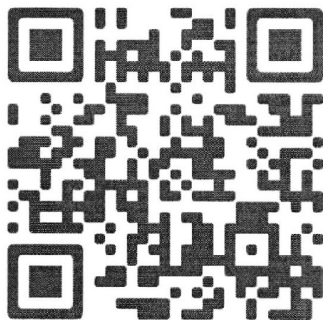




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

Решение: Пусть в т.ч. число A состоит из

n -х одинаковых цифр (пусть это цифра a),

то оно представима в шестнадцатеричном виде:

$$A = \underline{a \cdot 1111}, \text{ где } a \in [1; 9]$$

$$1111 = 707 \cdot 11 \rightarrow A : 707; A : 11 \text{ (при этом } A : 707^2; A : 11^2)$$

т.к. $A \cdot B \cdot C$ является квадратом целого числа,

а число $A : 707$, то число $B : 707$, число $C : 707$

(т.к. $A : 707$, т.к. $A : 11$, т.к. $A : 707^2$)

т.к. C - двузначное число, то $C : 707$, значит,

(р.с. 707 - простое число)

$B : 707 \rightarrow B = 707 \cdot k$, где $k \in \mathbb{Z}$; т.к. B - трехзначное число, то $B = 707; 202; 303; 404; 505; 606; 707; 808; 909$

По условию B содержит хотя бы одну цифру 7, значит, $B = 707$

вероятно к $A \cdot B \cdot C$: $A : 11$ ($A : 11^2$)
 $B : 11$
 $A \cdot B \cdot C$ - квадрат целого числа $\rightarrow C : 11$

значит, $C = 11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99$

(т.к. C - двузначное число)

По условию хотя бы одна из цифр числа C - цифра 7, значит, нам подходит только $C = 77$

В итоге получаем: $A \cdot B \cdot C = (a \cdot 1111) \cdot (7 \cdot 707) \cdot 77 = 7a \cdot (707)^2 \cdot (77)^2$,
 значит, $7a \cdot (707)^2 \cdot (77)^2$ - квадрат целого числа, значит,

$7a$ - квадрат целого числа $\rightarrow a : 7 \rightarrow a = 7$, значит,
 (т.к. $a \in [1; 9]$)

$A = 7777$
 $B = 70707$
 $C = 77$
 $\rightarrow A \cdot B \cdot C = (7 \cdot 707 \cdot 77)^2 = (7777)^2$ - данное число как не подходит

Ответ (7777; 707; 77)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
7 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$k = \frac{7}{x} + \frac{7}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{7}{x-4} + \frac{7}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} \quad (\cdot xy(x-4)(y+4))$$

$$y(x-4)(y+4) + x(x-4)(y+4) + 3(x-4)(y+4) =$$

$$= xy(y+4) + xy(x-4) + 3xy$$

$$(x-4)(y+4)(x+y+3) = xy(x-4+y+4+3) = xy(x+y+3)$$

$$(x+y+3)(xy - 4y + 4x - 16 - xy) = 0$$

$$4 \cdot (x+y+3)(x-y-4) = 0, \text{ значит, } \begin{cases} x+3 = -y \\ x = y+4 \end{cases}$$

(р. 5 не забываем, что $xy(x-4)(y+4) \neq 0$, т.к. $x, y > 0$, то $xy(x-4)(y+4) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$)

$$\begin{cases} x+3 = -y \\ x = y+4 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

Рассмотрим для начала $x = y+4$:

$$M = (y+4)^3 - y^3 - 12(y+4)y =$$

$$= (y+4-y)(y^2+8y+16+y^2+y^2+4y) - 12(y^2+4y) =$$

$$= 4(3y^2+12y+16) - 12(y^2+4y) = 4(3y^2+12y+16 -$$

$$= 3y^2 - 12y) = 4 \cdot 16 = 64 \text{ - пов-во вын-ся, когда}$$

$x = y+4$ - т.к. $y > 0$, то $x = y+4 > 0$, значит, данное

значение $M = 64$ вын-ся при всех $x, y > 0: x = y+4$

Теперь рассмотрим $x+3 = -y$:

$$M = x^3 + (-y)^3 + 12x(-y) = x^3 + (x+3)^3 + 12x(x+3) =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= (x^2 + 3x) \left(\underbrace{x^2 + 6x + 9}_{(x+3)^2} - \frac{(x^2 + 3x)}{x(x+3)} \right) + 72(x^2 + 3x) =$$

$$= (x+3)(x^2 + 3x + 9) + 72(x^2 + 3x) = 2x^3 + 6x^2 + 18x +$$

$$+ 3x^2 + 9x + 27 + 72x^2 + 36x = 2x^3 + 21x^2 + 63x + 27, \text{ значит,}$$

$$M = 2x^3 + 21x^2 + 63x + 27, \text{ где } \begin{pmatrix} x > 0 \\ x \neq 4 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим эту функцию $f(x) = 2x^3 + 21x^2 + 63x + 27$

$$f'(x) = 6x^2 + 42x + 63 = 3(2x^2 + 14x + 21) - \text{замечая, что}$$

при $x > 0 : f'(x) > 0$, значит, $f(x)$ ~~↑↑~~ $\uparrow$ на $x \in (0; +\infty)$

$f(0) = 27$, значит $f(x) \in (27; +\infty)$ при $x > 0$

$$f(4) = 743, \text{ значит, } f(x) \in (27; +\infty) \setminus \{743\} \text{ при } \begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 4 \end{matrix}$$

значит, M принимает все значения: $(27; +\infty) \setminus \{743\}$

иначе получаем, что $M \in (27; +\infty) \setminus \{743\}$

Ответ $(27; +\infty) \setminus \{743\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
7 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$13) a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cdot \cos \pi y$$

$$2 \cdot \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cdot \sin \frac{\pi(y-x)}{2} - \sin \pi y = 2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \cos \pi y$$

$$\left[\cos \frac{\pi(y+x)}{2} = 0 \right.$$

$$\left. \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \sin \pi y = \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \cos \pi y \right.$$

$$\left[\cos \frac{\pi(y-x)}{2} = 0 \right.$$

$$\left. \sin \pi y = 0 \right.$$

$$\left. \cos \frac{\pi(y-x)}{2} = 0 \right.$$

$$\frac{\sin \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \right)} = \frac{\cos \pi y}{\sin \pi y}$$

$$\left[\frac{\pi(y+x)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n \right.$$

$$\left. \begin{cases} \pi y = \pi \cdot m \\ \frac{\pi(y-x)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot l \end{cases} \quad (n, m, l \in \mathbb{Z}) \right.$$

$$\frac{\pi(y-x)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot l \Rightarrow \pi y - \pi x = \pi + 2\pi l \Rightarrow \pi y = \pi x + \pi + 2\pi l \Rightarrow y = x + 1 + 2l$$

$$\left[\begin{cases} x+y = 1+2n \\ y = m \end{cases} \right.$$

$$\left. \frac{m-x}{2} = \frac{1}{2} + l \quad (m, n, l \in \mathbb{Z}) \right.$$

$$\frac{\pi(y-x)}{2} = \frac{\pi}{2} - \pi y + \pi \cdot p$$

$$\left[\begin{cases} y = 1-x+2n \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ y = m \quad (m, l \in \mathbb{Z}) \\ x = m-2l-1 \quad (m, l \in \mathbb{Z}) \\ y = \frac{x+1+2p}{3} \quad (p \in \mathbb{Z}) \end{cases} \right.$$

(Заметим, что пары $(m-2l-1; m)$, образуют един-во пар

чисел $(x; 1-x+2n)$ и $(x; \frac{x+1+2p}{3})$

$(n, p \in \mathbb{Z})$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Отвечая: $(x; 7-x+2n); \text{ ~~(x; 7-x+2n);~~ } (x; \frac{x+7+2n}{3})$
 $(n; n; \frac{x}{3}; n \in \mathbb{Z})$

б) Рассмотрим неравенство:

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2} = -(\arcsin \frac{y}{4} + \arccos \frac{y}{4})$$

$$\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0 \text{ — заметим, что:}$$

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{7} \geq 0 \\ \arccos \frac{y}{4} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} \geq 0 \text{ — минимум}$$

рав-во выполн-ся когда $\begin{cases} \frac{x}{7} = 1 \\ \frac{y}{4} = 1 \end{cases}$

значит, наше нр-во будет

вып-ся тогда, когда

$$\begin{cases} |\frac{x}{7}| \leq 1 \\ |\frac{y}{4}| \leq 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{~~(x; y) \neq (7; 4)~~}$$

из н. а) мы получили следующий набор $(x; y)$:

$(x; 7-x+2n); \text{ ~~(x; 7-x+2n);~~ } (x; \frac{x+7+2n}{3})$
 $(n; n; \frac{x}{3}; n \in \mathbb{Z})$

Рассмотрим пару $(x; 7-x+2n)$:

$$\begin{cases} |x| \leq 7 \\ |7-x+2n| \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 \leq x \leq 7 \\ -5 \leq 2n-x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x; 7-x+2n) \neq (7; 4)$$

~~$(-7; 3); (-7; -1); (-7; -3); (-7; -5); (-7; -7); (-6; 2);$~~
 ~~$(-6; 0); (-6; -2); (-6; -4); (-5; 3); (-5; 1); (-5; -1);$~~

Заметим, что если $x \neq 7$, то $2n-x = -5; -3; -1; 1; 3$ —

— 5 вариантов, все нечетных $x: 7-7; 5; -3; -1; 1; 3; 5; 7$ —

— 8 вариантов, значит всего таких пар: $5+3=8$

Заметим, что ~~здесь~~ мы посчитали вариант $(x; y) = (7; 4)$,
 значит, всего вариантов должно быть 39



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- Если $x = 2$, то $2n - x = 2$; $0; -2; -4 = 4$ вариантов
Всего вариантов x : $6; 4; 2; 0; -2; -4; -6 = 7$ вариантов

→ всего вариантов 128

номер варианта, что код - в пар $(x; 7 - x + 2n) : 28 + 39 = 67$
(764)

Рассмотрим $(m - 2t - 7; n)$
($n \in \mathbb{Z}$)

Также мы уже установили, что
какие пары чисел вида $(2k; 2p)$, где

а также $(2t; 2n + 1)$, где
 $(-2 \leq n \leq 7)$
 $(-4 \leq t \leq 3)$ и $n \in \mathbb{Z}$

Заметим, что $(m - 2t - 7; n)$ всегда в пар-во
пары $(m; t \in \mathbb{Z})$

~~мы рассмотрим пары~~

не будем в пар-во мнх пар, которые мы рассматривали
пары $(m; k)$ числа m и k имеют парную разность

Рассмотрим $(x; m \in \mathbb{Z})$

Также мы уже установили, что пара
какие пары вида $(x; x - 7 + 2t)$

Рассмотрим $(x; \frac{x+7+2p}{3})$ ($p \in \mathbb{Z}$)

$-7 \leq x \leq 7$
 $-4 \leq \frac{x+7+2p}{3} \leq 4$ - Данное число должно быть целым
 $(x \neq 4; \frac{x+7+2p}{3}) \neq (7; 4)$

$x+7+2p = -7; -9; -6; -3; 0; 3; 6; 9; 12$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что числа $x; x+1+2r$ — имеют разную четность,
значит, $x; \frac{x+1+2r}{3}$ — тоже имеют разную четность,
но все пары такого вида мы уже посчитали,
и когда рассматривали пары чисел: $(x; 2-x+2r)$,
значит, все пары чисел $(x; \frac{x+1+2r}{3})$ входят в мы-во
пар чисел $(x; 2-x+2r)$.
В итоге, рассмотрев все пары, мы получаем, что
всего сармантов 67
Ответ: 67



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из **1**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

РЧ Решение:

Пусть n -кол-во ~~одна~~ **одинадцатиклассников**
 m -кол-во **сильмов**, которые **выделим в конце**
месяца

Вероятность $P(A)$ в начале месяца, где Кетя и Кася
попали бы вместе на концерт:

$$P(A) = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{72}{n(n-1)}$$

4.3.2

Вероятность $P(B)$ в конце месяца, где Кетя и Кася

попали бы вместе на концерт:

$$P(B) = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m} = \frac{(n-2)!}{(n-2)!(n-m)!} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)}$$

$m!(n-m)!$

По условию: $P(B) = 11 \cdot P(A)$:

$$\frac{m(m-1)}{n(n-1)} = \frac{11 \cdot 72}{n(n-1)}; \quad m^2 - m - 11 \cdot 72 = 0$$

$(m-72)(m+11) = 0$, значит, $(m=72)$

$m = 72$

Ответ: 72



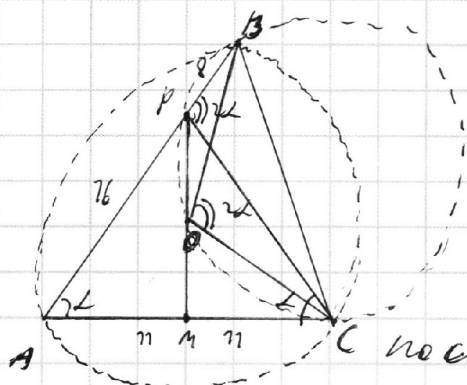
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

25



Решение: Пусть $\angle BAC = L$,
тогда (т.к. $\angle BOC$ — центральный):

$$\angle BOC = 2L$$

1) $\angle BPC$ — впис. чл.-ник, значит по св-ву впис. чл.-ника:

$$\angle BPC = \angle BOC = 2L;$$

2) Рассмотрим $\triangle APC$; $\angle APC$ — ^{вн}внешний угол, значит,

$\angle BPC = \angle PAC + \angle ACP \Rightarrow \angle ACP = \angle BPC - \angle PAC = 2L - L = L = \angle PAC$,
значит, $AP = PC$ (по опр-ю)

3) Пусть M — ср. AC , тогда по св-ву вис. т.к.: $PM \perp AC$

(п. 5 вклого опреде. $OM \perp AC$, т.к. значит $O \in PM$)

$AM = 11$; $AP = 16$, значит, по т. Пифагора (в $\triangle APM$):

$$PM = \sqrt{AP^2 - AM^2} = \sqrt{256 - 121} = \sqrt{135} = 3\sqrt{15}, \text{ значит}$$

$$\sin \angle PAM = \sin L = \frac{PM}{AP} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$4) S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin L = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{3 \cdot 11 \cdot 3\sqrt{15}}{2} =$$

$$= \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{99\sqrt{15}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

7 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6
$$\begin{cases} (x+4\sin 2)(y-4\cos 2) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases} - \text{Рассмотрим 7-е нерав-во:}$$

Заметим, что $(-4\sin 2)^2 + (4\cos 2)^2 = 16$,

~~Заметим, что $(-4\sin 2)^2 + (4\cos 2)^2 = 16$ и $(4\sin 2)^2 + (4\cos 2)^2 = 16$~~

Построим мн-во точек $(x; y)$ на плоскости,

которые удовлетворяют системе (пусть ~~пусть~~

$x^2 + y^2 \leq 36$ — окр-ть ω с центром $O(0;0)$ и радиусом

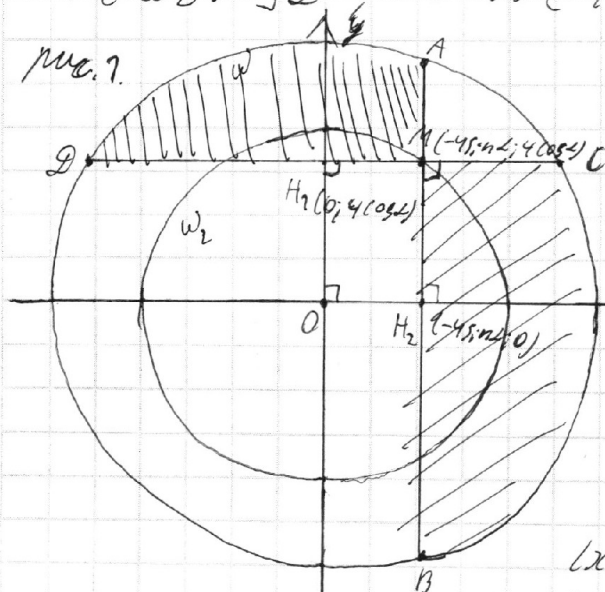
$R_1 = 6$

— т.к. $(-4\sin 2)^2 + (4\cos 2)^2 = 16$, то M принадлежит

окр-ти ω_2 с центром $O(0;0)$ и радиусом $R_2 = 4$

(т.е. легко заметить, что для любой точки $M' \in \omega_2$: $\exists L'$ что $M'(-4\sin 2'; 4\cos 2')$).

рис. 7.



Пусть $H_1 \in Oy$: $MH_1 \perp Oy$

$H_2 \in Ox$: $MH_2 \perp Ox$

$MH_1 \cap \omega = D$; C

$MH_2 \cap \omega = A$; B , тогда

$\angle MH_1MH_2 = 36^\circ = \angle OH_1A -$

$= \angle OH_2B - \angle H_1OH_2 = 90^\circ$

$H_1(0; 4\cos 2)$; $H_2(-4\sin 2; 0)$

Заметим, что нр-во

$(x+4\sin 2)(y-4\cos 2) \leq 0$ — это

мн-во таких точек $(x; y)$, которые
будут либо выше CD , но ниже AB , либо ниже CD , но выше AB



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из этого наша фигура $P(L)$ — фигура, ~~которая~~.

которая закрашена на рисунке (см. рис. 7)

Найдем ^{Максимальный} периметр M фигуры $P(L)$:

$$M = CD + AB + \cup AD + \cup CD$$

Рассмотрим $\cup AD + \cup CD$: если рассмотрим их угловые функции $\cup AD^\circ$ и $\cup CD^\circ$, то получим:

$$\frac{\cup AD^\circ + \cup CD^\circ}{2} = \angle CMB = 90^\circ \Rightarrow \cup AD^\circ + \cup CD^\circ = 180^\circ, \text{ значит,}$$

сумма длин $\cup AD + \cup CD$ равна длине окружности;

$$\cup AD + \cup CD = \frac{2\pi \angle CMB}{360^\circ} \cdot R(\omega), \text{ где } R(\omega) \text{ — радиус окружности } \omega;$$

$$\cup AD + \cup CD = \frac{180^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot R = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6 = 6\pi,$$

значит,

$$M = 6\pi + AB + CD \text{ — найдем макс. значение } AB + CD.$$

Рассмотрим CD : ~~по теореме Пифагора (в $\triangle OMC$):~~

$$\text{Второе } CD = OM = 6 \Rightarrow \triangle OMC \text{ — равнобедренный, значит, по теореме Пифагора (в } \triangle OMC):$$

$$OM = OM; OM_1 = OM_2$$

$$\text{По теореме Пифагора (в } \triangle OMC): CM_1 = \frac{1}{2} CD = \sqrt{6^2 - OM_1^2} =$$

$$= \sqrt{36 - 16 \cos^2 2} \Rightarrow CD = 2\sqrt{36 - 16 \cos^2 2}$$

$$\text{Аналогично для } AB: AB = 2\sqrt{36 - 16 \sin^2 2}, \text{ значит,}$$

$$M = 6\pi + 2(\sqrt{36 - 16 \cos^2 2} + \sqrt{36 - 16 \sin^2 2}) \leq 6\pi +$$

$$+ 2(\sqrt{2} \cdot \sqrt{36 - 16 \cos^2 2} + \sqrt{36 - 16 \sin^2 2}) =$$

$$= 6\pi + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{72 - 16} = 6\pi + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{56} = 6\pi + 8\sqrt{7};$$

по теореме
о суммах
квадратов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В итоге макс. знач-ие M равно $6\pi + 8\sqrt{7}$, при этом
рав-во дост-ся, когда $\sqrt{36 - 76 \cos^2 \angle} = \sqrt{36 - 76 \sin^2 \angle} \Leftrightarrow$
 $4|\cos \angle| = 4|-\sin \angle| \Leftrightarrow |\tan \angle| = 1 \Leftrightarrow \angle = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi \cdot n}{2} \quad (n \in \mathbb{Z})$

Ответ: $M = 6\pi + 8\sqrt{7}$

дост-ся при $\angle = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi \cdot n}{2} \quad (n \in \mathbb{Z})$

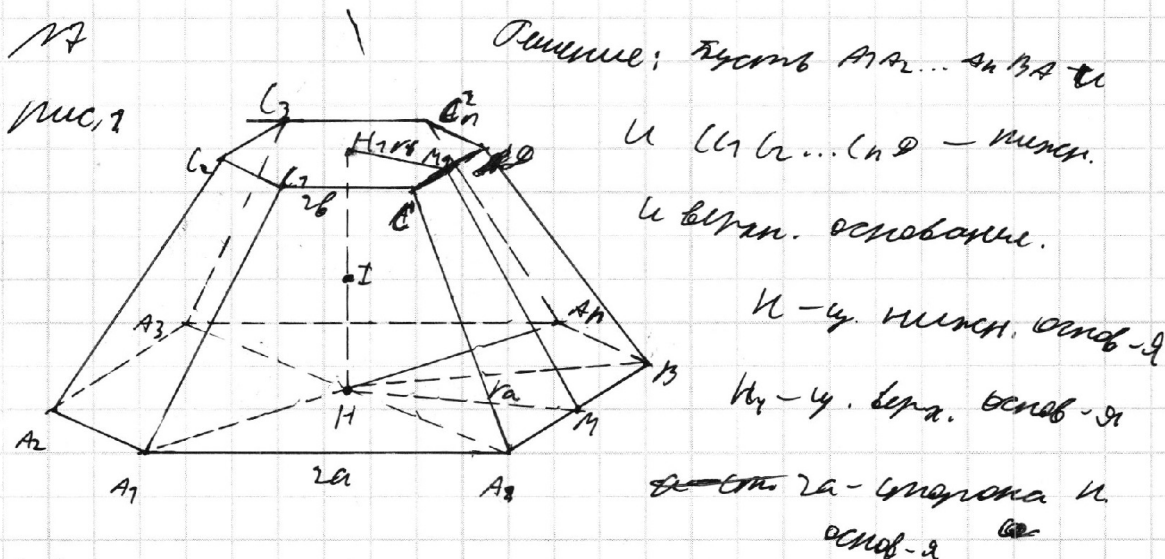


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$2b$ — сторона n_1 основ-я

r_a — радиус, впис. окружн. n основ-я

r_b — радиус, впис. окружн. n_1 основ-я

M — центр AB ; M_1 — центр CD ; I — центр сфер ω

$\odot$ — ч. сферы ω

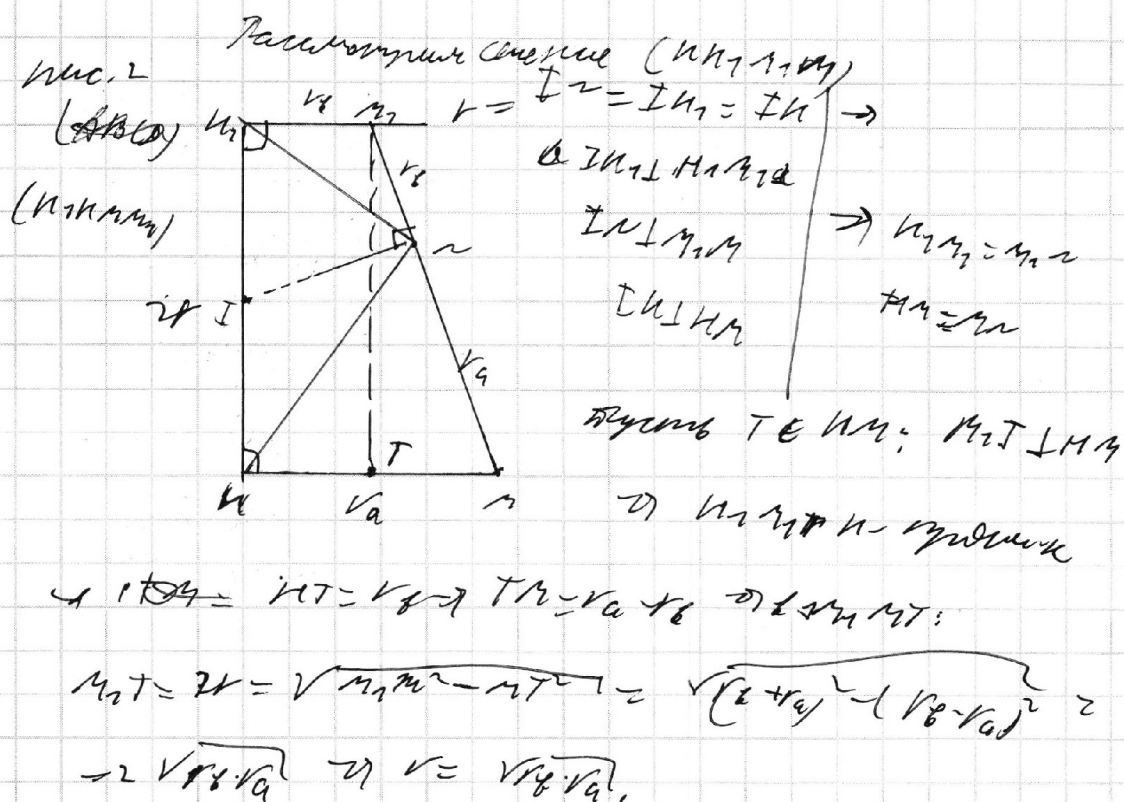
правильная усеченная пирамида симметрична относительно своей оси MM_1 , по ч. сфер ω и $\odot$ можно считать MM_1 .

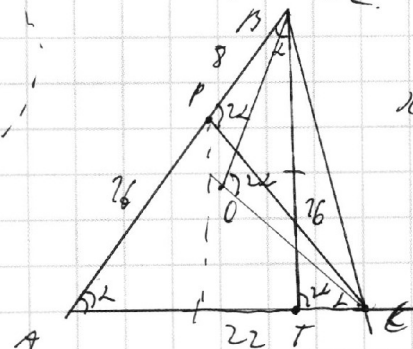
Также M — центр $AB \Rightarrow IM = r_a$; M_1 — центр $CD \Rightarrow M_1 M_1 = r_b$

Рассмотрим $\odot \omega$: Пусть она касается $(AB \odot)$ в

точке L ; внутренне замкнем $2b$ MM_1 (т.к. ω и $(AB \odot)$ лежат на одной плоскости $MM_1 M_1$)

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Поряда QR-кода недопустима!





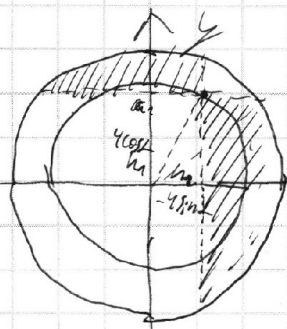


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$y \leq 4 \cos \alpha$$
$$x \geq 4 \cos \alpha - 4 \sin \alpha$$

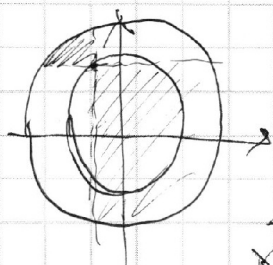


$$2\sqrt{36-h_1^2} + 2\sqrt{36-h_2^2} \leq$$

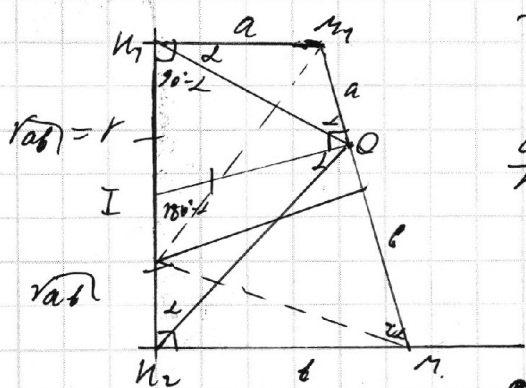
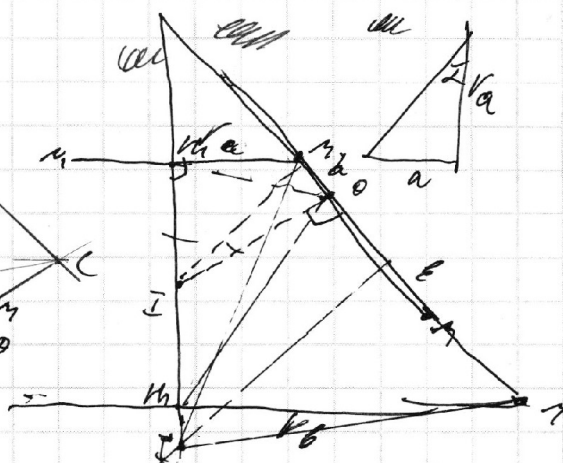
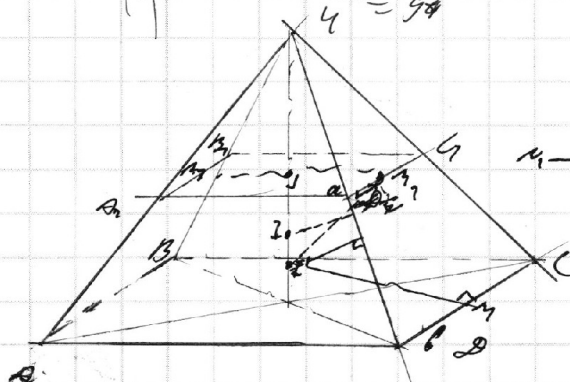
$$6a-4=56 \leq 2(\sqrt{36-h_1^2} + \sqrt{36-h_2^2}) \leq$$

$$72-16 \leq 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{36 \cdot 2 - (h_1^2 + h_2^2)} =$$

$$22\sqrt{2} \cdot \sqrt{8 \cdot 2} = 8\sqrt{2} \cdot 9 \cdot 2 = 16$$



$$\frac{36 \cdot 2}{4} = 9 \cdot 2$$



$$\frac{a}{r} = \frac{h_{10}}{h_{20}} = \frac{r}{b} \Rightarrow ab = r^2$$

$$r_a \cdot r_b = r^2$$

$$r^2$$

$$r_b \cdot r_a = r^2$$
$$2rabl = ra + rb$$

$$\frac{K}{r_a + r_b} = \frac{r}{2rab}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

27.

$$a a c a = \frac{707}{11}$$

$$a = 7777$$

$$a \in [1, 9]$$

$$a \cdot 1111$$

$$707 \cdot 11$$

$$a \cdot 7777$$

$$707$$

$$11$$

$$a \cdot 7777 \cdot 707 \cdot 11 =$$

Авс

$$= (707)^2 \cdot (11)^2 \cdot a \cdot 7 = 11^2 \cdot a \cdot 7 \in$$

$$B = 77$$

$$707$$

$$202$$

$$303$$

$$404$$

$$505$$

$$606$$

$$707$$

$$808$$

$$909$$

$$707 - 2; 315; 7; 77;$$

$$-(y+7)^3 - y^3 + 12(y+3)y =$$

$$= -(y+3+y)(y^2+6y+9+y^2 - y^2 - 3y) + 12(y^2+3y)$$

$$363 \quad 356$$

$$336 + 12$$

$$380 \cdot 1$$

$$+ 363 \quad 243$$

22

$$K = \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{x+y} = \frac{2}{x-4} + \frac{2}{y+4} + \frac{3}{x+y-4y+4x-76} \cdot 24$$

$$y+2=t; \quad x-2=p$$

$$\frac{2}{p+2} + \frac{2}{t-2} + \frac{3}{p+t-76}$$

$$128 + 336 + 252 + 27 =$$

$$y(2-4)(y+4) + x(x-4)(y+4) + 3(x-4)(y+4) = 2xy(y+4) +$$

$$x + 2y(x-4) + 3xy$$

$$(x+y+3)(x-4)(y+4) = 2xy(x+y+3)$$

$$(x+y+3)(xy-4y+4x-76-2xy) = 0$$

$$y(x+y+3)(x-y-4) = 0$$

$$x \neq y \Rightarrow \begin{cases} x = y+4 & y=1 \\ x = -y-3 & x=5 \\ xy \neq 0 \\ (x-4)(y+4) \neq 0 \end{cases}$$

$$2B = x$$

$$(y+4)^3 - y^3 - 12(y+4)y =$$

$$= y(y^2+8y+16+y^2+4y+y^2) - 12y^2 - 48y =$$

$$= y(3y^2+12y+16) - 12y^2 - 48y = 64$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x+y+z=0$$

$$x = -y-3; \quad z = x+3 = -y$$

$$M = x^3 - y^3 - 72xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 72xy = m - n = 7 + 26$$

$$= (2x+3)(x^2 - x(x+3) + x^2 + x+9) + 72x(x+3)$$

$$(2x+3)(x^2 + 3x + 9) + 72x^2 + 36x$$

$$2x^3 + 6x^2 + 18x + 3x^2 + 9x + 27 + 72x^2 + 36x$$

$$2x^3 + 27x^2 + 63x + 27 = 0$$

$$x = -2 \quad x = 7 \quad x = 2$$

$$y = -5. \quad M = 8 + 125 + 720 = 253 \quad m = 7 + n$$

$$\frac{7}{2} - \frac{7}{5} = \frac{3}{10} = -\frac{7}{2} - 7 + \frac{3}{2} = 0$$

$$76 + 84 + 726 + 27 = 253$$

$$6x^2 + 42x + 63$$

$$= (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \right) \cdot \sin \pi y = \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(y-x)}{2} - \cos \pi y$$

$$\frac{\pi(y-x)}{2} = \frac{\pi}{2} \pi y = \pi \left(\frac{\pi}{2} - \pi y \right)$$

$$\frac{\pi(y-x)}{2} = \frac{\pi}{2} - \pi y$$

$$\frac{3\pi y}{2} - \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi y$$

$$\frac{3\pi y}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi y$$

$$\frac{\pi(y-x)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi y \quad \frac{\pi \cdot 1 - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot 6 \quad \frac{\pi x + \pi}{2} = \frac{\pi \cdot 1 - \pi \cdot 6}{2} = \frac{\pi \cdot 1}{2}$$

$$\pi y = \pi \cdot 0$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 6 - 1 \end{cases} \quad (6, 1, 6, 7)$$

$$34 - x = 7 + 26$$

$$= -\arccos \left(\frac{4}{5} \right) =$$

$$\frac{x+7}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x+7=1$$

$$\arccos \rightarrow \arcsin \frac{4}{5} - \frac{\pi}{2} =$$

$$\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{4}{5}$$