



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- $C$  — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 1, а  $y$  — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 3xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{15}{2}$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 9$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

1) Пусть число  $A = 1000 \cdot a + 100a + 10 \cdot a + 1 \cdot a = 1111a = 11 \cdot 101 \cdot a$ , где  $a$  — цифра от 1 до 9 (если  $a=0$ , то  $A=0$   $\Rightarrow$  противоречие). Заменим, что  $(11; 101)=1$ . По условию известно, что  $A \circ B \circ C = k^2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Значит,  $11 \cdot 101 \cdot a \circ B \circ C = k^2$ .

2) Поскольку 101 — простое число, и оно идет в произведении, которое  $\neq$  единице дает квадрат натурального числа, то либо  $a \nmid 101$ , либо  $B \mid 101$ , либо  $C \nmid 101$ . Т.к.  $1 \leq a \leq 9$  и  $10 \leq C \leq 99$ , то остается единственный вариант, что  $B \nmid 101$ . Известно, что  $B$  — трехзначное, в котором есть хотя бы 1 цифра 2. Из чисел  $[100; 999]$ , содержащих "2" и кратные 101, такое число единственное  $B = 202$ .

3) Вернемся к разложению  $k^2 = 11 \cdot 101 \cdot a \circ B \circ C = 2 \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot a \circ C$ . Аналогично пункту 2 получим, что  $C \nmid 11$  и  $C$  содержит хотя бы 1 тройку  $\Rightarrow C = 33$ .

Имеем  $\exists k^2 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 2 \cdot 3 \circ a$ . Значит,

$2 \circ 3 \circ a$  — полный квадрат, а т.к.  $1 \leq a \leq 9$ , то  $a=6$ .

Значит,  $(A; B; C) = (6666; 202; 33)$

Ответ:  $(6666; 202; 33)$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\boxed{N_2} \quad \begin{matrix} x,y \geq 0 \\ k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} \end{matrix} \quad k = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{1}{y(y+1)} - \frac{1}{x(x-1)} + \frac{2((x-1)y+1) - xy}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$\frac{x^2 - x - (y^2 + y) + 2(xy + x - y - 1 - xy)}{xy(y+1)(x-1)} = 0$$

$$\frac{(x+y)(x-y-1) + 2(x-y-1)}{xy(y+1)(x-1)} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-y-1)(x+y+2) = 0 \\ xy(y+1)(x-1) \neq 0 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x-y = 1 \\ x+y = -2 \\ xy(y+1)(x-1) \neq 0 \end{array} \right. (*)$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = x^3 - 3xy(x-y) - y^3 + 3xy(x-y) - 3xy$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^3 + 3xy(x-y-1) = 1^3 - 3xy \cdot 0 = 1$$

По условию известно, что  $x > 0$  и  $y > 0$ , значит,

$x+y+2 > 0 \Rightarrow x+y \neq -2$ . Значит, система (\*) имеет один корень:

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=1 \\ xy(y+1)(x-1) \neq 0 \end{array} \right.$$

Значит,  $M$  принимает единственный знач.  $M = 1$

(достиг. при  $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ )

Ответ:  $M = 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

(N3)

$$a) (\sin \bar{u}x + \sin \bar{u}y) \sin \bar{u}x = (\cos \bar{u}x + \cos \bar{u}y) \cos \bar{u}x$$

$$\sin^2 \bar{u}x + \sin \bar{u}x \cdot \sin \bar{u}y = \cos^2 \bar{u}x + \cos \bar{u}x \cdot \cos \bar{u}y$$

$$(\cos^2 \bar{u}x - \sin^2 \bar{u}x) + (\cos(\bar{u}x) \cdot \cos \bar{u}y - \sin \bar{u}x \cdot \sin \bar{u}y) = 0$$

$$\cos(2\bar{u}x) + \cos(\bar{u}x + \bar{u}y) = 0$$

$$2 \cos \frac{\bar{u}x + \bar{u}x + \bar{u}y}{2} \cos \frac{\bar{u}x - (\bar{u}x + \bar{u}y)}{2} = 0$$

$$\cos \frac{3\bar{u}x + \bar{u}y}{2} \circ \cos \frac{\bar{u}x - \bar{u}y}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{3\bar{u}x + \bar{u}y}{2} = \frac{\pi}{2} + \bar{u}n, & n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\bar{u}x - \bar{u}y}{2} = \frac{\pi}{2} + \bar{u}k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Умножим обе ур-я} \\ \text{на } \frac{2}{\bar{u}}: \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 1 + 2n, & n \in \mathbb{Z} \\ x - y = 1 + 2k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{array}{l} y = 1 + 2n - 3x, & n \in \mathbb{Z} \\ x = y + 1 + 2k, & k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Значит, решением ур-я является пара  $(t', 1+2n-3t)$ , где  $t \in \mathbb{R}$  ( $t$  - любое число) и  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $(q, q-1-2k)$ , где  $q$  - любое действ. число,  $k \in \mathbb{Z}$

б)  $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\bar{u}}{2}; \quad x, y \in \mathbb{Z}$

$$\arcsin \frac{x}{5} < \frac{3\bar{u}}{2} - \arccos \frac{y}{4}$$

$$\sin(\arcsin \frac{x}{5}) < \sin(\frac{3\bar{u}}{2} - \arccos \frac{y}{4})$$

$$\begin{cases} \frac{x}{5} < \sin \frac{3\bar{u}}{2} \cdot \cos(\arccos \frac{y}{4}) - \cos \frac{3\bar{u}}{2} \cdot \sin(\arccos \frac{y}{4}) \\ -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \end{cases}$$

~~запись~~

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{x}{5} < -\frac{y}{4} \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -1 \leq -\frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \quad | \cdot 20 \quad \begin{cases} 4x < -5y \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases} \quad (*)$$

Из пункта а мы получим следующее:

$$\begin{cases} y = 1 + 2n - 3x, n \in \mathbb{Z} \\ y = x - 1 - 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Заметим, т.к.  $n, k \in \mathbb{Z}$ ,  
если  $x \in \mathbb{Z}$ , то  $y \in \mathbb{Z}$ .  
Тогда:

1)  $y = 1 + 2n - 3x \quad |_{n \in \mathbb{Z}}$

$$\begin{cases} 4x + 5y < 0 \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 4x + 5(1 + 2n - 3x) < 0 \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases} \quad |_{n \in \mathbb{Z}};$$

$$\begin{cases} 5 + 10n < 11x, n \in \mathbb{Z} \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases};$$

Перейдем к след. системе:

$$\begin{cases} 11x > 10n + 5 \\ -5 \leq x \leq 5 \quad | \cdot 11 \\ -4 \leq y \leq 4 \\ y = 1 + 2n - 3x \end{cases}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 11x > 10n + 5 \quad (1) \\ -55 \leq 11x \leq 55 \quad (2) \\ -4 \leq y \leq 4 \quad (3) \\ y = 1 + 2n - 3x \quad (4) \end{cases}$$

Заметим, что из (1) нер-ва, чтобы она имела целые решения  $x$ , необходимо, чтобы  $n \leq 5$  (т.к.  $11x \leq 55$ ). Аналогично, для  $y$  рав-ва найдем, что  $n \geq 0$ .

(П.к. при  $n < -10$ :  $1 + 2n < -19$ ;  $-15 \leq -3x \leq 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 1 + 2n - 3x < -4$ , а по (3) нер-ву  $y \geq -4$ )

значит,  $n \in [-10; 4]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим систему (\*):

$$\begin{cases} 4x < -5y \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

1)  $x = 5$ :

ти один из  $y$  не удовлет.

Заметим, что при  $x = 5$  и  $x = 0$   $\nexists x \geq 0$ : удовлет.

пер-вую и систему пары  $(x; -x)$ ,  $(x; -x+1)$  и т.д. когда  $x \leq -1$ , то удовлет. систему пары  $(x; -x+1)$ ,  $(x; -x+2)$  и т.д. (с учетом ограничений).

Итого при определенных  $x$  получаем  $n$  пар.

$x = 5$ : 0 пар

$x = 4$ : 1 пара

$x = 3$ : 2 пары

$x = 2$ : 3 пары

$x = 1$ : 4 пары

$x = 0$ : 4 пары

(т.к.  $(0, 0)$  не удовл.)

$x = -1$ : 5 пар

$x = -2$ : 6 пар

$x = -3$ : 7 пар

$x = -4$ : 8 пар

$x = -5$ : 8 пар (т.к. вариант  $(-5, 4)$  не удовл.)

Теперь вернемся к пункту а:

$$\begin{cases} y = 1 + 2x - 3x \\ y = x - 1 - 2x \end{cases} \quad n, \text{как}$$

Заметим, что пары одной четности не будут иметь решений и, ч. в.  $(1, k) \in \{(x, y) | (y-x) \equiv 2 \}$ ,  $-1 - 2k \equiv 2$ . Если же  $(x+y) \equiv 2$ , то решения и и к найдутся. Значит:

1)  $x = 5$ : 0 узобр.

2)  $x = 4$ :  $(4; -4)$  - не уд.

3)  $x = 3$ :  $(3; -3); (3; -4)$  - 1 узобр.

4)  $x = 2$ : 1 узобр. (т.к.  $(2, -2); (2, -4)$  не удовл.)

5)  $x = 1$ : 2 узобр.  $(1, -2); (1, -4)$   $\nexists x = -1$ : 3 узобр.  $(-1, 1); (-1, 3); (-1, 5)$

6)  $x = 0$ : 2 узобр.  $(0, -1); (0, -3)$  8)  $x = -2$ : 3 узобр.  $(-2, -1); (-2, -3); (-2, -5)$

9)  $x = -3$ : 4 узобр.  $(-3, 2); (-3, 0); (-3, -2); (-3, -4)$

10)  $x = -4$ : 4 узобр.  $(-4, 3); (-4, 1); (-4, -1); (-4, -3)$

11)  $x = -5$ : 4 узобр.  $(-5, 4); (-5, 2); (-5, 0); (-5, -2)$

Итого получают  $1+2+3+2+4=12=24$  пары



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
Ч ИЗ Ч

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответы:  
a)  $(t; 1+2n-3t)$ , где  $t$ - любое действ. число,  
 $\text{нек}$   
 $(q \cdot q-1-2k)$ , где  $q$ - люб. действ. число;  
 $\text{нек}$   
б) 24 пары



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7

Пусть всего было  $n$  одиннадцатиклассников.  
Тогда вероятность, что и Петя, и Вася получат  
две билеты в течение месяца равна

$$P_0 = C_4^1 \cdot \frac{1}{n} \cdot C_3^1 \cdot \frac{1}{n-1} \quad (\text{выпало одно})$$

Затем количество билетов стало  $k$ . Значит

$$P_1 = C_k^1 \cdot \frac{1}{n} \cdot C_{n-1}^1 \cdot \frac{1}{n-1} \quad (\text{известно, что } k)$$

$$\frac{5}{2} P_0 = P_1$$

$$\frac{5}{2} \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = C_k^1 \cdot C_{n-1}^1$$

$$\frac{5}{2} \cdot 12 = k(k-1) ; \quad k^2 - k - 30 = 0 ;$$

$$(k-6)(k+5) = 0 ; \quad \begin{cases} k=6 \\ k=-5 \end{cases}$$

Т.к.  $k > 0$ , то  $k=6$  — искомое число билетов

Ответ: 6 билетов

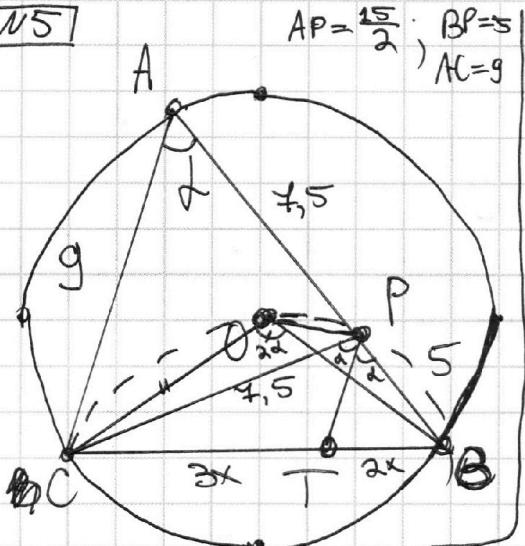
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N5



$$AP = \frac{15}{2}, \quad BP = 5, \quad AC = 9$$

Решение:

1) Доп. из строение:  $PT \parallel AC$ .

Поскольку  $O$ -центр окруж.,  
опис. около  $\triangle ABC$ , то  
 $\angle COB = 2\angle CAB = 2\alpha$   
(т.к.  $\angle CAB$ -внс.).

2) Рассмотрим  $\triangle COP$ .

Этот четырехгл. вписан в окр-ть  $AB$ . Значит,  
 $\angle COB = 2\alpha = \angle CPB$  (нас винс. и омэр. на одни  
дуги). Поскольку  $PT \parallel AC$ , то  $\angle BPT = \angle BAC = \alpha$ ,  
значит,  $\angle CPT = \alpha = \angle BPT \Rightarrow PT$ -диск-са  
 $\angle CPB$ .

Значит, по её свойству  $\frac{CP}{BP} = \frac{CT}{BT}$  (\*)

3) Поскольку  $PT \parallel AC$ , то  $\frac{AP}{PB} = \frac{CT}{TB}$  (по теореме Фалеса).

Нужно  $BT = 2x$ , тогда  $CT = 3x$  ( $\frac{AP}{PB} = \frac{1,5}{5} = \frac{3}{10} = \frac{3}{2}$ )

Возвращая к (\*):  $\frac{CP}{BP} = \frac{CT}{BT} = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow CP = \frac{3}{2} BP = 4,5.$$

4) Рассмотрим  $\triangle CAP$ . По теореме косинусов:

$$\cos \alpha = \frac{AC^2 + AP^2 - CP^2}{2 \cdot AC \cdot AP} = \frac{9^2}{2 \cdot 9 \cdot \frac{15}{2}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ (т.к. } \alpha \text{ - острый)}.$$

$$\text{Значит, } S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 45$$

Ответ: 45

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

$$x - 3\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0$$

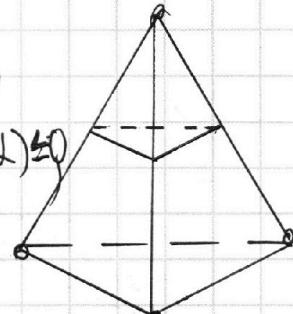
$$y - 3\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0$$

$$x - 3\sqrt{2} \sin \alpha \leq 0$$

$$y - 3\sqrt{2} \cos \alpha \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

$$C_4 \cdot \frac{1}{n} \cdot$$



1 2 3 4 5 6 7 8 9

-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4

$$x \geq 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$x \geq 3\sqrt{2}$$

$$x=5: \boxed{W}=20$$

$$x=4: (4; -4) - 1 \text{ пара}$$

$$x=3: (3; -4); (3; -3) - 2 \text{ пары}$$

$$x=2: (2; -2); (2; -3); (2; -4) - 3$$

$$x=1: 4 \text{ пары}$$

$$x=0: 4 \text{ пары} + 0 + 0$$

$$x=-1: 5 \text{ пар} (-1; 0); (-1; -1); (-1; -2); (-1; -3)$$

$$x=-2: 6 (-2; 1); (-2; 0); (-2; -1); (-2; -2); (-2; -3)$$

$$x=-3: 7 (-3; 1); (-3; -2); \dots (-3; 1); (-3; 2)$$

$$x=-4: 8$$

$$x=-5: 9$$

31

-4 -3 -2 -1 0 1 2 3

$\frac{4}{10}$ ; 4 дин.)

$$x=3^\circ$$

$$\boxed{y = 1 + 2n - 9}$$

$$\boxed{y = 3 - 1 - 2k}$$

$$9 - 1 - 4 = 2n . n = 2$$

$$1 - 3 - 4 = -2k \quad | \quad k = 3$$



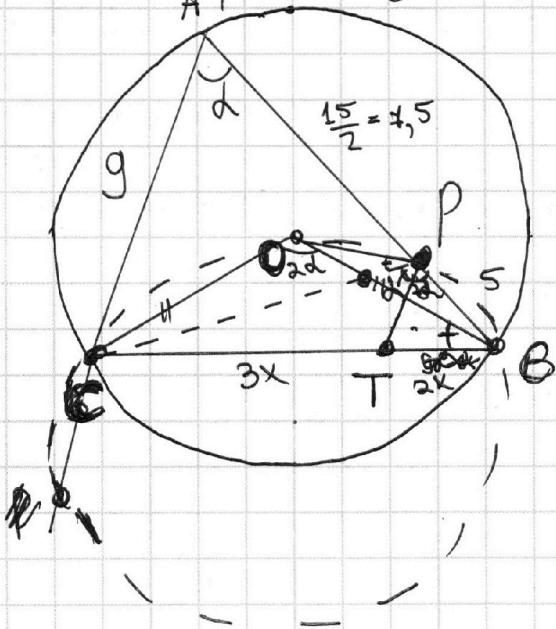
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№5



$$x - y - 3\sqrt{2}(\sin \alpha - \cos \alpha) \geq 0 ; y \leq x$$

$$AP = \frac{15}{2}; BP = 5; AC = 9;$$

$S(\Delta ABC)$  - ?

$$\frac{S(\Delta CPB)}{S(\Delta ACB)} = \frac{BP}{AP} = \frac{5}{5 + 7.5} = \frac{2x}{5x}$$

$$\frac{P(A \cdot BC)}{P(P \cdot BC)} = \frac{5}{2}, PT \parallel AC;$$

$$BT : TC = 2 : 3, PT = \frac{2}{5} AC$$

$$\text{Значит, } CP = 7.5, CP = \frac{18}{5} AC$$

$$y = 3\sqrt{2}\cos \alpha$$

$$(x - 3\sqrt{2}\cos \alpha)(y - 3\sqrt{2}\sin \alpha) = xy - 3\sqrt{2}(x\sin \alpha + y\cos \alpha)$$

$$+ 9 \cdot 2\sin \alpha \cos \alpha = xy - 3\sqrt{2}\sin \alpha$$

$$4x + 5y < 0$$

$$4x + 5(1 + 2u - 3x) \quad \frac{5}{2} \cdot 6 = 15 - u \leq 1 + 2u - 3x \leq 4$$

$$-1 \leq x \leq 2 \quad | \cdot (-1) \quad -5 \leq 2u - 3x \leq 3$$

$$-2 \leq x \leq 1 \quad | \cdot \frac{5}{2} \quad C_2^u \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{u-1} \quad 11u - 11x \leq 5$$

$$-4 = 16 + 2u; u = -10$$

$$-5 - 2u \leq -3x \leq 3 - 2u \quad | \cdot (-1)$$

$$2u - 3 \leq 3x \leq 5 + 2u \quad | : 3$$

$$\frac{2u}{3} - 1 = -5$$

$$\frac{2u}{3} = -4 \\ u = -6$$

$$u = 5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2u}{3} - 1 \leq x \leq \frac{5 + 2u}{3} \\ -5 \leq x \leq 5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -5 \leq x \leq 5 \end{array} \right.)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{12} \quad & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \\ & \frac{1}{y(y+1)} - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{2}{(x-1)(y+1)} - \frac{2}{xy} \\ & \frac{x(x-1) - y(y+1)}{xy(y+1)(x-1)} = \frac{2(xy - (x-1)(y+1))}{xy(x-1)(y+1)} \\ & \frac{x^2 - y^2 - (x+y)}{xy(y+1)} \stackrel{\Theta}{=} xy - (xy + x - y - 1) \\ & (x+y)(x-y-1) = 2(-x+y+1) \end{aligned}$$

$$(x-y-1)(x+y+2) = 0 \quad O \quad x = y+1 \quad \frac{S(\Delta PAB)}{S(\triangle ABC)} = \frac{5}{5+4} = \frac{5}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad M &= x^3 - y^3 - 3xy = x^3 - C \\ (x-y)^3 &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y) \\ x^3 - y^3 - 3xy(x-y) - 3xy + 3xy(x-y) &\stackrel{\Theta}{=} \\ \text{II} \quad M &= \tan \frac{\pi(x+y)}{2} = \cot \pi x \end{aligned}$$

$$\text{13} \quad (\sin \alpha x + \sin \beta y) \sin \alpha x = (\cos \alpha x + \cos \beta y) \cos \alpha x$$

$$\sin \alpha x + \sin \beta y = 2 \sin \frac{\alpha(x+y)}{2} \cos \frac{\alpha(x-y)}{2}.$$

$$(\cos \alpha x + \cos \beta y) = 2 \cos \frac{\alpha(x+y)}{2} \cos \frac{\alpha(x-y)}{2}$$

$$\frac{\sin \alpha x + \sin \beta y}{\cos \alpha x + \cos \beta y} = \tan \frac{\alpha(x+y)}{2}$$

$$\frac{\cos \alpha x}{\sin \alpha x} = \cot \alpha x = \frac{1}{\tan \alpha x}$$

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= x \\ \alpha + \beta &= y \\ \alpha &= \frac{x+y}{2} \\ \beta &= \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}} + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$$

$$\cos 2\lambda = \cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda$$

$$\text{Нужно } \pi x = \lambda; \pi y = \beta; \\ \sin \lambda \sin \beta - \cos \lambda \cos \beta = \cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\sin \pi x \sin \pi y - \cos \pi x \cos \pi y = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$-\cos(\pi x + \pi y) = \cos(2\pi x)$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y) = 0$$

$$2 \cos \frac{(2\pi x + \pi x + \pi y)}{2} \cos \frac{2\pi x - (\pi x + \pi y)}{2} = 0$$

$$\frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$3x + y = 1 + 2n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

нужно всего есть  
в 11-м классе.

$$n=2; \quad \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

$$(\sin u + \sin 2u) \cos^2 u = \\ = (\cos u + \cos 2u) \cos u$$

$$C_4^1 \cdot \frac{1}{n} + C_3^1 \cdot \frac{1}{n-1}$$

$$n=1; \quad \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \quad (\sin u + \sin 0) \sin u$$

$$\sin(\arcsin \frac{x}{5}) < \sin\left(\frac{3u}{2} - \arccos \frac{y}{4}\right); \quad \begin{cases} \frac{x}{5} < -\frac{y}{4} \\ 11x > 10n+5 \end{cases}$$

$$\frac{11x}{10} \left(\frac{-1}{2}\right) \frac{11x}{5} - 1 > 2n$$

$$-5y = -5 - 10n + 15x$$

$$2,5 \left( C_4^1 \cdot \frac{1}{n} + C_3^1 \cdot \frac{1}{n-1} \right) = C_k^1 \cdot \frac{1}{n} + C_{k-1}^1 \cdot \frac{1}{n-1} \quad y = 1 + 2u \quad -3x < \frac{11x}{5} - 3x = \\ \frac{5}{2} \cdot 4 \cdot 3 = k(k-1) \quad k^2 - k = 30 \quad -\frac{4}{5}x$$

$$k^2 - k - 30 = 0 \quad (k-6)(k+5) = 0 \quad ?$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ из \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$C_4^1 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \circ \left( C_3^1 \cdot \frac{1}{n-1} \cancel{+ C_2^1 \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2}} + C_1^1 \right)$$

1      2      1

$$(x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0;$$

$$xy - 3\sqrt{2}(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + 18\sin\alpha\cos\alpha =$$

$$= xy - 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) + 9\sin 2\alpha \leq$$

$$\leq xy - 15\sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) + 9\sin 2\alpha$$

~~$\sin x + \sqrt{3} \cos x$~~

$$= \underline{2\sqrt{2}(\frac{1}{2})}$$

Банко ~~100~~ 11-класс.

$$1 \quad \frac{1}{C_4^4 \cdot C_{n-1}^3} + \frac{1}{C_4^4 \cdot C_9^8 \cdot C_2^2} + \frac{1}{C_4^4 \cdot C_9^8 \cdot C_8^2}$$



Решение 1 вспомогаю Дидет. Тогда P, что 2 телка

$$\text{берутся} \quad C_{n-1}^3 + \cancel{C_{n-1}^2} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot C_1^2$$

$$C_9^3 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} =$$

$$\frac{5}{2} \left( 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \right) = \frac{4!}{n!} \quad C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2!}$$

$$\frac{5}{2} \cdot 4! = k!$$

60



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\boxed{n+}$

