



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 все $(A; B; C)$ т.ч. $A = \overline{aaaa}$, B - 3-знач. т.ч.
каждый 1 цифра "2"; C - 2-знач. т.ч. каждый 1 цифра "3",
 $A \cdot B \cdot C = n^2$, $n \in \mathbb{N}$

$$A = a \cdot 1111 = a \cdot 101 \cdot 11 \quad \text{где } a - \text{цифра } (\neq 0)$$

1) т.ч. $A \cdot B \cdot C = n^2$ в произв. $B \cdot C$

должен встретиться множитель 101, т.ч. C - двузнач.

$$B: 101 \text{ и по усл. } B \text{ содержит цифру 2 т.ч. } \underline{B = 202}$$

(т.ч. представимо в виде $2 \cdot 101$)

2)

$$n^2 = A \cdot B = 2 \cdot a \cdot 101 \cdot 11 \cdot C \Rightarrow C \text{ содержит множитель } 11$$

т.ч. представимо в виде $11 \cdot c$ *

~~и если цифра 3 т.ч.~~

$$\underline{C = 33}$$

* где c - цифра ($\neq 0$)

3) $n^2 = A \cdot B \cdot C = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot 101 \cdot 11^2 \Rightarrow 2 \cdot 3 \cdot a$ - полный квадрат, а значит $\underline{a = 2 \cdot 3 = 6}$

т.ч. суш. единственная такая тройка чисел:

$$A = 6666$$

$$B = 202$$

$$C = 33$$

Ответ: $(6666; 202; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2 $x, y > 0$ $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$; $K = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$

Найти все возм. $M = x^3 - y^3 - 3xy$

Решение:

$$\frac{y+x+2}{xy} = K = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{y+x+2}{xy+x-y-1} \quad \left| : (y+x+2) > 0 \right.$$

г.к. $x \geq 0$
 $y \geq 0$
 $2 \geq 0$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{xy+x-y-1} \quad | \cdot (x-1)(y+1) \neq 0 \text{ г.к. делим на число по условию.}$$

$$\frac{xy+x-y-1}{xy} = 1 \quad | \cdot xy \neq 0 \text{ г.к. делим на число по условию}$$

$$xy+x-y-1 = xy \quad \text{г.к. } y = x-1$$

$$\text{г.к. } K = \frac{x-1+x+2}{x(x-1)} =$$

$$= \frac{2x+1}{x(x-1)}$$

$$M = x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-1) = x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$$

$$- 3x^2 + 3x = x^3 - 3x^2 + 3x - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 1 \quad \text{Ответ: } 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3 б) - продолжение.

Заметим, что $\arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}$ и $\arccos \frac{y}{4} \leq \pi$

т.е. $\arccos \frac{y}{4} + \arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{3\pi}{2}$ всегда. а значит

$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$ верно когда $\arccos \frac{y}{4} \neq \pi$ или

$\arcsin \frac{x}{5} \neq \frac{\pi}{2}$ (покажем, что пары: $(x; x-1+2k)$ и $(x; 1-3x+2n)$ $n, k \in \mathbb{Z}$)

допускающие зн-я для $\frac{x}{5} \leq \frac{5}{5}$ и $\frac{y}{4} \leq \frac{4}{4}$

$$\begin{cases} \left| \frac{x}{5} \right| \leq 1 \\ \left| \frac{y}{4} \right| \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} |x| \leq 5 \\ |y| \leq 4 \end{cases}$$

Заметим также, что для x -чет: $\forall y$ -нечет, а для x -нечет: $\forall y$ -чет

$x: (1) -5; -4; -3; -2; \underline{1}; 0; 1; 2; 3; 4$ (11 пар)
 $y: (2) -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$ (9 пар)

$\arccos \frac{y}{4} \neq \pi$ т.е. $\frac{y}{4} \neq -1$ $y \neq -4$ $x - \forall$ из (1)
т.е. 11-8=88 пар-тов

а для $y = -4$ ~~х-нечет~~ $\arcsin \frac{x}{5} \neq \frac{\pi}{2}$ $\frac{x}{5} \neq 1$ $x \neq 5$

$y = -4$ $x - \forall$ из $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ т.е.
т.е. 10 пар-тов.

$$88 + 10 = 98$$

Ответ: 98 пар



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N \} a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin \pi y \sin \pi x - \cos \pi x \cos \pi y = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$-\cos(\pi y + \pi x) = \cos 2\pi x$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y) = 0 \quad \text{т.е.} \quad 2 \cos \frac{2\pi x + \pi x + \pi y}{2} \cos \frac{2\pi x - \pi x - \pi y}{2} = 0$$

$$\text{т.е.} \quad \begin{cases} \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} = 0 \\ \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \pi \frac{3x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \pi \frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+y = 1+2n, n \in \mathbb{Z} \\ x-y = 1+2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1-3x+2n, n \in \mathbb{Z} \\ y = x-1+2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $(x; 1-3x+2n, n \in \mathbb{Z})$ и $(x; x-1+2k, k \in \mathbb{Z})$ для действительных x .

б) сколько пар действительных чисел $(x; y)$ из пункта а удовлетв.

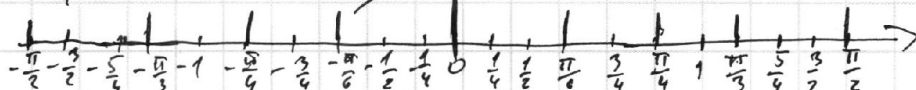
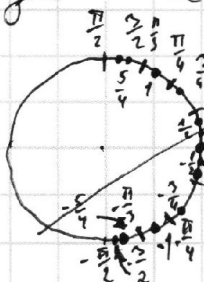
$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{3\pi}{2}?$$

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{x}{5} \leq \pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{y}{4} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq y \leq 4\pi \\ -\frac{3\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{т.к. } x, y \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 15 \quad (5\pi \approx 15,708) \\ -6 \leq y \leq 6 \quad (2\pi \approx 6,283) \end{cases}$$

Заметим, что для четных x суц. y : $-5; -3; -1; 1; 3; 5$
а для нечетных x суц. y : $-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6$

$\frac{y}{4}$ может быть: $-\frac{3}{2}; -1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$

$-\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}$ т.е.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4 в начале месяца было выделено 4 билета

2,5 $P(A) = P(B)$ где A - Петя и Вася вместе идут на концерт. (когда выделено 4 билета)

B - Петя и Вася вместе идут на концерт (когда выделено больше 4 билетов. Пусть это кол-во равно $4+x$)

(сколько выделены билетов? ($x+4=?$))

Пусть K - кол-во одноклассников, тогда ($K \geq 2$)

$$P(A) = \left(\frac{4}{K} \right) \cdot \left(\frac{3}{K-1} \right) = \frac{12}{K(K-1)}$$

вер-ть, что на концерт поедет Вася или Петя (кто-то 1)
вер-ть, что на концерт поедет второй человек

$$P(B) = \frac{4+x}{K} \cdot \frac{3+x}{K-1} =$$

$$= \frac{12 + 7x + x^2}{K(K-1)}$$

$$\frac{30}{K(K-1)} = \frac{2,5 \cdot 12}{K(K-1)} = 2,5 \cdot P(A) = P(B) = \frac{12 + 7x + x^2}{K(K-1)} \quad | \cdot \frac{K(K-1)}{2} \quad \text{нравно!}$$

$$x^2 + 7x - 18 = 0 \quad (x+9)/(x-2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -9 \end{cases} \quad \text{не возм. выделено 5 билетов. т.е. -9 не подходит.}$$

выделим в конце $x+4 = 2+4 = 6$

Ответ: 6 билетов.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5 ω_1 - опис. около $\triangle ABC$ (остроугольного)
 ω_2 - опис. около $\triangle BOC$ где O - центр ω_1

$\omega_2 \cap AB = P$ (именно отрезок AB)!
 $AP = \frac{15}{2}, BP = 5, AC = 9$

1) $PC = AP = \frac{15}{2}$ т.к. $\angle OAC = \angle OCA$ т.к. $AO = OC = R_{\omega_1}$
 $\angle OAB = \angle ABO = \angle PBO = \angle PCO$ (т.к. $P \in AB$)
 Эти углы опир. на 1 дугу в окр-ти ω_2
 т.е. $\angle PAC = \angle BAO \pm \angle OAC = \angle PCO \pm \angle OCA = \angle PCA$ т.е. $\triangle APC$ - р/с

2) Д.п. PH - высота $\triangle APC$ тогда $AH = \frac{1}{2}AC = \frac{9}{2}$

$$PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{9 \cdot 25}{4} - \frac{9 \cdot 9}{4}} = \frac{3}{2} \sqrt{25 - 9} = 6$$

$$\sin \angle PAH = \frac{PH}{AP} = \frac{6}{\frac{15}{2}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

3) $S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle PAH =$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{15}{2} + 5 \right) \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8 \cdot 9}{5} \left(\frac{25}{2} \right) = 45$ Ответ: 45



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

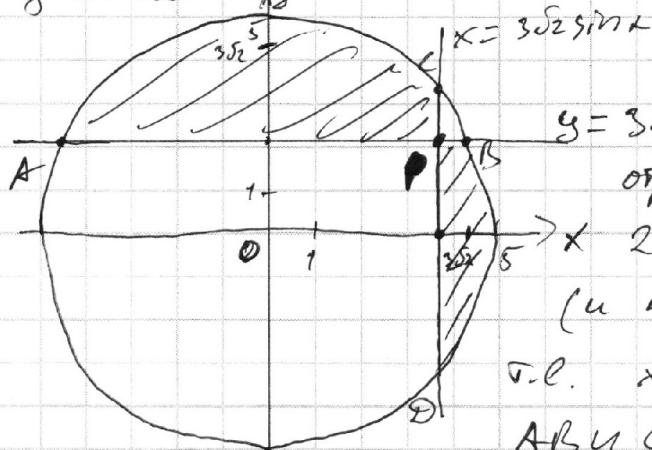
6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6 M-периметр $\Phi(\alpha)$: $(x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0$
 $\max M$ - ? и α при которых $x^2 + y^2 \leq 25$
достигается $\max M$.



M содержит в себе полностью
отрезки AB и CD, а также
2 дуги окр-ти: AC и BD
(и не содержит дуги AD и BC
соотв.)
т.е. хотим сделать отрезки
AB и CD - так и выбрать

наши
дуги т.е. они были больше ~~выбраны~~.

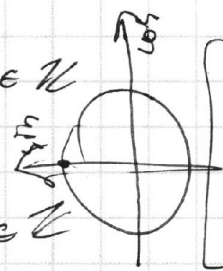


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \pi \frac{3x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \pi \frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+y = 1+2n, n \in \mathbb{Z} \\ x-y = 1+2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$


$$\begin{cases} y = 1-3x+2n, n \in \mathbb{Z} \\ y = -1+x-2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Обер: $(x; 1-3x+2n, n \in \mathbb{Z})$ и $(x; x-1+2k, k \in \mathbb{Z})$

38) $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$



$$\begin{cases} 0 \leq \frac{x}{5} \leq \pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{y}{4} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 5\pi \\ -6,28 \leq y \leq 6,28 \end{cases}$$

$$5\pi \approx 5 \cdot 3,14 = 15,7$$

т.е. $\begin{cases} x \in [0; 15] \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\begin{matrix} \times 3,14 \\ 15,70 \end{matrix}$$

$$y \in [-6; 6] \quad \begin{matrix} x & y \\ (0; 1) & (0; -5) \\ (1; -6) & (1; -4) \\ (2; -2) & (2; 0) \end{matrix}$$

$(x=1; (1; -6))$

$(x=2; (2; 0))$

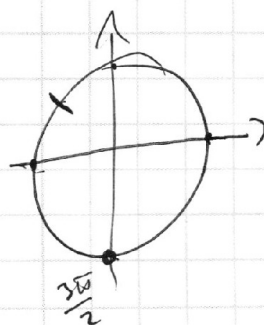
$$\begin{cases} y = 1-3x+2n, n \in \mathbb{Z} \\ y = x-1+2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$x \in [0; 15] (x \in \mathbb{Z})$

для чет: x 6 чис. для x (кажд.)

для нечет: x 7 чис. для кажд. x

$\arccos \frac{y}{4}$ для





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

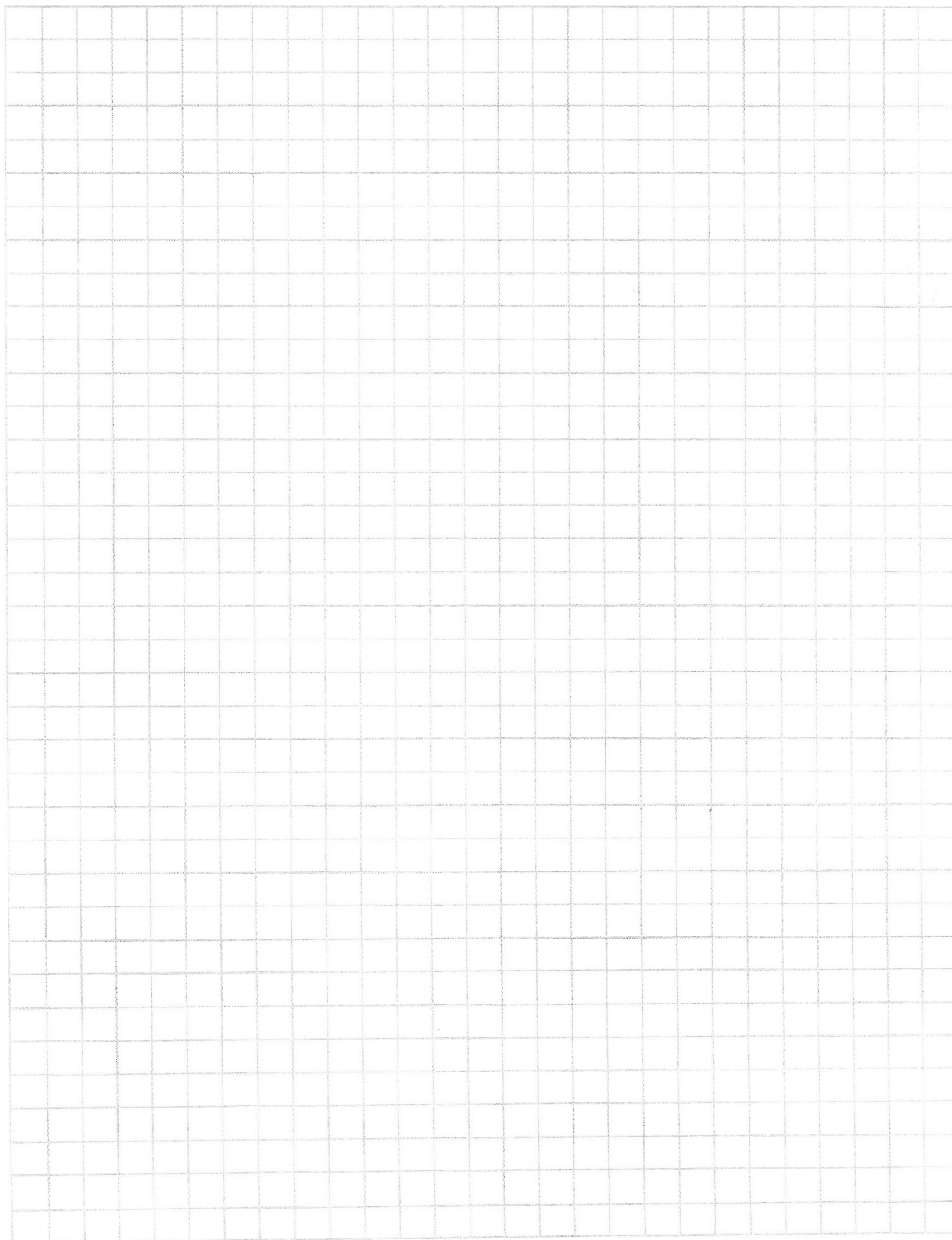
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



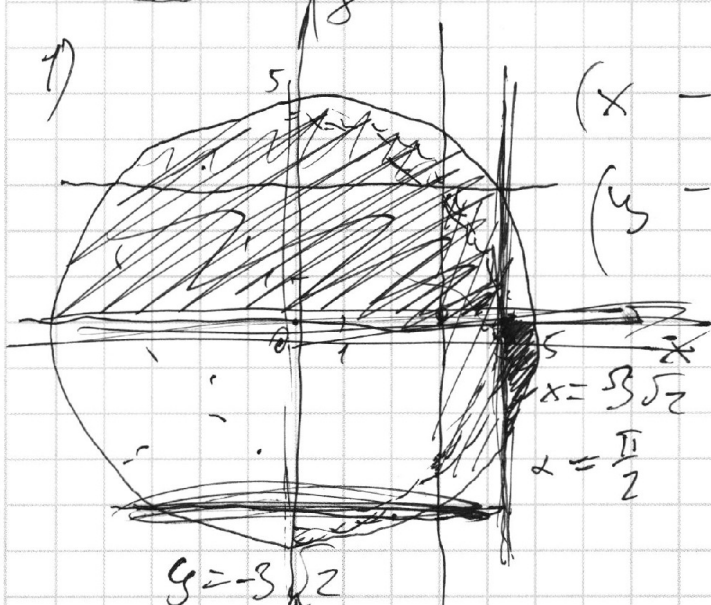
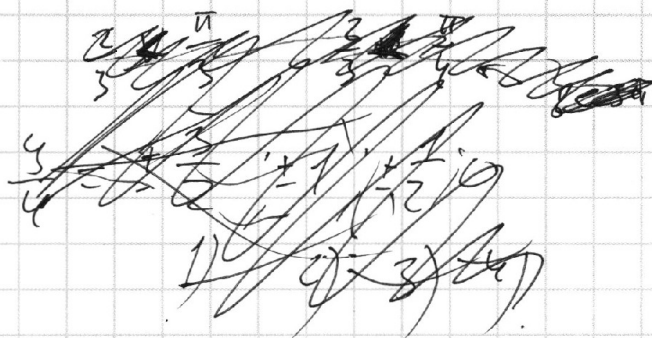
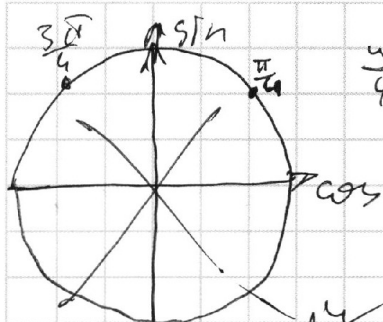


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha) \\ (y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \end{aligned}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\alpha = 0$$

$$3\sqrt{2} \sqrt{5}$$

$$\sqrt{18} < \sqrt{20}$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = 3$$

$$y = -3$$

