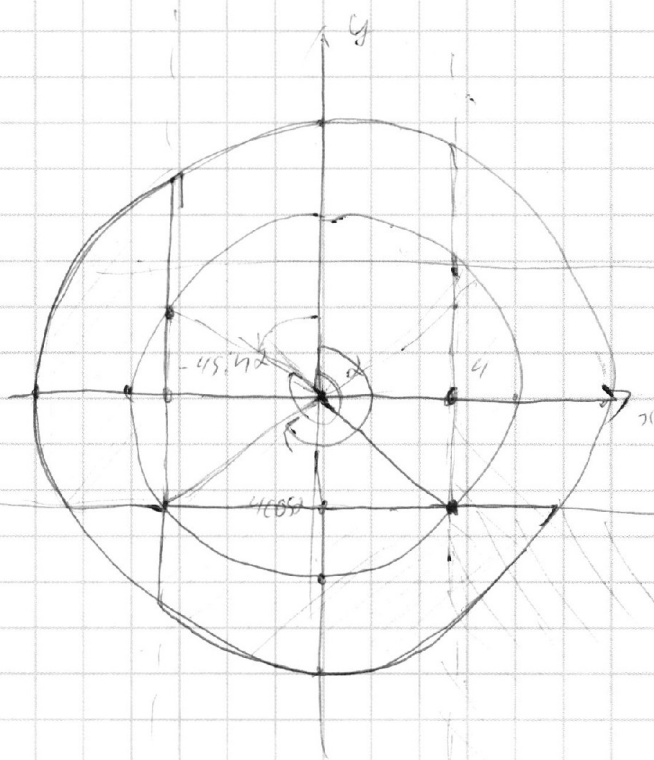
$$Q'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{-32\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha}} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{+32\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}} = 0$$

$$\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} = \sqrt{36 - 16\cos^2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\cos\alpha, \text{ тогда } |\sin\alpha| = |\cos\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2} = \cos^2\alpha \Rightarrow M_{\max} = 2(\sqrt{36 - 8} + \sqrt{36 - 8}) + 6\pi =$$

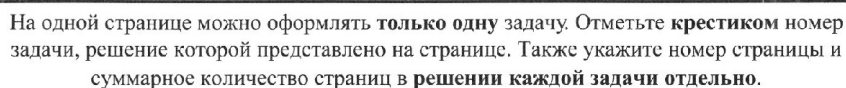
$$= 4\sqrt{28} + 6\pi = 8\sqrt{7} + 6\pi$$

В задаче различны зис.д:



Известно, что $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ принимают значения $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ тогда, когда α попадает в I или III квадранты, т.е. $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Известно, что $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$



СТРАНИЦА

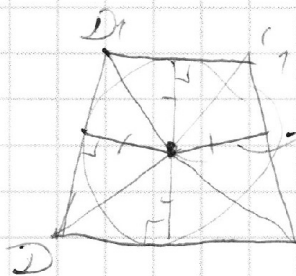
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Центры обоих шаров находятся на оси пирамиды. Один шар касается всех ребер, другой - всех углов, т. е. пирамиды и вписан, второй.



$$O_1 O_2 h = \frac{2 \cos \theta}{2} + (-2r)$$

Транецы DD_1C_1C



$\Rightarrow$ цепь находится
 в одной плоскости
 с цепью W,
 параллельной
 основанию