



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

р/1

Предположим $A = \overline{aaaa} = a \cdot \underbrace{1000}_9$, где a - некоторая ненулевая цифра, тогда

$$ABC = \underbrace{100}_9 \cdot a \cdot BC = 100 \cdot 10 \cdot a \cdot B \cdot C$$

100 - простое число, поэтому B должно делиться на 100 , чтобы ABC было абсурдом (или C не может: 101 , т.к. C - цифра) или 7 (или 11), т.к. C - цифра B и 7^4

но трёхзначное: $101 \Rightarrow 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 \Rightarrow B = 707$

Значит $ABC = 100 \cdot 101^2 \cdot 7 \cdot a \cdot C$. Остатки

перебрать варианты a и C , где a - ненулевая цифра, C - двузначное с хотя бы одной 1 . При этом $ABC : 7$ и 11 , но 7 и абсурдом

то можно быть просто 7^2 и 11^2 . Переберём:

$a=1 \Rightarrow C: 77$ не годит. $a=2 \Rightarrow C: 277$ не годит. $a=3 \Rightarrow C: 377$ не годит. $a=4 \Rightarrow C: 477$ не годит. $a=5 \Rightarrow C: 577$ не годит. $a=6 \Rightarrow C: 677$ не годит. $a=7 \Rightarrow C: 777$ не годит. $a=8 \Rightarrow C: 877$ не годит. $a=9 \Rightarrow C: 977$ не годит. Почему, то C не годит: $7 \cdot 11$, т.к. $a \Rightarrow$

$C=77$ не годит; $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Значит единств. вариант это $a=7$. Ответить на это

$C: 11$ и содерж. цифру 1 - это только $C=11$.

Ответ: (7777, 707, 11)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по условию: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$

$\Leftrightarrow \frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3=0 \\ xy=(x-4)(y+4) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3=0 & (1) \\ x-y-4=0 & (2) \end{cases}$ Решим систему:

(1): не имеем + и $x > 0$ и $y > 0$ по ум.

Значит рассмотрим только (2); заметим, что:

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = (A+B+C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA) \quad \forall A, B, C$$

поэтому подставив вместо $A = x$; $B = -y$

$C = -4$, получим: $x^3 - y^3 - 4^3 - 3 \cdot x \cdot (-y) \cdot (-4)$

$= (x - y - 4) \cdot (\dots)$, но $x - y - 4 = 0$

но у нас $M = x^3 - y^3 - 12xy$ можно

выразить $y \Rightarrow x^3 - y^3 - 12xy = 0 + 4^3 =$

$= 64$

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a). $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y^3 = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$

Обозначим $\pi x = \alpha$; $\pi y = \beta \iff$

$(\sin \beta - \sin \alpha) \sin \beta = (\cos \beta + \cos \alpha) \cos \beta$

$\cos^2 \beta - \sin^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 0$

$\cos 2\beta + \cos(\alpha - \beta) = 0 \iff$ (по формуле суммы косинусов)

~~$\cos \frac{\alpha - \beta + 2\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta - 2\beta}{2} = 0$~~

$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - 3\beta}{2} = 0$

$\left[\begin{aligned} \frac{\alpha + \beta}{2} &= \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{\alpha - 3\beta}{2} &= \frac{\pi}{2} + \pi n \end{aligned} \right], n \in \mathbb{Z}$. Обратная замена:

$\left[\begin{aligned} \pi x + \pi y &= \pi + 2\pi n \\ \pi x - 3\pi y &= \pi + 2\pi n \end{aligned} \right] \iff \left[\begin{aligned} x + y &= 1 + 2n \\ x - 3y &= 1 + 2n \end{aligned} \right]$

$\iff \left[\begin{aligned} y &= 1 + 2n - x \\ y &= \frac{x - 1 - 2n}{3} \end{aligned} \right], n \in \mathbb{Z}$

Значит p -я пара имеют вид $\left[\begin{aligned} (x; 1 + 2n - x) \\ (x; \frac{x - 1 - 2n}{3}) \end{aligned} \right]$, где $n \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

б). $\arcsos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\pi/2$. по свр.
обратных тригоном. ф-ий: $\arcsos \in [0, 2\pi]$

$\arcsin \in [-\pi/2; \pi/2] \Rightarrow \arcsos - \arcsin \in [-\pi/2, 3\pi/2]$, а значения перейдут все пары (x, y) кроме тех при которых:

$$\begin{cases} \arcsos \frac{x}{7} = 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} = \pi/2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{из условия равенства} \\ -\pi/2 \end{array} \right)$$

\Downarrow т.е. по условию $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{— не подходит}$$

Вероятно ли что $(7, 4)$ — р-е ур-я? (a, b) — р-е ур-я $(a, b + 2m\pi)$
 $(7; 4 + 2 \cdot 5 = 14)$. Остальные пары

следует проверить на свр. $\frac{x}{7} \in [-1; 1]$

и $\frac{y}{4} \in [-1; 1]$, а также убедиться ли

р-ли ур-я? $\Leftrightarrow x \in \{-7; -6; -5; \dots; 7\}$

$y \in \{-4; -3; -2; \dots; 4\}$, кроме $(7, 4)$

р-е ур-я: $\left[\begin{array}{l} (x, 1 + 2m - x) \quad (*) \\ (x, \frac{x - 1 - 2m}{3}) \quad (v) \end{array} \right.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3 т. логич.

Заметим, что из $(*)$ будут подходить
все (x, y) вида $x \equiv 2, y \equiv 2$ и $x \equiv 2, y \equiv 2$
т.е. $2 + 2n - x \equiv x + 2$. Таким образом
остаются рас-ты пары, где $x \equiv 2$ и $y \equiv 2$
либо $x \equiv 2$ и $y \equiv 2$. Они должны подх
под (\heartsuit) , т.е. $y = \frac{x - 2 - 2n}{3} \in \mathbb{Z}$
 ~~$y \in \mathbb{Z}$~~ Однако $y = \frac{x - 2 - 2n}{2} \equiv x + 2$
потому что x и y разной четности.

Ответ: все наборы (x, y) вида:

$$x \equiv y \pmod{2} \quad x \in \{-7, -6, \dots, 7\}, \text{ и } y \in \{-4, -3, \dots, 4\}, \text{ и } (7, 4)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть у gentlemen n . n^4 - во бшето в конце месеца k . Найдем вероятность в начале всего способов распределить 4 бшета м/ч и gentlemen: C_n^4 . при этом подх шоста, подх 13 и 1 бшето - это для fix бшето мч и еще выбрать 2ух gentlemen из $n-2$:

C_{n-2}^2 . Тогда в начале вероятности

$$P_{начало} = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)(n-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{(n-2)!}{2! \cdot (n-4)!} = \frac{n!}{n!} = \frac{12}{n \cdot (n-1)}$$

В конце

Асимптотически

$$P_{конец} = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)!}{(k-2)! (n-k)!} \cdot \frac{k!}{n!} = \frac{k \cdot (k-1)}{n(n-1)}$$

по условию

$$\frac{12 \cdot 12}{n(n-1)} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ и т.д. по условию.

$$k(k-1) = 11 \cdot 12 = 132 \text{ — это кв. уравн.} \Rightarrow$$

не более двух корней, ~~уравнение по~~

$$k = 12 \text{ и } k = -11 \text{ корней.} \Rightarrow \text{так как}$$

корни. из всех корней по условию

$$\text{задача только } k = 12$$

Ответ: 12 билетов

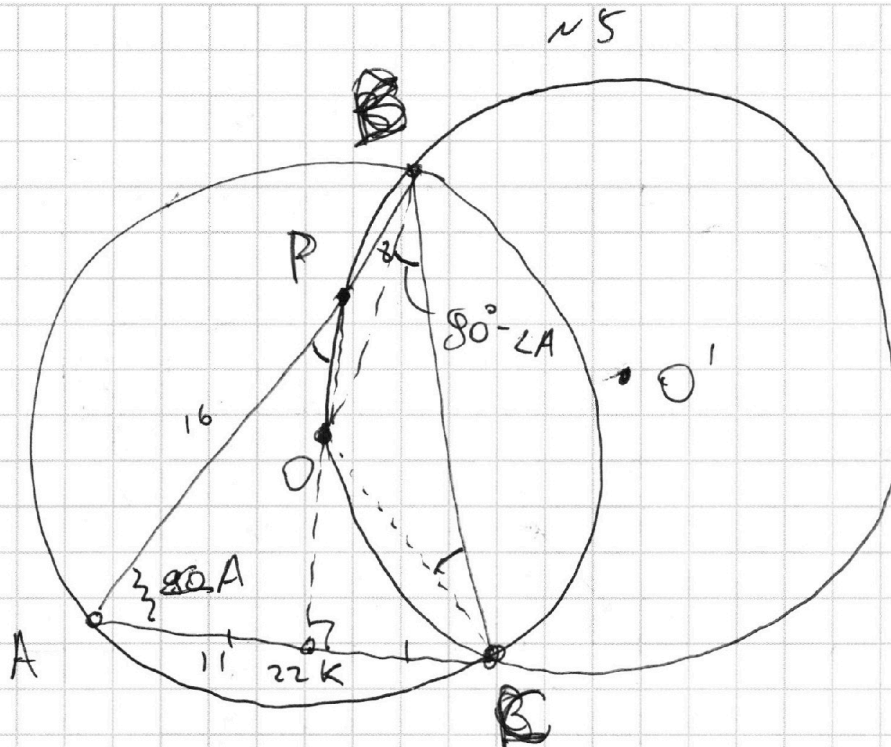


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$\angle BOC = 2\angle BAC$ (центр. и впис. углы)

по т.п. $\triangle BOC$ - р/б ($BO = OC = R_0$), то

$\angle OBC = 90 - \angle BAC = \angle OCB$. при этом,

т.к. $\triangle OCB$ - впис., то $\angle OCB = 30 - \angle POB$

$\Rightarrow \angle APO = \angle OCB = 90 - \angle BAC$, тогда

если $K = (PO) \cap (AC)$, то $PK \perp AC$ ($\angle BAC$
+ $\angle APK = 90^\circ$)

при этом, т.к. $OK \perp AC$, OK - серед. перп.

$\Rightarrow AK = KC = 11$. Тогда $\cos \angle A = \frac{11}{16}$

$\Rightarrow \sin \angle A = \frac{3\sqrt{15}}{16}$. Тогда $S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \angle A}{2}$

$= \frac{24 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16}}{2} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$. Ответ: $\frac{99\sqrt{15}}{2}$



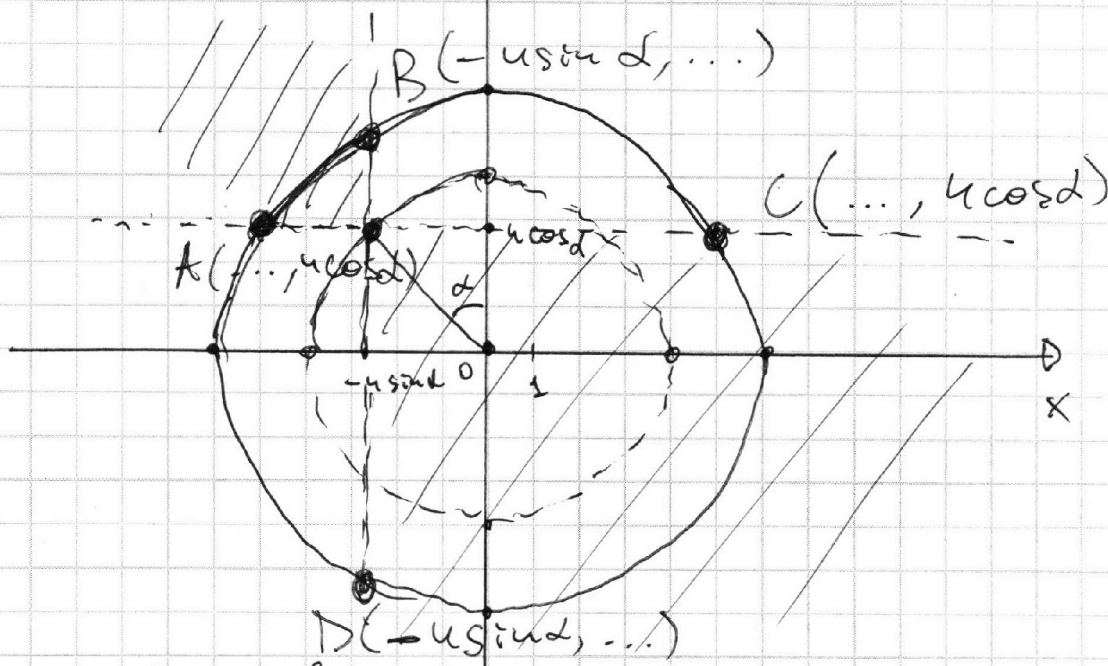
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases} \leftarrow \text{круг с центром } (0,0) \text{ и радиусом } 6$$



где (1) n -ва углублены сир-то радиуса 4 и отложим угол α от OX (или OY) (или OC) таким образом $4 \cos \alpha$ точка пересечения сир-то имеет коорд $(-4 \sin \alpha; 4 \cos \alpha)$ и область углов. n -ва (2) обозначена штрихом. Таким образом граница $P(\alpha)$ это две дуги сир-ты и два отрезка $(AB; AC; CB)$



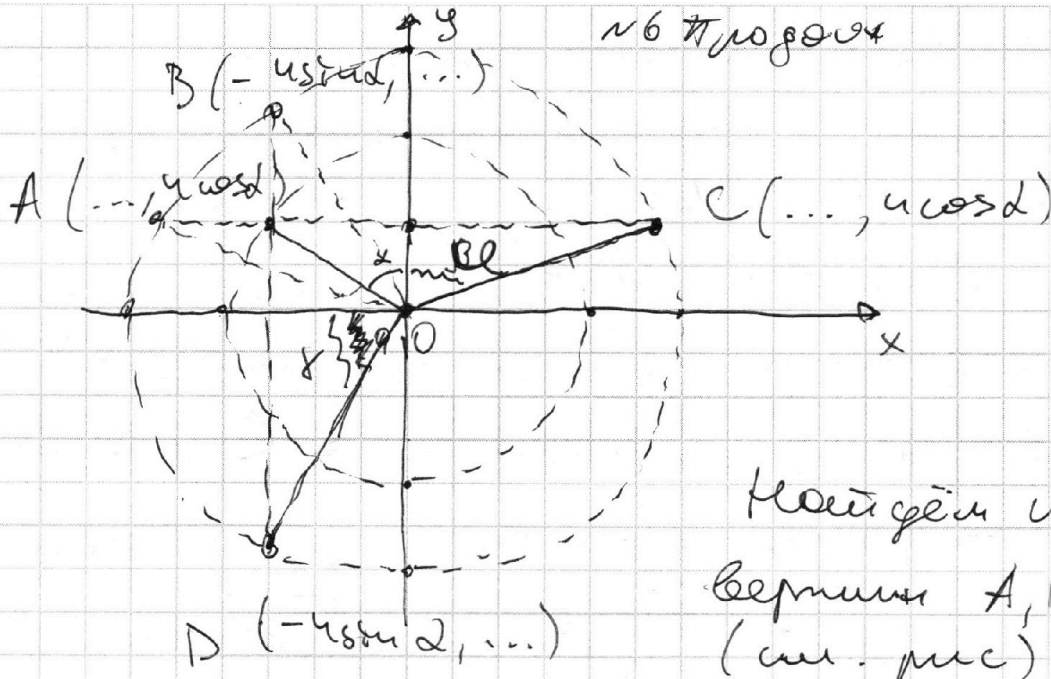
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Обозначим $\angle COY = \alpha$. Тогда: $\cos \alpha = \frac{2}{3} \cos \alpha$. При этом $AC = 2 \cdot 6 \cdot \sin \alpha = 12 \sin \alpha$; пусть $\angle DO(-x) = \delta$. Тогда: $\cos \delta = \frac{2}{3} \sin \alpha$, при этом $BD = 2 \cdot 6 \cdot \sin \delta = 12 \sin \delta$, найдем суммарный угол:

$$\widehat{CD} = 6 \cdot \angle DOC = 6 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} - \delta \right) = 6 \cdot \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha - \delta \right).$$

$$\widehat{AB} = 6 \cdot \angle AOB = 6 \cdot \left(\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \right) = 6 \cdot \left(\alpha + \delta - \frac{\pi}{2} \right).$$

Тогда заметим,

то $\widehat{CD} + \widehat{AB} = \frac{6 \cdot 3\pi}{2} - \frac{6 \cdot \pi}{2} = 6 \cdot \pi = \text{const}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит $\overline{AB} + \overline{CD} = \text{const}$, не зависит от выбора точек A, B, C, D . Значит нам необходимо найти $\max(\overline{AB} + \overline{CD})$, т.е. $\max(12 \sin \alpha + 12 \sin \beta)$, где $\cos \alpha = \frac{2}{3} \cos \delta$
 $\cos \beta = \frac{2}{3} \sin \alpha$. При этом ясно, что α и β - острые, то $\sin \alpha$ и $\sin \beta > 0$, поэтому:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \delta} = \\ &= \frac{\sqrt{9 - 4 \cos^2 \delta}}{3}; \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \delta} \\ &= \frac{\sqrt{9 - 4 \sin^2 \delta}}{3}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \max \left(\frac{\sqrt{9 - 4 \cos^2 \delta}}{3} + \frac{\sqrt{9 - 4 \sin^2 \delta}}{3} \right)$. Из н-ва м/у средним арифметич и ср. квадр:

$$\frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{2} \leq \sqrt{\frac{A+B}{2}}$$

А значит поровну вместо $A = 9 - 4 \cos^2 \delta$

$$B = 9 - 4 \sin^2 \delta : \frac{\sqrt{9 - 4 \cos^2 \delta} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \delta}}{2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{18 - 4}{2}} = \sqrt{7}, \text{ при } 9 - 4 \cos^2 \delta = 9 - 4 \sin^2 \delta$$

достигается при $9 - 4 \cos^2 \delta = 9 - 4 \sin^2 \delta$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 6π логарифм.

$$\text{Значит } \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{и } \max(AB + CD + AC + BD) = 6\pi + 8\sqrt{7}$$

$$\text{Ответ: } 6\pi + 8\sqrt{7}, \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \left. \vphantom{\alpha} \right\} k \in \mathbb{Z}$$

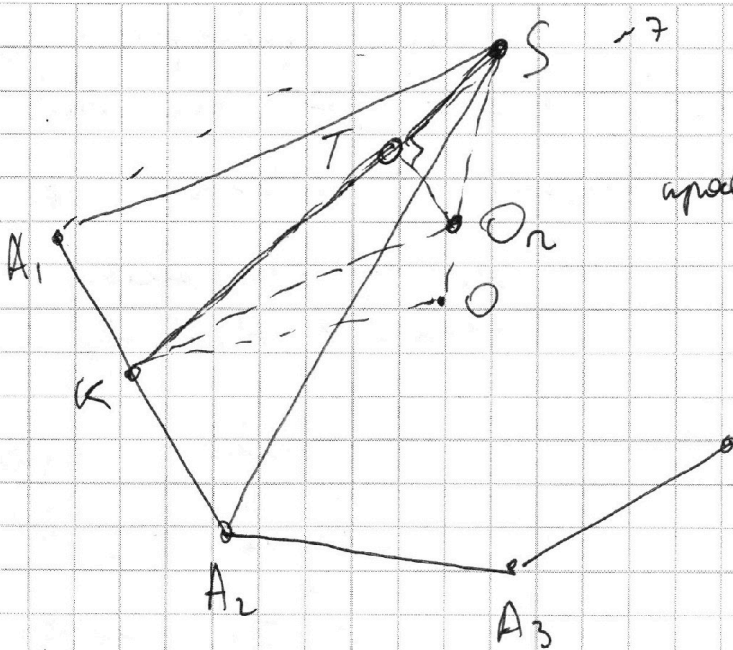


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



отметим O - центр
равностороннего
треугольника $A_1A_2A_3$

K - середина
 A_1A_2 .

$SO \perp (A_1A_2A_3)$

т.е. пирамида
равносторонняя

$OK \perp A_1A_2 \Rightarrow$

$SK \perp A_1A_2$ (т.е.

это означает, что $(SOK) \perp (SA_1A_2)$ (т.е. перпендикулярность двух плоскостей)

$OK \perp A_1A_2$. Третиоугольником TKO $SK \perp$
и A_1A_2

T - точка касания, тогда т.е. \exists - T -
которая касается всех ребер, и T - ребро
усеченной пирамиды лежит в (SA_1A_2)

$\Rightarrow O_n T \perp SK$, т.е. SO -линия пересекет
 $(SOK) \perp (SA_1A_2)$, а также $O_n \in SO$, т.е.

точки $\in SO$ равноудалены от ребер

треугольника, но тогда $KO_n = TO_n$ и $\angle KTO_n = \frac{\pi}{2}$

\Rightarrow конфигурация невозможна (не имеем
решения Δ -и с углами по 90°), это означает



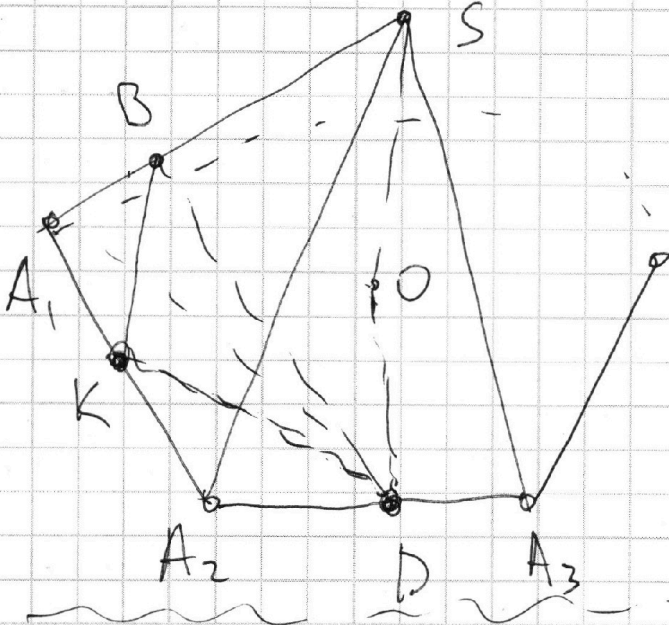
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

это $K \equiv T$. Однако такая конфигурация возможна только когда усеченная пирамида — тетраэдр, т.е. число ≥ 3 том случае $\in (A_1 A_2 A_3) \Rightarrow$ т.е. (то же самое сфера $(A_1 A_2 A_3)$)

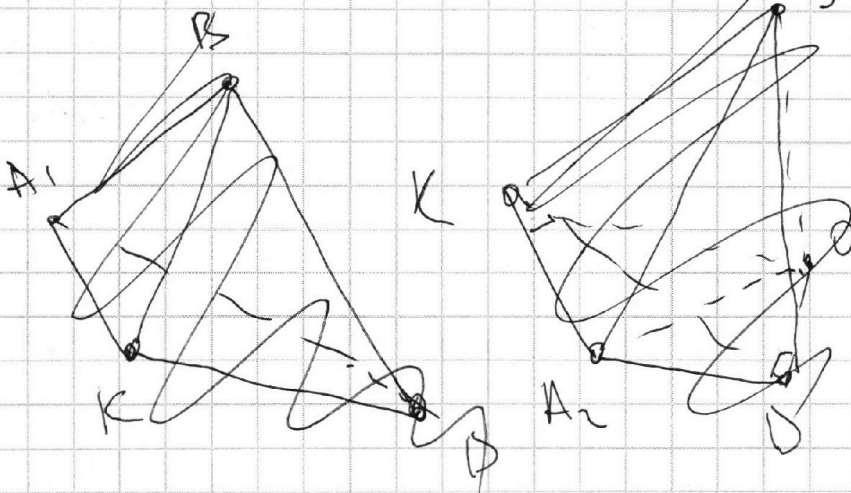


Однако в каждой сфере $B \in S$

т.е. т.е. т.е. сфера усеченная пирамида

Однако тогда $B \in S \Rightarrow$ усеченная пирамида

$S \cap A_1 A_2 A_3$



Невозможна

конфигурация.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

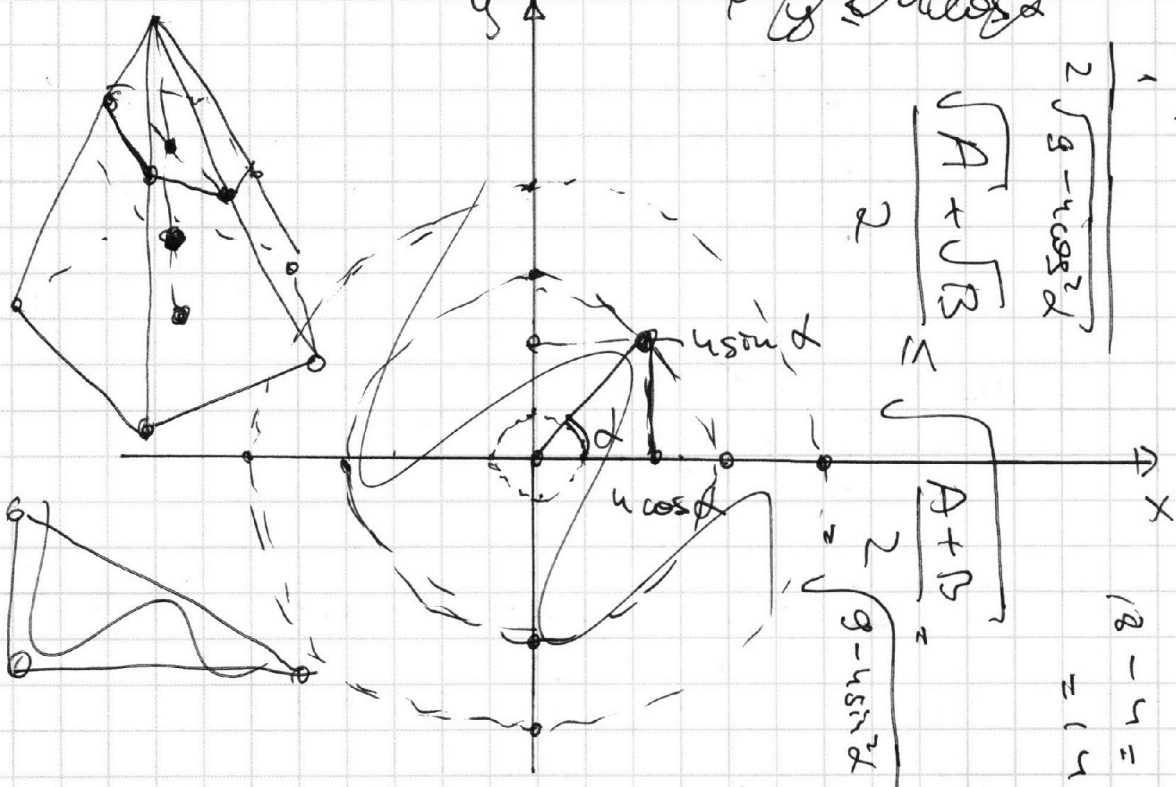
СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 4\sqrt{3}\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

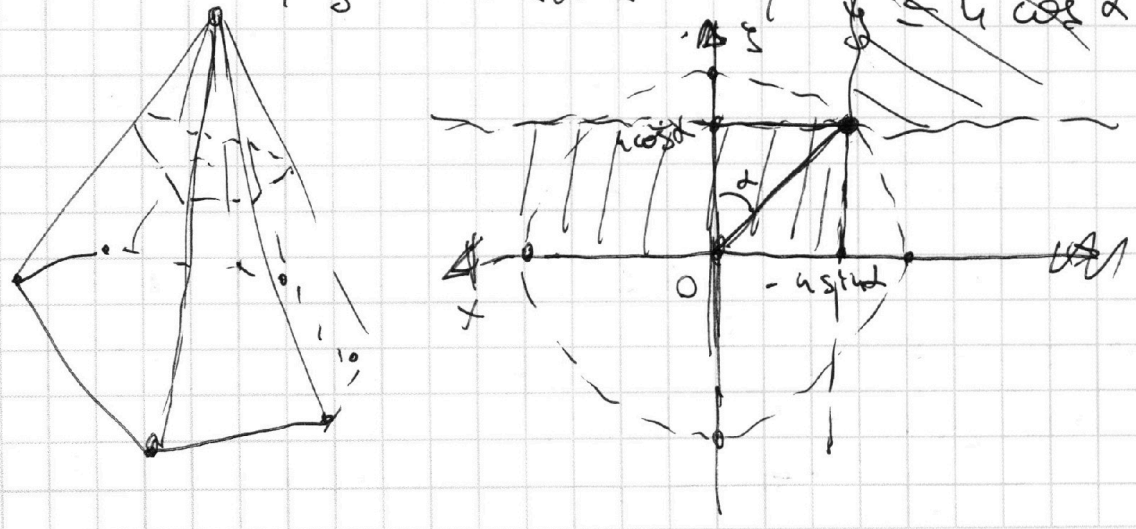
$$\begin{cases} x \geq -4\sqrt{3}\sin\alpha \\ y \leq 4\cos\alpha \end{cases}$$

~~1~~
~~2~~
~~3~~
~~4~~
~~5~~
~~6~~
~~7~~



~~$$xy + 4(\sqrt{3}\sin\alpha - x\cos\alpha) \leq 16\sin\alpha\cos\alpha \leq 0$$~~

$$\begin{cases} x + 4\sqrt{3}\sin\alpha \geq 0 \\ y - 4\cos\alpha \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -4\sqrt{3}\sin\alpha \\ y \leq 4\cos\alpha \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b). \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

из ограничений $\frac{x}{7} \in [-1, 1]$ и

$\frac{y}{4} \in [-1, 1]$; при этом по определению:

$\arccos \in [0, 2\pi]$; $\arcsin \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, а

значит по условию подойдут все пары (x, y) удовлетворяющие ограничениям, а также

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{7} = \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \\ \delta \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in [0, 2\pi] \\ \delta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array} \right.$$

$$\alpha = \delta - \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{7}$$

$$\sin \delta = \frac{y}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{7}$$

$$\sin \delta = \frac{y}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{7}$$

$$\sin \delta = \frac{y}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{7}$$

$$\sin \delta = \frac{y}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{7}$$

$$\sin \delta = \frac{y}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{7}$$

$$\sin \delta = \frac{y}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{7}$$

$$\sin \delta = \frac{y}{4}$$

$$\cos \alpha = \cos(\delta - \frac{\pi}{2})$$

$$\cos(\delta - \frac{\pi}{2}) = \sin \delta$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \sin \delta \Leftrightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{4} \Rightarrow 4x = 7y$$

при этом из ограничений: $x \in [-7, 7]$; $y \in [-4, 4]$

т.е. $x, y \in \mathbb{Z}$ (по условию), то $x: 7, y: 4 \Rightarrow$ пары

$(-7, -4); (0, 0); (7, 4)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Оформляется ком-во K, n и B из n и B и B и B

C_k^4 - всего n, B и 2 элемента

$$\text{ИЗ. } \frac{C_{k-2}^2}{C_k^4} = \frac{C_{k-2}^2}{C_k^4}$$

$$\frac{1}{C_k^4} = \frac{1}{C_k^4}$$

$$\text{ИЗ. } \frac{k!}{T!(k-T)!} = \frac{k!}{k!(k-4)!}$$

$$\text{ИЗ. } \frac{C_{k-2}^2}{C_k^4} = \frac{C_{k-2}^{T-2}}{C_k^T}$$

$$\text{ИЗ. } \frac{(k-2)!}{2!(k-4)!} = \frac{(k-2)!}{(T-2)!(k-T)!}$$

$$\frac{k!}{k!(k-4)!} = \frac{k!}{T(T-2)!(k-T)!}$$

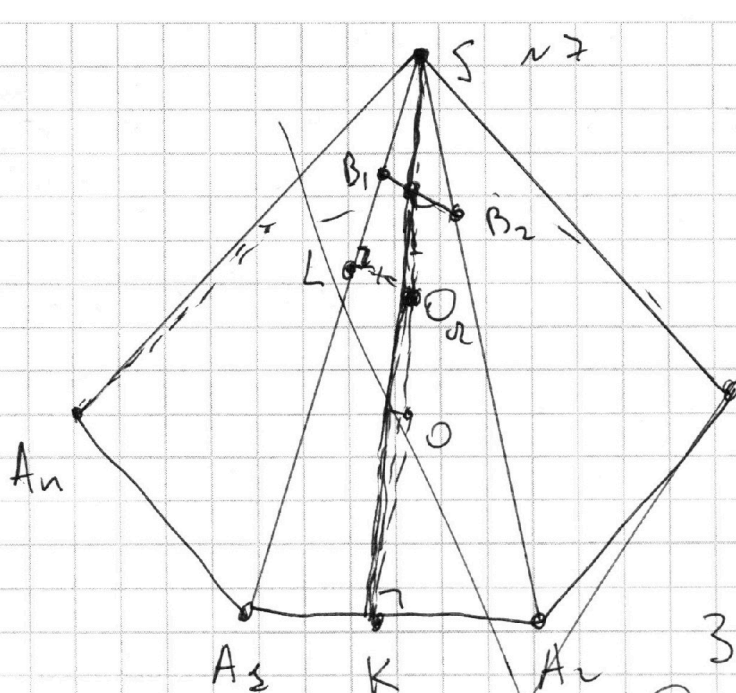


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Опустим высоту SO , т.е. $SA_1 \dots A_n$ равнобедренная пирамида, то O - центр n -угольника $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$

Заметим, что

$O_n \in SO$, т.к.

точки $\in SO$ равноудалены от ребер

$A_1 A_2$ -угол (т.н. о трёх цент. \oplus т.н. тупого

угла \oplus т.н. о равноудаленности от ребер n -

угол \Rightarrow т.н. \Rightarrow т.н. $SO \perp AA_2$ в м-ту $(SA_1 A_2)$

\Rightarrow т.н. \Rightarrow т.н. \Rightarrow т.н. OK - проекция

высоты SO на ребро AA_2 т.н. и OK -

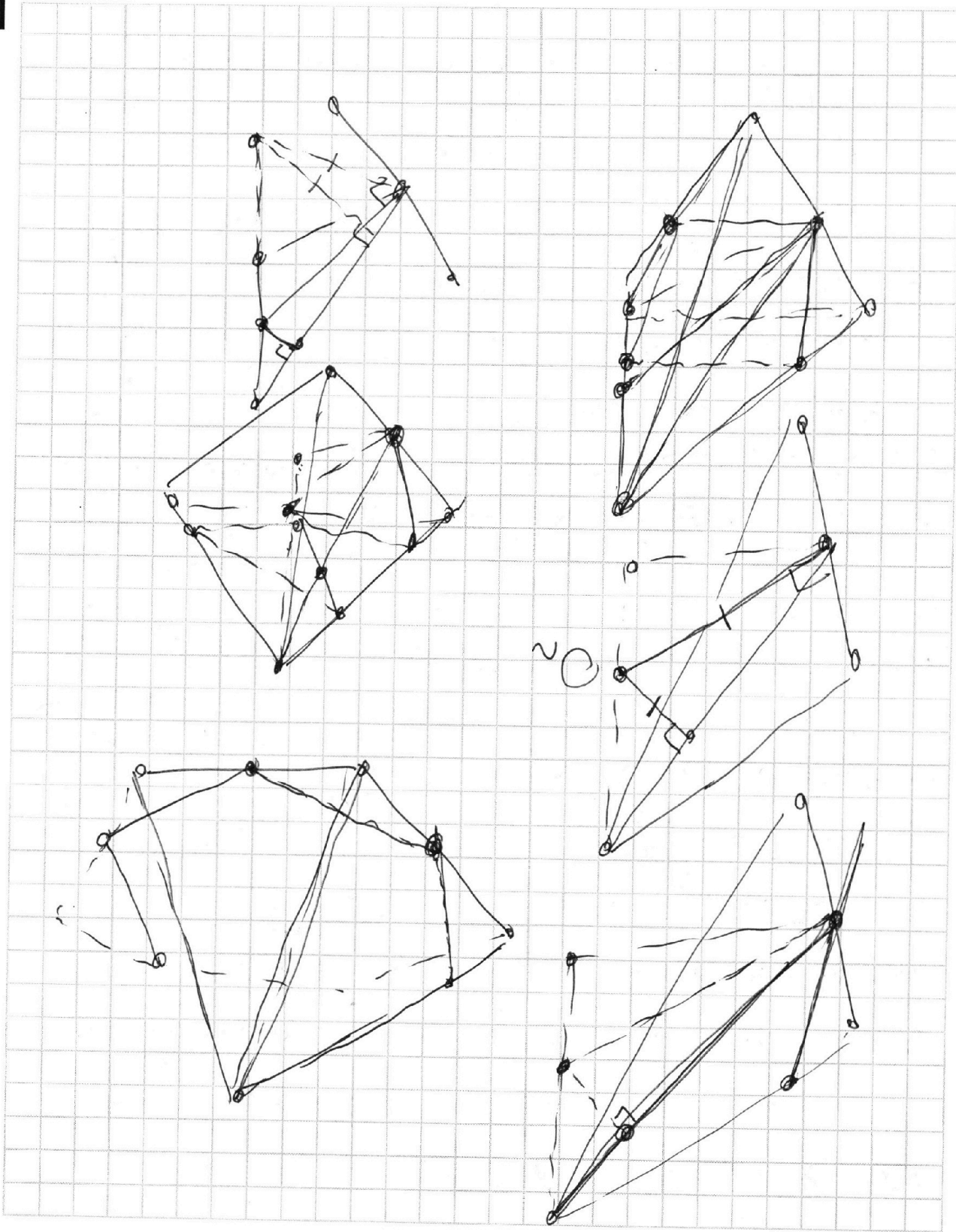
отстоящих SO и AA_2 т.н. \Rightarrow т.н. $O_n K \perp AA_2$

(т.н. о трёх цент.) $\Rightarrow O_n K^2 = O O_n^2 + OK^2 =$

не зависит от выбора ребра n -угол.

при этом $O_n L \perp SA_2$: $O_n L = O_n K$

Пусть n -угол $B_1 B_2 \dots B_n$ - сечение усеченной n -угол



СТРАНИЦА
ИЗ

- 1 2 3 4 5 6 7

На одной странице можно оформить только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порядк QR-кода недоступен!





На одной странице можно оформить только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА

из

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порядк QR-кода недопустим!

Тогда т.к. $(SOK) \perp (SA_1A_2)$ и $(B_1B_2) \in (SA_1A_2)$ то $(SOK) \perp (B_1B_2)$ и $(SOK) \perp (SA_1A_2)$ не имеет пересечения, т.е. не $SK \perp B_1B_2$ значит, $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$

Значит, $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$ в (SOK) и (SA_1A_2) соответственно

$$(SA_1A_2) \perp (B_1B_2) = T$$

или $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$ и $SK \perp SA_1A_2$ и $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$

и $SK \perp SA_1A_2$ и $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$ и $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$

А значит, $SK \perp SA_1A_2$ и $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$ и $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$

и $SK \perp SA_1A_2$ и $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$ и $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$

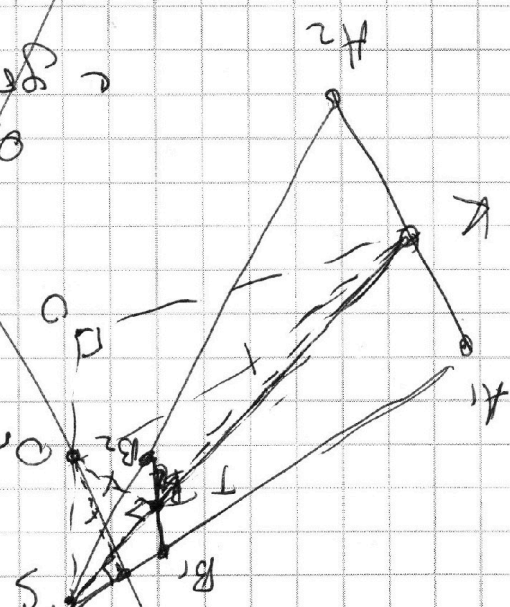
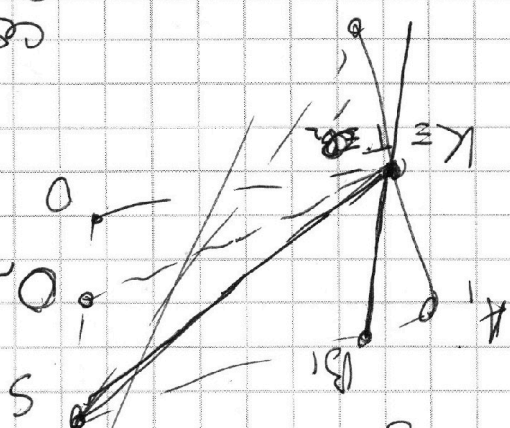
и $SK \perp SA_1A_2$ и $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$ и $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$

и $SK \perp SA_1A_2$ и $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$ и $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$

и $SK \perp SA_1A_2$ и $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$ и $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$

и $SK \perp SA_1A_2$ и $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$ и $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$

и $SK \perp SA_1A_2$ и $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$ и $SK \perp B_1B_2$ и $SK \perp SA_1A_2$





На одной странице можно оформить **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА _____ ИЗ _____

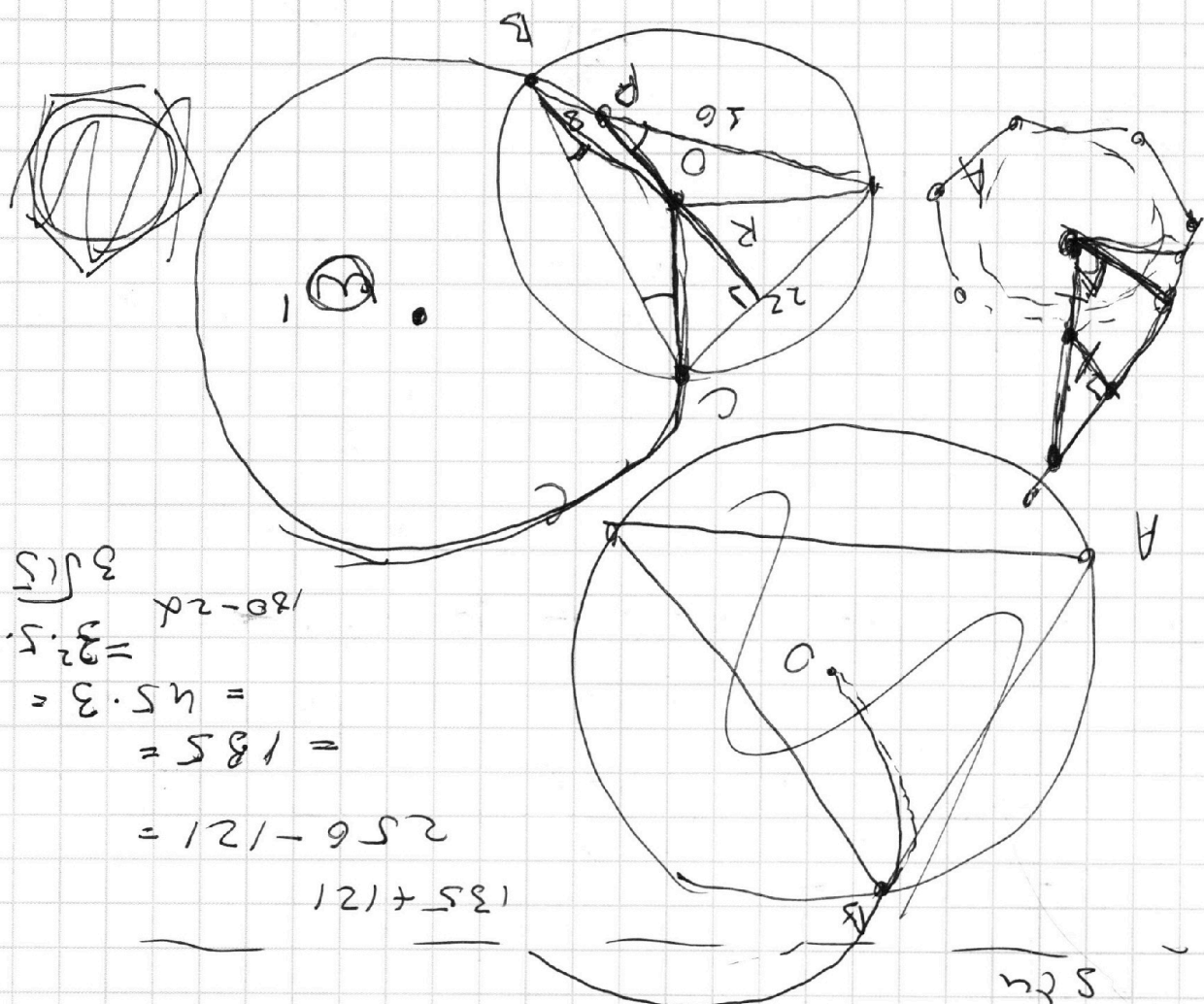
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Поша QR-кода нетопустима!

$$\begin{aligned}
 (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y &= (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y \\
 \Rightarrow \sin \pi x &= \pi y = \alpha, \quad \pi y = \beta \\
 (\sin \beta - \sin \alpha) \sin \beta &= (\cos \beta + \cos \alpha) \cos \beta \\
 2(\sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta + \alpha}{2} - \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta + \alpha}{2}) \sin \beta &= \\
 \cos^2 \beta - \sin^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta &= 0 \\
 \cos 2\beta + \cos(\alpha - \beta) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 135 + 121 &= 256 - 121 = \\
 = 135 &= 45 \cdot 3 = \\
 = 3 \cdot 5 \cdot 3 &= 3 \sqrt{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 180 - 2\alpha &= 180 - 2\alpha \\
 3 \sqrt{15} &= 3 \sqrt{15}
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформить **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- СТРАНИЦА _____ ИЗ _____
- | | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порядк QR-кода недоступен!



$$A = \overline{aa\alpha a} = 5888 \cdot a; \quad B = \overline{bcd} = 100b + 10c + d$$

$$C = xy = 10x + y$$

$$\overline{5888a} \cdot \overline{bcd} \cdot \overline{xy} = N^2$$

$$\begin{array}{r} 5888 \\ 11 \overline{) 5888} \\ \underline{11} \\ 4778 \\ \underline{44} \\ 378 \\ \underline{33} \\ 48 \\ \underline{44} \\ 4 \end{array}$$

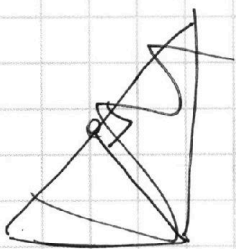
$$\overline{bcd} : 101$$

$$58 \cdot 101$$

808 - простое

$$B = 202$$

$$58 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 101 \cdot a \cdot \overline{xy} = N^2$$



$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{xy}{3} = \frac{x-y}{1} + \frac{y+y}{1} + \frac{(x-y)(y+y)}{3}$$

$$\text{формула } x^3 - y^3 - 12xy$$

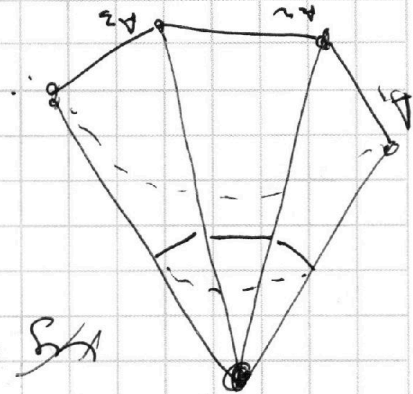
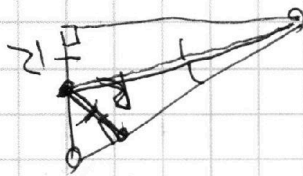
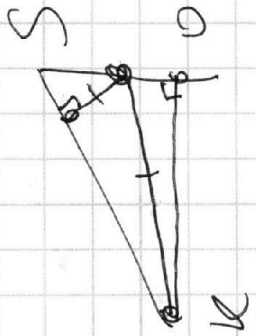
$$x^3 - y^3 - 12xy = (x-y) \cdot (-y) \cdot (-y) \cdot x = (x-y-y)$$

$$(x^2 + y^2 + xy + \dots)$$

$$\frac{x+y+3}{x+y+3} = \frac{5 \times 5}{x+y+3}$$

$$xy = x^2 - y^2 + 4x - 16$$

$$x - y - x = 0$$



$$\boxed{x+y+3=0}$$