



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

1) Пусть число $A = 1000 \cdot a + 100a + 10 \cdot a + 1 \cdot a = 1111a =$
 $= 11 \cdot 101a$, где a — цифра от 1 до 9 (если $a=0$, то $A=0$ — противр.)

Заметим, что $(11; 101) = 1$. По условию известно, что
 $A \cdot B \cdot C = k^2$, к.н. Значит, $11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C = k^2$.

2) Поскольку 101 — простое число, и оно идет в произведении,
которое в итоге дает квадрат н.ч. числа, то либо $a \div 101$,
либо $B \div 101$, либо $C \div 101$. Т.к. $1 \leq a \leq 9$ и $10 \leq C \leq 99$,
то остается единств. вариант, что $B \div 101$. Известно,
что B — трехзначное, в котором есть хотя бы 1 цифра 2.
Из чисел $[100; 999]$, содержащих "2" и кратные 101,
такое число единственное $B = 202$.

3) Вернемся к соотношению $k^2 = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C =$
 $= 2 \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot a \cdot C$. Аналогично пункту 2 получим, что
 $C \div 11$ и C содержит хотя бы 1 тройку $\Rightarrow C = 33$.

Имеем: $k^2 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a$. Значит,
 $2 \cdot 3 \cdot a$ — полный квадрат, а т.к. $1 \leq a \leq 9$, то $a = 6$.

Значит, $(A; B; C) = (6666; 202; 33)$

Ответ: $(6666; 202; 33)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

172 $xy > 0$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}; \quad k = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{1}{y(y+1)} - \frac{1}{x(x-1)} + \frac{2((x-1)(y+1) - xy)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$\frac{x^2 - x - (y^2 + y) + 2(xy + x - y - 1 - xy)}{xy(y+1)(x-1)} = 0$$

$$\frac{(x+y)(x-y-1) + 2(x-y-1)}{xy(y+1)(x-1)} = 0$$

$$\begin{cases} (x-y-1)(x+y+2) = 0 \\ xy(y+1)(x-1) \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x-y = 1 \\ x+y = -2 \\ xy(y+1)(x-1) \neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = x^3 - 3xy(x-y) - y^3 + 3xy(x-y) - 3xy$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^3 + 3xy(x-y-1) = 1^3 - 3xy \cdot 0 = 1$$

По условию известно, что $x > 0$ и $y > 0$, значит, $x+y+2 > 0 \Rightarrow x+y \neq -2$. Значит, система (*) имеет
 вид:

$$\begin{cases} x-y = 1 \\ xy(y+1)(x-1) \neq 0 \end{cases}$$

Значит, M принимает единств. знач. $M = 1$
 (достиг. при $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$)

Ответ: $M = 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

113

$$a) (\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y) \sin^2 \pi x = (\cos^2 \pi x + \cos^2 \pi y) \cos^2 \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi x \cdot \sin^2 \pi y = \cos^2 \pi x + \cos^2 \pi x \cdot \cos^2 \pi y$$

$$(\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) + (\cos(\pi x) \cdot \cos \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y) = 0$$

$$\cos(2\pi x) + \cos(\pi x + \pi y) = 0$$

$$2 \cos \frac{2\pi x + \pi x + \pi y}{2} \cos \frac{2\pi x - (\pi x + \pi y)}{2} = 0$$

$$\cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0$$

$$\left[\frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right]$$

Умножим обе ур-я на $\frac{2}{\pi}$:

$$\left[\begin{aligned} 3x + y &= 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ x - y &= 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right]$$

$$\left[\begin{aligned} y &= 1 + 2n - 3x, n \in \mathbb{Z} \\ x &= y + 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right]$$

Значит, решением ур-я являются пары $(t; 1 + 2n - 3t)$, где $t \in \mathbb{R}$ (t — любое действит. число) и $n \in \mathbb{Z}$; $(q; q - 1 - 2k)$, где q — любое действит. число, $k \in \mathbb{Z}$.

$$b) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}; \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} < \frac{3\pi}{2} - \arccos \frac{y}{4}$$

$$\sin(\arcsin \frac{x}{5}) < \sin(\frac{3\pi}{2} - \arccos \frac{y}{4})$$

$$\begin{cases} \frac{x}{5} < \sin \frac{3\pi}{2} \cdot \cos(\arccos \frac{y}{4}) - \cos \frac{3\pi}{2} \cdot \sin(\arccos \frac{y}{4}) \\ -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \end{cases}$$

~~113~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{5} < -\frac{y}{4} \quad | \cdot 20 \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -1 \leq -\frac{y}{4} \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < -5y \\ -5 \leq x \leq 5 \quad (*) \\ -4 \leq y \leq 4 \end{array} \right.$$

Из пункта а мы получили следующее:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 1 + 2n - 3x, \quad n \in \mathbb{Z} \\ y = x - 1 - 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Заметим, т.к. } n, k \in \mathbb{Z}, \\ \text{то если } x \in \mathbb{Z}, \text{ то } y \in \mathbb{Z}. \\ \text{Тогда:} \end{array}$$

$$1) \quad y = 1 + 2n - 3x, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + 5y < 0 \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 11x + 5(1 + 2n - 3x) < 0, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \neq 10n < 11x, \quad n \in \mathbb{Z} \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{array} \right.$$

Перейдем к след. системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} 11x > 10n + 5 \\ -5 \leq x \leq 5 \quad | \cdot 11 \\ -4 \leq y \leq 4 \\ y = 1 + 2n - 3x \end{array} \right\}; \quad n \in \mathbb{Z} \quad \left\{ \begin{array}{l} 11x > 10n + 5 \quad (1) \\ -55 \leq 11x \leq 55 \quad (2) \\ -4 \leq y \leq 4 \quad (3) \\ y = 1 + 2n - 3x \quad (4) \end{array} \right.$$

Заметим, что из (1) пер-ва, чтобы оно имело целые решения x , необходимо, чтобы $n \leq 5$ (т.к. $11x \leq 55$). Аналогично оценкой для 4 рав-ва найдем, что $n \geq -10$.

(Зам. при $n < -10$: $1 + 2n < -19$; $-15 \leq -3x \leq 15 \Rightarrow y = 1 + 2n - 3x < -4$, а по (3) пер-ву $y \geq -4$)
Значит, $n \in [-10; 5]$, где $n \in \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим систему (*):

$$\begin{cases} 4x < -5y \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

1) $x=5$:

ни один из y не удовлетв.

2) $x=4$:

$(4; -4)$

3) $x=3$:

$(3; -3); (3; -4)$

Заметим, что при $x \neq 5$ и $x \neq 0$ и $x \geq 0$ удовлетв. пер-ву и системе пары $(x; -x)$; $(x; -x+1)$ и т.д. когда $x \leq -1$, то удовлетв. системе пары $(x; -x+1)$; $(x; -x+2)$ и т.д. (с учетом ограничений).

Итого при определенных x получаем след. кол-во пар.

$x=5$: 0 пар

$x=-1$: 5 пар

$x=4$: 1 пара

$x=-2$: 6 пар

$x=3$: 2 пары

$x=-3$: 7 пар

$x=2$: 3 пары

$x=-4$: 8 пар

$x=1$: 4 пары

$x=-5$: 8 пар (т.к. вариант $(5; 4)$ не удовл.)

$x=0$: 4 пары

(т.к. $(0; 0)$ не удовл.)

Теперь вернемся к пункту а: $\begin{cases} y = 1+2n-3x \\ y = x-1-2k \end{cases}$ $n, k \in \mathbb{Z}$

Заметим, что пары одной четности не будут иметь решения $n, k \in \mathbb{Z}$ (т.к. $(y-x) \equiv 2; -1-2k \equiv 2$;
 $y+3x \equiv y+x \equiv 0; 1+2n \equiv 2$). Если же $(x+y \equiv 2)$, то решения n и k найдутся. Значит:

1) $x=5$: 0 удовл.

2) $x=4$: $(4; -4)$ — не удовл.

3) $x=3$: $(3; -3); (3; -4)$ — 1 удовл.

4) $x=2$: 1 удовл. (т.к. $(2; -2)$ и $(2; -4)$ не удовл.)

5) $x=1$: 2 удовл. $(1; 2); (1; 4)$ $x=-1$: 3 удовл. $(-1; 0); (-1; 1); (-1; 2)$

6) $x=0$: 2 удовл. $(0; -1); (0; 3)$ $x=-2$: 3 удовл. $(-2; -1); (-2; 1); (-2; 3)$

7) $x=-3$: 4 удовл. $(-3; 2); (-3; 0); (-3; 1); (-3; 3)$

8) $x=-4$: 4 удовл. $(-4; 5); (-4; 3); (-4; 1); (-4; -1)$

9) $x=-5$: 4 удовл. $(-5; 4); (-5; 2); (-5; 0); (-5; -2)$

Итого подходит $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 2 + 4 + 6 + 12 = 24$ пар



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: а) $(t; 1+2n-3t)$, где t - любое действ. число,
 $n \in \mathbb{Z}$
 $(q; q-1-2k)$, где q - лод. действ. число;
 $k \in \mathbb{Z}$
б) 24 пары



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☒☐☐☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

114

Пусть всего было n одноклассников.
Тогда вероятность, что и Петя, и Вася поедят
джем в начале месяца равна

$$P_0 = C_4^1 \cdot \frac{1}{n} \cdot C_3^1 \cdot \frac{1}{n-1} \quad (\text{вышли оба}).$$

Затем количество джемов стало k . Значит

$$P_1 = C_k^1 \cdot \frac{1}{n} \cdot C_{k-1}^1 \cdot \frac{1}{n-1}. \quad \text{Известно, что:}$$

$$\frac{5}{2} P_0 = P_1;$$

$$\frac{5}{2} \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = C_k^1 \cdot C_{k-1}^1$$

$$\frac{5}{2} \cdot 12 = k(k-1); \quad k^2 - k - 30 = 0;$$

$$(k-6)(k+5) = 0; \quad \begin{cases} k=6 \\ k=-5 \end{cases}$$

П.к. $k > 0$, то $k=6$ - новое кол-во джемов

Ответ: 6 джемов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

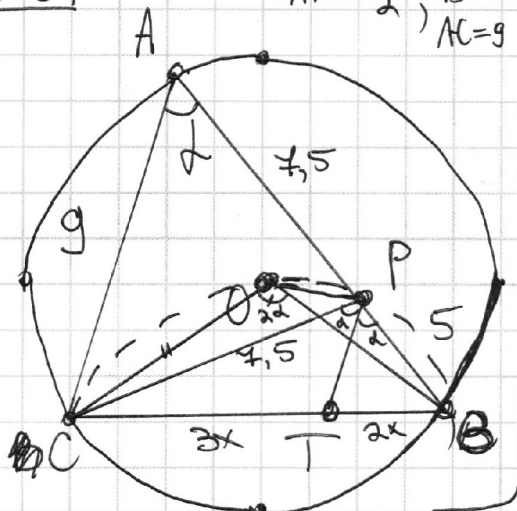
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15

$$AP = \frac{15}{2}; BP = 5; AC = 9$$



Решение:

1) Доп. построение: $PT \parallel AC$.

Поскольку O — центр окруж.,
отм. около $\triangle ABC$, то
 $\angle COB = 2\angle CAB = 2\alpha$
(т.к. $\angle CAB$ — впис.).

2) Рассмотрим COB .

Этот четырехуг. вписан в окр-ть U_2 . Значит,
 $\angle COB = 2\alpha = \angle CPB$ (как впис. и опираются на одну дугу). Поскольку $PT \parallel AC$, то $\angle BPT = \angle BAC = \alpha$,
значит, $\angle CPT = \alpha = \angle BPT \Rightarrow PT$ — бисс-са $\angle CPB$.

Значит, по ее свойству $\frac{CP}{BP} = \frac{CT}{BT}$ (*)

3) Поскольку $PT \parallel AC$, то $\frac{AP}{PB} = \frac{CT}{TB}$ (по подоб. $\triangle$ по теореме Фалеса).

Пусть $BT = 2x$, тогда $CT = 3x$ ($\frac{AP}{PB} = \frac{7.5}{5} = \frac{3}{2}$)

Вернемся к (*): $\frac{CP}{BP} = \frac{CT}{BT} = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow CP = \frac{3}{2}BP = 7.5$.

4) Рассмотрим $\triangle CAP$. По теореме косинусов:

$$\cos \alpha = \frac{AC^2 + AP^2 - CP^2}{2AC \cdot AP} = \frac{9^2}{2 \cdot 9 \cdot \frac{15}{2}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$ (т.к. α — острый).

Значит, $S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{4}{5} =$

$= 45$

Ответ: 45



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№6

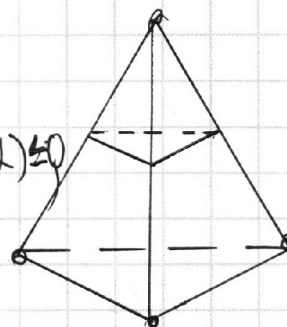
$$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0 \\ x - 3\sqrt{2} \sin \alpha \leq 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

$$C_4^1 \cdot \frac{1}{n} \cdot$$

$$\begin{aligned} (1-1) \quad y - x - 3\sqrt{2}(\cos \alpha - \sin \alpha) &\leq 0 \\ y &\leq x - 6 \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$



1 2 3 4 5 6 7 8 9
 -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4

$$x=5: \boxed{10} = 20$$

$$x=4: (4; -4) - 1 \text{ пара}$$

$$x=3: (3; -4); (3; -3) - 2 \text{ пары}$$

$$x=2: (2; -2); (2; -3); (2; -4) - 3$$

$$x=1: 4 \text{ пары}$$

$$x=0: 4 \text{ пары}$$

$$x=-1: 5 \text{ пар}$$

$$x=-2: 6$$

$$x=-3: 4$$

$$x=-4: 8$$

$$x=-5: 8$$

$$\begin{aligned} x &\geq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ x &\geq 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

-4 -3 -2 -1 0 1 2 3

10 ; 4 пар;

$$\frac{4}{10}$$

$$x=3:$$

$$y = 1 + 2n - 9$$

$$y = 3 - 1 - 2k$$

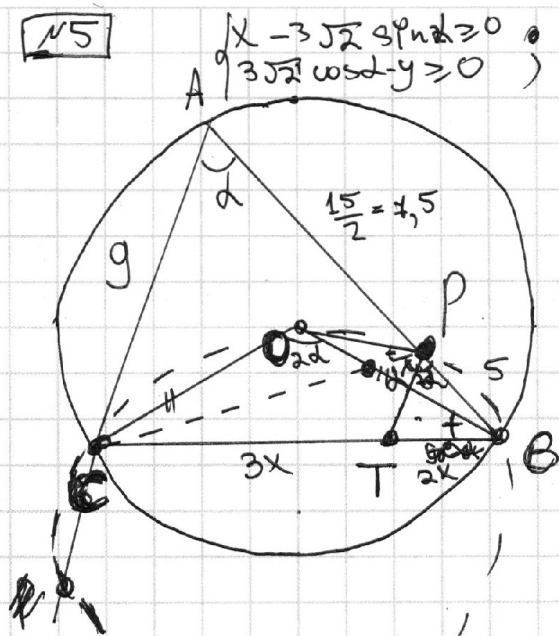
$$\begin{aligned} 9 - 1 - 4 &= 2n \quad n=2 \\ 1 - 3 - 4 &= -2k \quad k=3 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x - 3\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0 \quad ; \quad x - y - 3\sqrt{2} (\sin \alpha - \cos \alpha) \geq 0 \quad ; \quad y \leq x$$

$$AP = \frac{15}{2} ; BP = 5 ; AC = 9 ;$$

$$S(\triangle ABC) = ?$$

$$\frac{S(\triangle CPB)}{S(\triangle ACB)} = \frac{BP}{AB} = \frac{5}{5 + 7.5} = \frac{5}{12.5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{P(A; BC)}{P(P; BC)} = \frac{5}{2} ; PT \parallel AC ;$$

$$BT : TC = 2 : 3 ; PT = \frac{2}{5} AC = \frac{18}{5}$$

$$y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$(x - 3\sqrt{2} \cos \alpha)(y - 3\sqrt{2} \sin \alpha) = xy - 3\sqrt{2} (x \sin \alpha + y \cos \alpha) + 9 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = xy - 3\sqrt{2} \sin 2\alpha + 9 \sin 2\alpha$$

$$n = 10 \quad \text{ограничения}$$

$$\frac{5}{2} C_{10}^4 \cdot C_9^3 =$$

$$4x + 5y < 0$$

$$4x + 5(1 + 2u - 3x) \quad \frac{5}{2} \cdot 6 = 15 - u \leq 1 + 2u - 3x \leq 4$$

$$-1 \leq x \leq 2 \quad || \quad -5 \leq 2u - 3x \leq 3$$

$$-2 \leq x \leq 1 \quad || \quad \frac{5}{2} C_4^0 \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{u-1} \quad 10u - 11x < -5$$

$$-4 = 16 + 2u ; u = -10$$

$$-5 - 2u \leq -3x \leq 3 - 2u \quad | \cdot (-1)$$

$$2u - 3 \leq 3x \leq 5 + 2u \quad | : 3$$

$$\frac{2u}{3} - 1 \leq x \leq \frac{5 + 2u}{3}$$

$$-5 \leq x \leq 5$$

$$\frac{2u}{3} - 1 = -5$$

$$\frac{2u}{3} = -4$$

$$u = -6$$

$$u = 5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{1}{y(y+1)} - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{2}{(x-1)(y+1)} - \frac{2}{xy}$$

$$\frac{x(x-1) - y(y+1)}{xy(y+1)(x-1)} = \frac{2(xy - (x-1)(y+1))}{xy(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x^2 - y^2 - (x+y)}{xy(y+1)}$$

$$\Leftrightarrow xy - (xy + x - y - 1) = -x + y + 1$$

$$(x+y)(x-y-1) = 2(-x+y+1)$$

$$(x-y-1)(x+y+2) = 0$$

$$\textcircled{I} \mu = x^3 - y^3 - 3xy = x^3 - (x-y)^3 = x^3 - (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) = 3x^2y - 3xy^2 = 3xy(x-y)$$

$$x^3 - y^3 - 3xy(x-y) - 3xy + 3xy(x-y) \Leftrightarrow$$

$$\textcircled{II} \mu = \operatorname{tg} \frac{\pi(x+y)}{2} = \operatorname{ctg} \pi x$$

$$\textcircled{III} (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin \pi x + \sin \pi y = 2 \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2}$$

$$\cos \pi x + \cos \pi y = 2 \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2}$$

$$\frac{\sin \pi x + \sin \pi y}{\cos \pi x + \cos \pi y} = \operatorname{tg} \frac{\pi(x+y)}{2}$$

$$\frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} = \operatorname{ctg} \pi x = \frac{1}{\operatorname{tg} \pi x}$$

$$\alpha - \beta = \pi$$

$$\alpha + \beta = \pi$$

$$\alpha = \frac{\pi+y}{2}$$

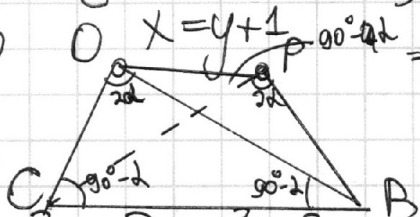
$$\beta = \frac{\pi-y}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\frac{S(\triangle CPB)}{S(\triangle ABC)} = \frac{5}{5+7+5} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\operatorname{tg} \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2}}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Пусть $\pi x = \alpha$; $\pi y = \beta$;
 $\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\sin \pi x \sin \pi y - \cos \pi x \cos \pi y = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$-\cos(\pi x + \pi y) = \cos(2\pi x)$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y) = 0$$

$$2 \cos \frac{(2\pi x + \pi x + \pi y)}{2} \cos \frac{2\pi x - (\pi x + \pi y)}{2} = 0$$

$$\frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$3x + y = 1 + 2n$$

$$\frac{\pi}{2} \quad \begin{matrix} 101 \\ 11 \\ 101 \\ 101 \\ 1111 \end{matrix}$$

$$(101; 11) = 1$$

PT-дуга
для

мн
 пусть было есть
 в 11-м классе.
 $C_4^1 \cdot \frac{1}{n} + C_3^1 \cdot \frac{1}{n-1}$

$$n=2; 5$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &(\sin \pi + \sin 2\pi) \sin \pi = \\ &= (\cos \pi + \cos 2\pi) \cos \pi = \\ &= (-1 + 1) \cdot (-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\sin(\arcsin \frac{x}{5}) < \sin(\frac{3\pi}{2} - \arccos \frac{y}{4}); \quad \sin \frac{3\pi}{2} \cos(\arccos \frac{y}{4}) = -1$$

$$\frac{x}{5} < -\frac{y}{4}$$

$$11x > 10n + 5$$

$$-5y = -5 - 10n + 15x$$

$$2,5(C_4^1 \cdot \frac{1}{n} + C_3^1 \cdot \frac{1}{n-1}) = C_k^1 \cdot \frac{1}{n} + C_{k-1}^1 \cdot \frac{1}{n-1}$$

$$\frac{5}{2} \cdot 4 \cdot 3 = k(k-1); \quad k^2 - k = 30; \quad k^2 - k - 30 = 0; \quad k = 6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$C_4^1 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \left(C_3^1 \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} + C_2^1 \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-2}{n-1} \right) + C_1^1$$

вышло 1 не вышло 2 1

$$(x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0;$$

$$xy - 3\sqrt{2}(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + 18\sin\alpha\cos\alpha =$$

$$= xy - 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) + 9\sin 2\alpha \leq$$

$$\leq xy - 15\sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) + 9\sin 2\alpha$$

$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$

было ~~11~~ 11-член.

$$C_4^4 \cdot C_{n-1}^3 + C_4^3 \cdot C_{n-1}^4 + C_4^2 \cdot C_{n-1}^6 + C_4^1 \cdot C_{n-1}^8$$

⊖

Пусть 1 вариант будет. Тогда P, что 2 также

будет: $C_{n-1}^3 + \frac{n-2}{n-1} \cdot C_1^2$

$C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = 84$

$$\frac{\frac{5}{2}(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{n!} = \frac{k!}{n!}$$

$$\frac{5}{2} \cdot 4! = k!$$

60

$C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2!} = 28$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7

