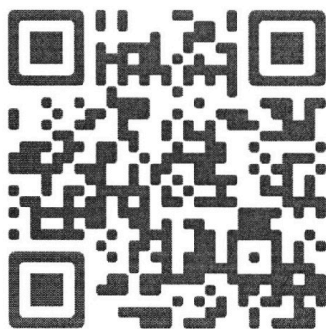




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

р1

$A: 1111$

$$A = \overline{aaaa}; \quad 1111 = 11 \cdot 101$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 11 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$A = a \cdot 11 \cdot 101; \quad a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$B = \overline{7bc} \text{ или } B = \overline{b7c} \text{ или } B = \overline{bc7}$$

$$C = \overline{1d} \text{ или } C = \overline{d1}$$

$$A \cdot B \cdot C = n^2$$

$$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = n^2 \Rightarrow B: 101 \text{ тк } C\text{-двузнач.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 707$$

$$a \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot 7 \cdot C = n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C: 11 \Rightarrow C = 11$$

$$a \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7 = n^2 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow A = 7777$$

Существует единственная тройка $(A; B; C):$
 $(7777; 707; 11)$

Ответ: $(7777; 707; 11)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

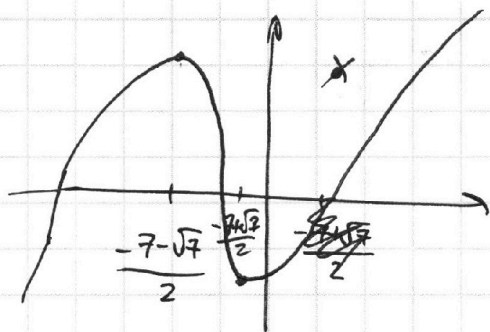
1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M(x) = 2x^3 + 21x^2 + 63x + 27$$

$M(x)$ качественно выглядит так:



$$\text{НО } x \neq 0; y \neq 0; x \neq 4; y \neq -4$$

$$x \neq 0; x \neq -3; x \neq 4; x \neq 1$$

$$M \neq 27; M \neq -27; M \neq 743; M \neq 113$$

$$M(-3) = -54 + 189 - 189 + 27 = -27$$

$$M(4) = 128 + 336 + 252 + 27 = 743$$

380 407

$$M(1) = 2 + 21 + 63 + 27 = 113$$

23 90

$$\text{Есть } y = x - 4$$

$$M(x) = x^3 - (x-4)^3 - 12x(x-4) = x^3 - (x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 4 + 3 \cdot x \cdot 16 - 64) - 12x^2 + 48x$$

$$= x^3 - x^3 + 12x^2 - 48x + 64 - 12x^2 + 48x = 64$$

$$\text{T.e. } M \in \mathbb{R} \setminus \{27; -27; 743; 113\}$$

$$\text{Ответ: } M \in \mathbb{R} \setminus \{27; -27; 743; 113\}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+x+3}{(y+4)(x-4)}$$

$$x \neq 0; y \neq 0; y \neq -4; x \neq 4$$

$$\cancel{y+x+3=0}$$

$$\frac{(y+x+3)(y \cancel{x} + 4x - 4y - 16 - \cancel{xy})}{xy(y+4)(x-4)} = 0$$

$$\frac{4(y+x+3)(x-y-4)}{xy(y+4)(x-4)} = 0$$

$$y+x+3=0$$

или

$$x-y-4=0$$

Если $y = -x-3$:

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = x^3 + (x+3)^3 + 12x(x+3) = x^3 + x^3 + \underline{3 \cdot 3 \cdot x^2} + \underline{3 \cdot 9 \cdot x} + 27 + \underline{12x^2} + \underline{36x} = 2x^3 + 21x^2 + 63x + 27$$

$$M' = 6x^2 + 42x + 63 = 3(2x^2 + 14x + 21)$$

$$D = 14^2 - 4 \cdot 2 \cdot 21 = 196 - 168 = 28$$

$$x_{1,2} = \frac{-14 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{7}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Подходят все пары действ. чисел, в которых
 $x \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} y = -x + 1 + 2k \\ y = \frac{x}{3} + \frac{1+2k}{3} \end{cases}$

Ответ: все пары $(x; -x + 1 + 2k); (x; \frac{x}{3} + \frac{1+2k}{3}); x \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{Z}$.

8) $\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$; ОДЗ ~~неравенства~~ $\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{7} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases}$

$$\arccos \in [0; \pi]; \arcsin \frac{y}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\arccos a - \arcsin b \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}] \text{ на ОДЗ.}$$

т.е. единственный случай невыполнения неравенства

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \approx -\frac{\pi}{2}$$

а точнее:

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{7} = 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{7} = 1 \\ \frac{y}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

т.е. подходят все точки-решения в целых числах из п.а, у которых

$x \in [-7; 7]; y \in [-4; 4]$ и не подходит точка $(7; 4)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

23

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$2 \sin \frac{\pi y - \pi x}{2} \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} \sin \pi y = 2 \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} \cos \frac{\pi y - \pi x}{2} \cos \pi y$$

$$\cancel{\cos \frac{\pi y + \pi x}{2}} \cancel{\sin \pi y} \cos \frac{\pi y - \pi x}{2} = \cancel{\cos \frac{\pi y + \pi x}{2}} \cancel{\cos \pi y} \cos \frac{\pi y - \pi x}{2}$$

$$\cos \frac{\pi y + \pi x}{2} \left(\cos \pi y \cos \frac{\pi y - \pi x}{2} - \sin \pi y \sin \frac{\pi y - \pi x}{2} \right) = 0$$

$$\cos \frac{\pi y + \pi x}{2} \cdot \cos \left(\pi y + \frac{\pi y - \pi x}{2} \right) = 0$$

$$\cos \frac{\pi y + \pi x}{2} \cos \left(\frac{3\pi y - \pi x}{2} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} = 0 \\ \cos \frac{3\pi y - \pi x}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi y + \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + x = 1 + 2k; k \in \mathbb{Z} \\ 3y - x = 1 + 2k; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 1 + 2k; k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{x}{3} + \frac{1 + 2k}{3}; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



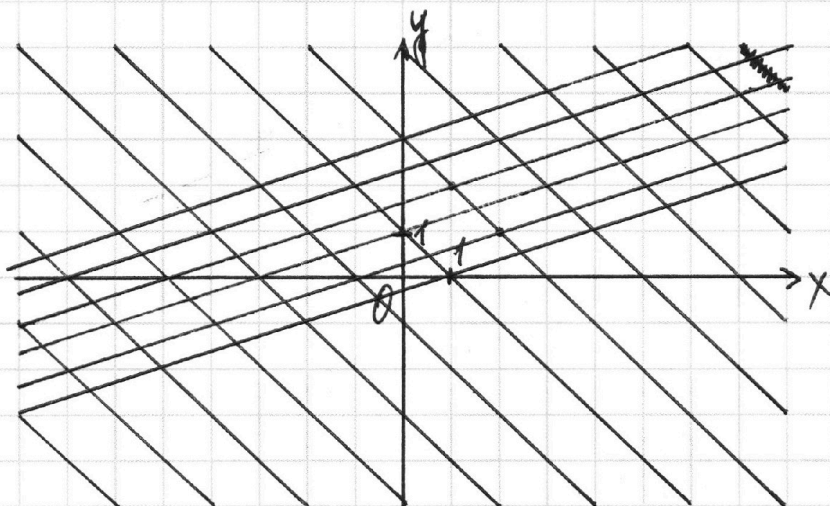
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

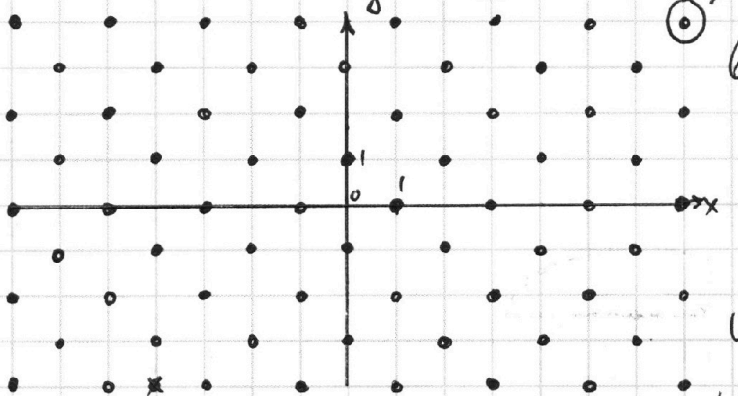
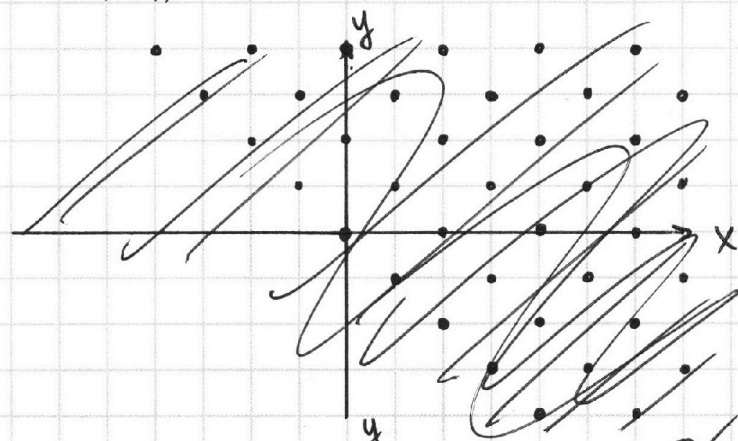
СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Графически решение н.а. выглядит так:



В целых числах:



подходит 67 точек.

не подходит
68 точек удовлетворяет
~~неравенству~~
013, одна точка
не удовлетворяет
неравенству, т.е.

Ответ: 67 пар



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$\text{Шанс в начале} - \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1}$$

$$\text{Шанс в конце} - \frac{x}{N} \cdot \frac{(x-1)}{N-1}$$

$$\frac{x \cdot (x-1)}{12} = 11$$

$$x^2 - x = 132$$

$$x^2 - x - 132 = 0$$

~~Дискриминант~~

$$D = 1 + 4 \cdot 132 = 529 = 23^2$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 23}{2}$$

$$x_1 = 12; x_2 = -11.$$

$$x > 0 \Rightarrow x = 12$$

Ответ: в конце месяца было выделено 12 билетов.

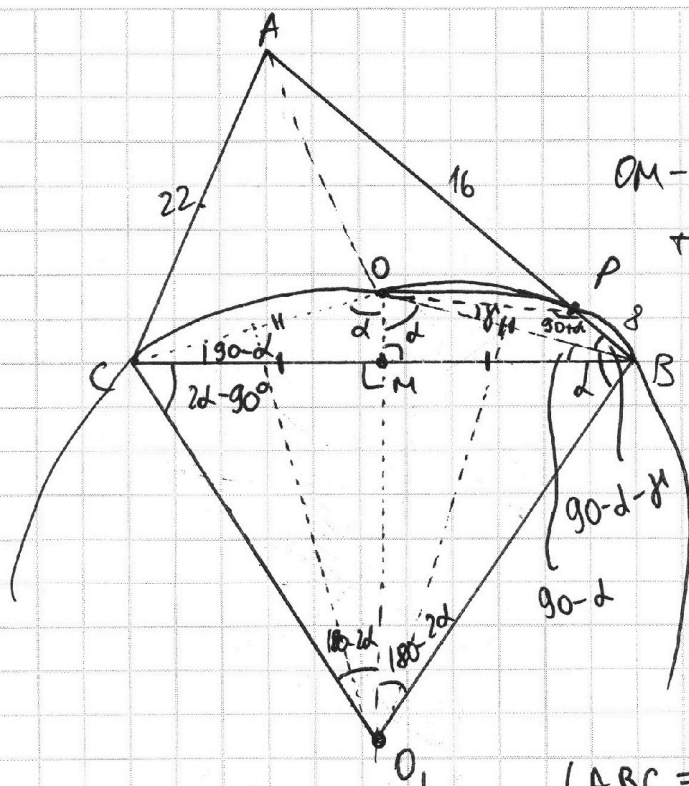


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



OM - высота и медиана

та COR - p/5

O, M, O₁ лежат на одной
прямой

COB - вписанный

$\angle OPB = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$

$\angle ABC = 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 2\alpha - \beta$

$$\frac{BC}{\sin 2\alpha} = 2R_1$$

$$\frac{R}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R_1$$

$$\frac{22}{\sin(180^\circ - 2\alpha - \beta)} = 2R ; \frac{22}{\sin(2\alpha + \beta)} = 2R$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 36 \\ (x + 4 \sin d)(y - 4 \cos d) \leq 0 \end{cases}$$

Первое уравнение соответствует всем точкам внутри и на границе окружности с радиусом 6 и с центром в $(0; 0)$

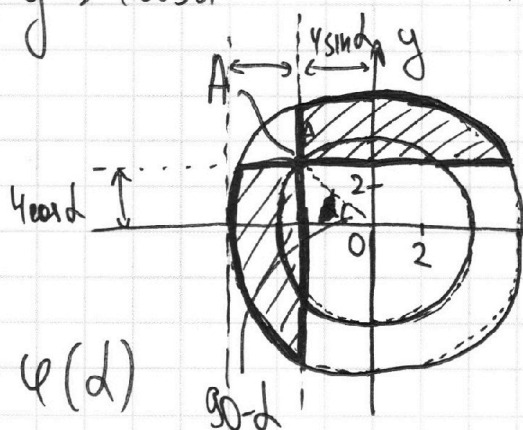
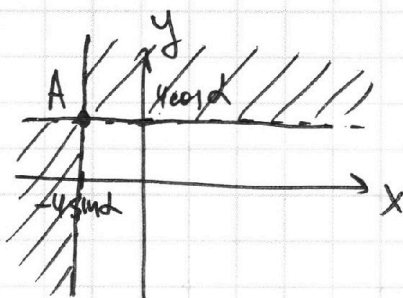
Рассмотрим второе ур-е:

$$(x + 4 \sin d)(y - 4 \cos d) \leq 0$$

$$\begin{cases} x + 4 \sin d \geq 0 \\ y - 4 \cos d \geq 0 \\ x + 4 \sin d \leq 0 \\ y - 4 \cos d \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4 \sin d \\ y \geq 4 \cos d \\ x \leq -4 \sin d \\ y \geq 4 \cos d \end{cases}$$

$\Rightarrow$



точка A удовлетворяет условию

$$\begin{cases} x_A = -4 \sin d \\ y_A = 4 \cos d \end{cases}$$

$$x_A^2 + y_A^2 = 16$$

т.е. лежит на окружности с радиусом 4 с центром в $(0; 0)$

/// - $\varphi(d)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \rho_{\max}(\varphi(\alpha)) &= 6\pi + 2\sqrt{36 - 16 \cdot \frac{1}{2}} + 2\sqrt{36 - 16 \cdot \frac{1}{2}} = \\ &= 6\pi + 4\sqrt{28} = 6\pi + 8\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}, \text{ так как картинка симметрична относительно оси и центра.}$$

$$\text{Ответ: } \rho_{\max} = 6\pi + 8\sqrt{7}; \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}.$$

$$g \cos^2 \alpha = g \sin^2 \alpha' \\ \sin \alpha = \cos \alpha = 1, \alpha = \frac{\pi}{4}$$



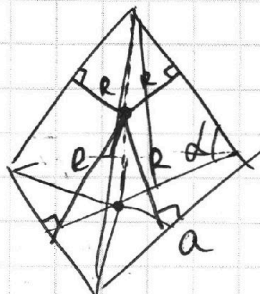
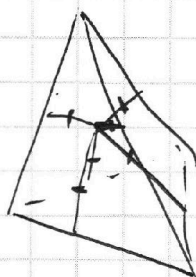
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

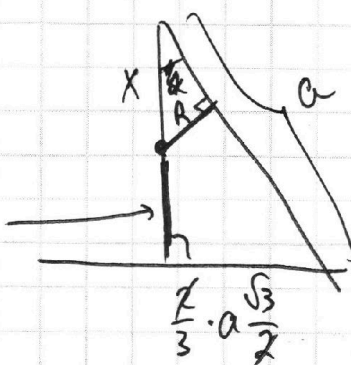
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7



$$\sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$



$$\frac{R}{x} = \frac{a\sqrt{3}}{3a}$$

$$\cos \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3 \cdot a}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$= 2 \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha + \beta)}{2}} \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha - \beta)}{2}} = \sqrt{1 - \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}$$

$$= \sqrt{1 - \cancel{\cos^2 \alpha} \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cancel{\cos^2 \alpha} \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - (\cancel{\cos^2 \alpha} \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta)} \\ = \sqrt{1 + 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - (\cancel{\cos^2 \alpha} \cos^2 \beta - \cancel{\sin^2 \alpha} \sin^2 \beta)}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$= \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$



$$\cos \alpha + \cos \beta = \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$= \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

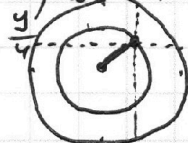
$$\frac{x}{7} \in [-1; 1]; \quad \frac{y}{4} \in [-1; 1]$$

$$\in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$$

$\sin x$ возрастает

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4}$$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$



$$\arccos \in [0; \pi]$$

$$\arcsin \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}$$

