



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $(7777, 707, 11)$

Реш: $A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101, 0 \leq a \leq 9.$

$A \cdot B \cdot C$ - квадрат $\Rightarrow$ если $A : 101$, то $A \cdot B \cdot C : 101^2$, а если $A : 11$, то $A \cdot B \cdot C : 11^2$. Тогда $11a \cdot B \cdot C : 101$, но $11, a, C < 101$ и $\neq 0$, $\Rightarrow B : 101$ (т.к. 101 - простое). Т.к. 3-значные числа $: 101$ выглядят как $\overline{x0x}$, $10 \leq x \leq 9$, и 1 из цифр = 7, то $B = 707 = 7 \cdot 101$. Теперь заметим, что $A \cdot B \cdot C : 11^2 \Rightarrow 101a \cdot 101 \cdot 7 \cdot C : 11$, а $\nmid 11$, как и $101^2 \cdot 7 \Rightarrow C : 11$, а т.к. C - 2-значн и содержит 1, то $C = 11$ (т.к. имеет вид $\overline{yy}$ из-за $: 11$). Тогда $A \cdot B \cdot C = a \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 7$ - квадрат $\Rightarrow a \cdot 7$ - квадрат $\Rightarrow a = 7$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Пореа QR-кода недопустима!

~~1~~ Ответ: 64

$$\text{Реш.: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)} ; y+x+3 > 0 \text{ т.к. } x, y < 0 \Rightarrow$$

→ можно сократить на $x+y+3$.

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{xy+4x-4y-16} ; xy > 0 \Rightarrow \text{равенство равно-}$$

сильно
таким:

$$xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$16 = 4(x-y)$$

$$x-y = 4$$

Заменим, что $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y) = x^3 - y^3 - 12xy$, т.к. $x-y=4$. Тогда $M = (x-y)^3 = 64$.

Проверим достижимость: $x=5; y=1$.

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{3}{5 \cdot 1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{3}{1 \cdot 5}, \text{ подходит.}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = 125 - 1 - 12 \cdot 5 = 64, \text{ т.е. г.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}(\sin 2y - \sin 2x) \sin 2y &= (\cos 2y + \cos 2x) \cos 2y \\ \sin^2 2y - \sin 2x \sin 2y &= \cos^2 2y + \cos 2x \cos 2y \\ 0 &= (\cos^2 2y - \sin^2 2y) + (\cos 2x \cos 2y + \sin 2x \sin 2y) \\ 0 &= \cos(4y) + \cos(2(x-y))\end{aligned}$$

$$0 = 2 \cos \frac{4y}{2} \cos \frac{2(x-y)}{2}$$

$$\cos \frac{4y}{2} = 0$$

$$\cos \frac{2(x-y)}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4y}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{2(x-y)}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y = \pm \pi + 4\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2(x-y) = \pm \pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pm \frac{\pi}{2} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 3y-x = \pm \frac{\pi}{2} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = d, d \in \mathbb{R} \\ y = \pm \frac{\pi}{2} + 4\pi k - d, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \beta, \beta \in \mathbb{R} \\ y = \pm \frac{\pi}{2} + 4\pi n + \beta, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

объемы и
 нули (3)

Заметим, что $\arccos x \in [0; \pi]$, а $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Поскольку $\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \leq -\frac{\pi}{2}$ только при $\frac{x}{7} = 1$ и $\frac{y}{4} = -1$.

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{7} \geq 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} \leq -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{7} = 1 \\ \frac{y}{4} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -4 \end{cases}$$

Все другие значения x, y не подходят.

$$\begin{cases} x = d, d \in \mathbb{Z} \\ y = \pm 1 + 4k - d, k \in \mathbb{Z}, k \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \beta, \beta \in \mathbb{Z} \\ y = \pm 1 + 4n + \beta, n \in \mathbb{Z} \text{ и } 4n + \beta \equiv \pm 1 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = d, d \in \mathbb{Z} \\ y = \pm 1 + 4n + d, n \in \mathbb{Z} \text{ и } 4n + d \equiv \pm 1 \pmod{3} \end{cases}$$

объемы и
 нули (3)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(2\alpha y)z - \cos(\alpha(x-y))$$

$$\begin{cases} 2\alpha y = \alpha - \alpha(x-y) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha y = \alpha + \alpha(x-y) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = 1+2k, k \in \mathbb{Z} \\ 3x+y = 1+2n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=d, d \in \mathbb{R} \\ y=1+2k-d, k \in \mathbb{Z} \\ x=2\beta, \beta \in \mathbb{R} \\ y=\frac{1+2n+\beta}{3}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

① $\Rightarrow \left\{ (d, 1+2k-d); (d, \frac{1+2k+\beta d}{3}) \right\}$
где для $d \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

② $\begin{cases} x=d, d \in \mathbb{Z} \\ y=1+2k-d, k \in \mathbb{Z} \text{ и } k \neq 2 \\ x=2\beta, \beta \in \mathbb{Z}, x=\beta, \beta \in \mathbb{Z} \\ y=\frac{1+2n+\beta}{3}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Ответ: а) $\left\{ (d, 1+2k-d); (d, \frac{1+2k+d}{3}) \right\}, k \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{R}$
 б) $\left\{ (d, 1+2k-d); (d, 2m+1+d) \right\}, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}, k \neq 2$
 но для $k=2$ (7; -4).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть k одноклассников и n друзей.

Тогда исход, когда Даша и Вера поехали сдв - $\binom{n-2}{k-2}$

а всего исходов - C_k^n . Тогда вероятность - $\frac{C_{k-2}^{n-2}}{C_k^n} =$

$$= \frac{(k-2)! (k-n)! n!}{k! (k-n)! \cdot (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)}. \text{ В начале месяца } n=4,$$

а в конце $n=12$. Тогда $\frac{12 \cdot 11 \cdot k(k-1)}{k(k-1) \cdot n(n-1)} = \frac{1}{11} \Rightarrow$

$$\Rightarrow n(n-1) = 12 \cdot 11 \text{ и } n > 4 \Rightarrow n = 12.$$

Ответ: 12.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Искать максимум $\sqrt{36-16x} + \sqrt{20+16x}$. III, в. сумма 2 корней ~~то~~, то берём в квадрат, (мож. свести).

$$36-16x + 20+16x + 2\sqrt{(36-16x)(20+16x)} = 56 + 8\sqrt{45+16x-16x^2}$$

Пусть $g(x) = -16x^2 + 16x + 45$ - парабола ветвью ~~в~~ вниз вершина в $\frac{-16}{2 \cdot (-16)} = \frac{1}{2} \in [0, 1.5]$ макс при $x = \frac{1}{2}$.

$$\text{Макс} = 56 + 8\sqrt{49+8-4} = 56 + 8\sqrt{53} \approx 112.$$

$$\text{После макс } \frac{1}{2}(2\pi R_1) + 2(\sqrt{36-16x} + \sqrt{20+16x}) = 16 + 22\pi$$

$$2(\sqrt{36-8} + \sqrt{20+8}) = 64 + 8\sqrt{28} = 64 + 4\sqrt{7}$$

$$\text{Ответ: } 22\pi + 64 \quad x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin d = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Ответ: } 64 + 4\sqrt{7}, \quad \boxed{d = \frac{\pi}{4} + \pi k}$$

$$\begin{cases} d = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ d = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ d = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ d = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } 64 + 4\sqrt{7}; \quad \left\{ \begin{aligned} &d = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; d = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; d = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \\ &d = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{aligned} \right\} \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\overline{aaaa} = A = a \cdot \overline{1111} =$$

$$17 \cdot 6 = 60 + 42 = 102$$

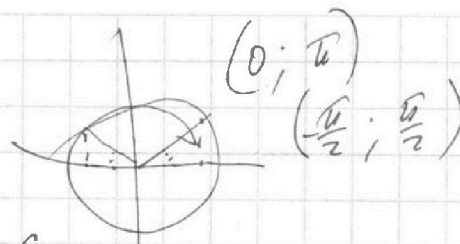
$$11 \cdot 101$$

$$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C$$

$$B : 101 \Rightarrow 707 = 7 \cdot 101$$

$$C : 11 \Rightarrow 11$$

$$a = 1; 4; 9$$



x, y

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$x^3 - y^3 - 12xy$$

$$\frac{(x-4) + (y+4) + 3}{xy + 4x - 4y - 16} = \frac{x+y+3}{xy}$$

3р

$$(\sin^2 \pi y - \sin^2 \pi x) \sin^2 \pi y =$$

$$= (\cos^2 \pi y + \cos^2 \pi x) \cos^2 \pi y$$

$$\frac{x+y+3}{xy+4x-4y-16} = \frac{x+y+3}{xy} \Rightarrow$$

$$\sin^2 \pi y - \sin^2 \pi x \sin^2 \pi y =$$

$$= \cos^2 \pi y + \cos^2 \pi x \cos^2 \pi y$$

$$xy + 4x - 4y - 16 = xy$$

$$4(x-y) = 16$$

$$x-y = 4$$

$$4^3 = 2^6$$

$$1.8 = 64$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$+ 3xy(y-x) - 12xy$$

$$(\cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y) =$$

$$= -(\sin^2 \pi x \sin^2 \pi y + \cos^2 \pi x \cos^2 \pi y)$$

$$\cos 2\pi y = -\cos 2\pi(x-y)$$

$$\cos 2\pi y + \cos 2\pi(x-y) = 0$$

$$2 \cos \pi(x+y) \cos \frac{3y-x}{2} = 0$$

$$\frac{\pi(x+y)}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\frac{\pi(3y-x)}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$(k_3,$$

$$y = \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} + k$$

$$\frac{2}{0}$$

$$-2$$

$$4y = \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} + 4k$$

$$[5 = k_3]$$

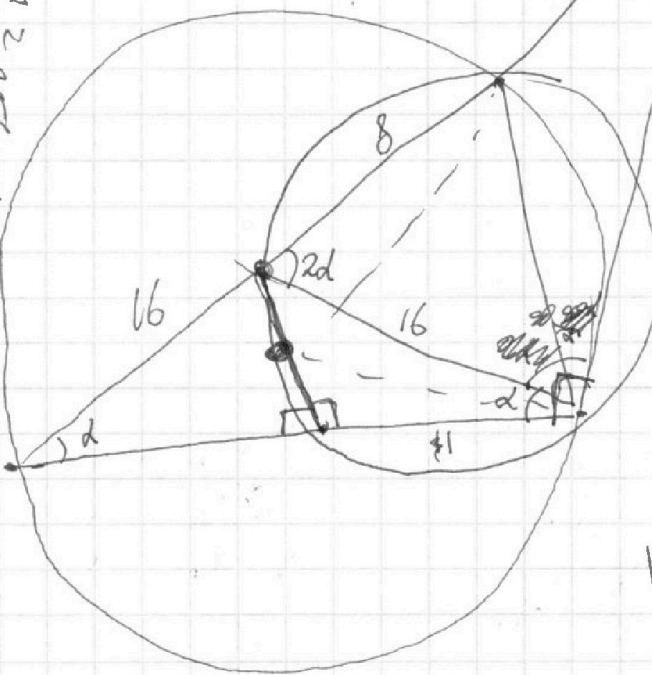
$$x = \pm 2 + 4k$$

$$x-y = \pm \frac{1}{4} + 2k_1$$

$$3y-x = \pm \frac{1}{4} + 4k_2$$

$$y = \frac{1}{2} + 4(k_1 + k_2)$$

$$3 + 12k_1 - 4k_2$$



$\left(\frac{a+b}{2}\right)$
c